

# 새로운 난수發生法에 의한 回路設計用 시뮬레이션 알고리즘 開發에 關한 研究

(上)

A Study on the Development of  
Simulation Algorithm for the Circuit  
Design by New Random Number Generation

李 根 喆

本協會 編修委員(工學博士)

## 1. 서 론

몬테칼로법은 난수를 취급하는 기법을 총칭한다. 몬테칼로법의 역사는 Buffon이 원의 면적을 구한 것이 시초이다. 현대적인 의미로 몬테칼로법의 연구가 시작된 것은 제 2차 세계대전 말기로서 Von Neumann과 Ulam이 핵분열 물질에 대한 중성자의 랜덤한 확산현상을 전자계산기로 시뮬레이션한 데서 시작되었고, 그후 Harris 및 Kahn에 의해 조직적으로 연구되었다.

현재 몬테칼로법의 연구는 결정론적인 문제와 확률론적인 문제에 다같이 적용하는 연구가 수행되고 있다.

전자공학에서는 확률론적인 문제로서 전화 회선의

결정, 신뢰성 있는 회로설계 및 반도체 장치 모델링이 최근에 활발히 연구되고 있다.

국내에서의 연구는 몬테칼로 최적화에 대한 연구가 발표되었는데, 이 논문에서는 몬테칼로법을 이용한 함수의 최적해와 경제적인 회로설계와 해석을 논하였으며 회로해석은 분산전파식을 이용한 것이었다.

몬테칼로 해석은 미사일에 들어가는 정교한 회로나 생산성이 높은 집적회로 설계시에는 반드시 수행할 필요가 있고 실제로 행해지고 있다.

현재까지 많이 사용되고 있는 난수는 중심극한정리를 이용한 정규분포 난수이고, 통례적인 몬테칼로 해석법은 성능함수의 목표치와 설계조건을 부여하여 이 조건내에 들어오는 성능 목표치의 히스토

그램을 구함으로써 신뢰도를 추정하는 것이었다.

그러나 본 연구에서는 현재 사용하고 있는 난수보다 효율적인 난수 발생법을 사용하여 파라미터를 추출하고 파라미터간의 상관관계가 있을 때 이것도 고려하여 회로 해석을 하였다. 허용공차장이란 개념을 도입하여 수율을 계산하였으며 표준편차, 성능함수의 공칭값, 최악조건상한, 출력분산 및 성능함수의 히스토그램에 대한 통계적 자료를 얻는 프로그램을 개발하였다. 또한 몬테칼로 회로해석과 시뮬레이션을 퍼스널컴퓨터를 이용하여 할 수 있도록 하였다.

2 장에서는 몬테칼로법의 개념과 몬테칼로 회로해석 방법 등에 대해 논하고 3 장에서 난수의 종류와 점점법 및 본 논문에서 사용한 난수에 대해서 논하고 4 장에서 몬테칼로 시뮬레이션 프로그램(MON-SIM)의 구성과 설계 사례에 대하여 논하고 검토한 다음 5 장에서 결론을 맺는다.

## 2. 몬테칼로법

### 2. 1 개념

해결하려는 문제를 대별하면 결정론적인 문제와 확률적인 문제가 있다. 결정론적인 문제를 수학적으로 해결하려면 문제를 수식화하고 이것을 해석적 방법으로 처리하여 해를 푸는 것이 보통이다.

그러나 문제를 수식화할 수 없거나 수식화할 수 있더라도 해석적 방법이 발견되지 않을 때가 있다.

이때는 시행 착오법으로 문제해결을 시도할 수 있으나 이것은 일종의 실험으로서 문제에 따라 시간과 경비가 대단히 많이 들어 시행이 곤란한 경우가 있다. 이 경우 문제의 모형을 이용하여 실험을 하는 방법을 취한다. 모형에 대해서는 2 가지의 형태가 있는데, 그 하나는 문제를 그대로 모형화한 결정론적 문제와 다른 하나는 문제를 확률론적 문제로 치환하여 얻는 확률론적형으로서 이것을 주어진 문제에 대응하는 기대치를 갖는 것과 같은 확률과정이 알려져 있을 때 이 과정을 나타내는 수치 모형이다. 결정론적 모형은 실험을 행한 것과 똑같은 효과를 갖는 랜

덤 샘플링 방법을 이용할 수 있는데, 이것은 인위적으로 편파적인 것을 피하여 실험을 할 수 있어 문제에 따라 대단히 유효한 방법이다. 이 방법은 실험 결과로부터 해를 추정하기 위한 통계적 처리가 필요하다.

### 2. 2 수학적 배경

몬테칼로법은 확률 과정의 수치 모형, 랜덤 샘플링 및 해의 추정의 세 가지로 되어 있다. 첫째로 수치 모형은 일반적으로 주어진 해에 대응한 기대치를 갖는 것과 같은 확률 과정이 알려져 있을 때 이 확률 과정을 실험에 적합하도록 구체적 형으로 한 것이 수치 모형이다.

둘째로 랜덤 샘플링은 소위 무작위성을 어떻게 수학적으로 규정해야 하는가가 매우 중요하다. 수치모형에 대해 무작위하게 실험을 하여도 무작위성을 어떻게 고려해야 하는가를 규정하지 않으면 실험을 하는 사람의 무작위성의 해석에 따라서 무의식중에 고의성이 개입하게 된다. 그런데 무작위성을 수학적으로 단적으로 표현하는 방법은 현재 확립되어 있지 않다. 그러나 일반적으로 무작위성을 표시하는 것으로서 난수를 이용하며 이에 대해서는 다음장에서 설명한다.

세째로 문제의 해를 위한 추정에 대해서는 우선 실험에 의해서 기대치를 구하기 위한 실험을 여러번하고 그 결과를 통계적으로 처리해서 해를 추정하는 것이다.

실험에 의해서 얻어진 결과는 일반적으로 변동을 나타내며 이 변동 결과로부터 참값을 추정하기 위해서는 보통 중심극한 정리를 이용한다. 이 정리는 Laplace-Liapounov의 정리라고 하며 다음과 같이 정의된다.

즉, 여러번 실험을 한 결과로서  $X_1, X_2, \dots, X_n$  (동일한 분포를 이루는 상호독립된 확률 변수의 열을 얻었을 때 이들 분포의 평균치와 분산을 각각  $m, \sigma^2$ 이라 하면  $\bar{X}_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$ 이 커지면 점근적으로 가우시안(Gaussian) 분포에 접근한다.

이 정리의 의미는 실험의 횟수를 증가시키면 확률변수의 평균치  $\bar{X}_n$ 의 분산은  $\sigma^2/n$ 이 되며 점점 감

소하여 그림 2-1 과 같이  $\bar{X}_n$ 이  $X_i$ 에 따르는 분포의 평균치  $m$ 에 한없이 접근함과 동시에 실험 회수  $n$ 을 변경시키면  $X_n$ 의 값은 점선으로 표시한 가우시안 분포  $N(m, \sigma^2/n)$ 을 따른다는 것이다.

이상에서 설명한 바와 같이 몬테칼로법은 수학적 배경을 갖는 문제 해결의 한가지 방법이나 주의해야 할것은 몬테칼로 방법에 의해서 얻어진 해는 추정값이고 해석적인 방법에 의해서 얻은 풀이와는 근본적으로 다르다는 것이다.

또한 몬테칼로법은 효율적 방법으로서 각 방면에 이용되고 있으며, 이것을 이용한 방법의 원리는 다음과 같은 순서로 실험을 하는 경우가 많다.

순서 1 : 문제를 풀 수 있는 한 충실하게 모형화 한다.

즉 수치모형을 만들며 결정론적인 문제도 확률적인 문제로 변경시킨다.

순서 2 : 수치모형에 대해서 실험에 적합한 난수를 발생시킨다.

순서 3 : 난수를 이용해서 실험을 한다.

순서 4 : 실험 결과를 종합한다.

순서 5 : 순서 4의 결과를 이용해서 통계적으로 처리를 하여 해를 추정한다.

순서 6 : 해석적 방법의 사용이 가능하면 이것에

의해서 추정치를 다시 정밀하게 한다.

문제에 따라서 순서 2의 결과로 끝나는 것도 있으나 이 경우에는 순서 3의 실험이 통계적으로 신뢰성이 있는가를 검증할 필요가 있다.

순서 6에 있어서의 해석적인 방법의 이용은 예를 들면 문제의 근사해를 해석적으로 구하든가 또는 내삽법이나 외삽법등을 이용하는 것으로, 이것을 추정치의 미비한 점을 보충하는 것이다.

### 2. 3 소자 분포

회로 설계가 모형과 회로도가 결정되고 부품의 공칭치가 결정될 단계에 이르면 설계자의 다음 문제는 부품의 허용공차를 설정하는 것이다. 설계시 부품은 공칭치를 기준으로 하지만 실제 제품의 값은 공칭치 부근에서 변동을 나타내는 것이 보통이다.

이 변동의 분포는 품종에 따라 동종의 품종이라도 제조조건의 변화에 따라 서로 다르다.

엄격한 품질 관리하에 만든 것은 그 분포 패턴이 품종에 따라 대개 정해져 있다. 일례로서 공칭치가  $1K\Omega$ 인 솔리드 저항의 어느 로트(lot)의 저항값 분포를 그리면 그림 2-2 와 같다. 히스토그램은 허용공차 범위 ( $900\Omega \sim 1100\Omega$ )를 여러계급으로 나누어 그린다. 누적다각형은 각 계급의 저항의 수를 더해 서 구한다. 상대 발생도수는 발생도수를 샘플의 크기로 (이 경우 500개)로 나눈 것이다. 저항 샘플에 대한 평균값은 히스토그램으로부터 구할 수 있다.

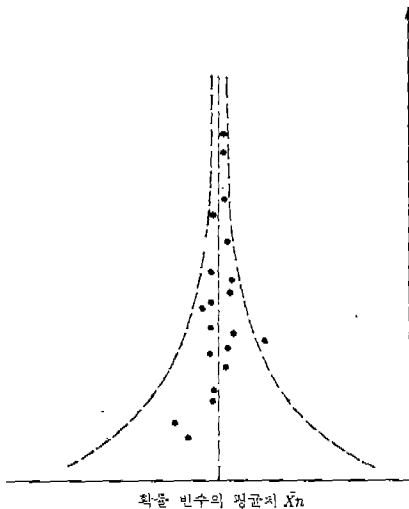
$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \mu_i \bar{P}_i \dots \dots \dots (2.1)$$

여기서  $P_i$ 는 계급  $i$ 의 계급값이고  $\mu_i$ 는 계급  $i$ 에서의 부품의 개수  $K$ 는 계급의 개수이다.

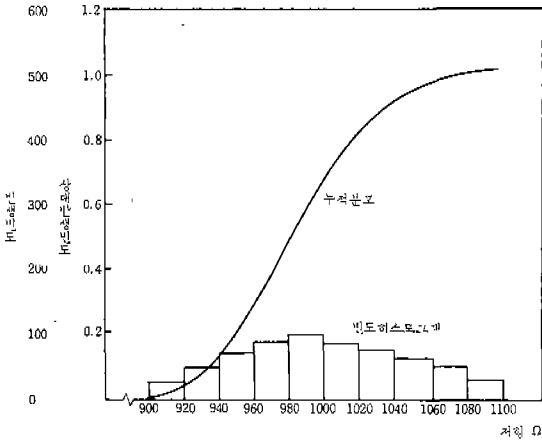
그림 2-2의 히스토그램의 포락선을 매끈한 곡선으로 그리면 그림 2-3과 같은빈도분포를 나타낸다. 그림 2-3에서 평균치는

$$m = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} p f(P) dp \dots \dots \dots (2.2)$$

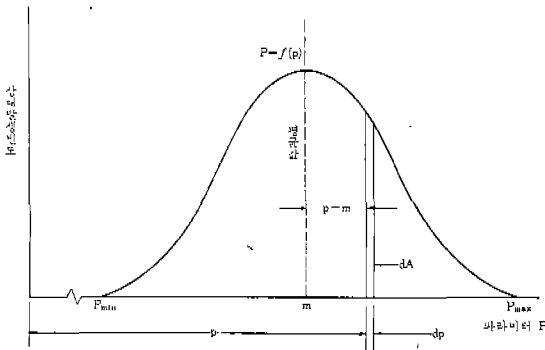
여기서  $P$ 는 파라미터 값에 대한 확률변수이다. 분포의 폭은 분산  $\sigma^2$ 으로부터 측정되고 연속함수에 대해서



(그림 2-1) 확률변수의 평균치



〈그림 2-2〉 특정빈도 분포에 대한 히스토그램과 누적분포



〈그림 2-3〉 모멘트분포, P

$$\sigma_p^2 = \int_{P_{min}}^{P_{max}} (p-m)^2 f(P) dp \dots (2.3)$$

가 되며 2차 모멘트이다. 파라미터의 측정치로부터 분산을 구하면

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (P_i - m)^2 \dots (2.4)$$

이다. 여기서  $P_i$ 는 개개의 측정값이다. 파라미터 히스토그램으로부터 분산을 구하면

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \mu_i (P_i - m)^2 \dots (2.5)$$

이 된다.

단일 부품이 여러 개의 중요한 파라미터를 갖는다면 파라미터 분포 사이에 상관관계가 있음을 알 수 있다. 예를 들면 반도체 다이오드에서 오프셋 전압

이  $V_p$ 이고 저항이  $R_D$ 라면 내부 물리적 관계가  $R_D$ 의 값과 범위를  $V_D$ 에 관해서 결정해 줄 것이다. 이 경우 개별 소자에 대한  $R_D$ 의 값을  $V_D$ 에 관해서 그리면 대략적으로 직선이 된다. 그린 점이 정확히 일직선상에 오면 파라미터들은 완전히 상관되고 상관계수는 직선의 기울기가 양이나 음이냐에 따라  $\pm 1$ 이다. 선형관계가 없으면 상관계수는 0이다.

파라미터  $\rho_a$ 와  $\rho_b$ 간의 상관계수  $\rho_{ab}$ 를 구하는 식은

$$\rho_{ab} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(P_{ai} - m_a)(P_{bi} - m_b)}{\sigma_{pa} \sigma_{pb}} \dots (2.6)$$

가 된다. 여기서  $P_{ai}$ 와  $P_{bi}$ 는  $i$ 번째 소자의 측정값이고  $\sigma_{pa}$ 와  $\sigma_{pb}$ 는 파라미터  $P_a$ 와  $P_b$ 에 대한 표준편차,  $m_a$ 와  $m_b$ 는 파라미터  $P_a$ 와  $P_b$ 의 평균치,  $\rho_{ab}$ 은 상관계수이다.

소자분포는 대개 가우시안 분포를 갖고 있으며 샘플값  $-\infty$ 에서  $\lambda$  사이에 들어가는 경우의 가우시안 분포 함수는

$$\psi(P) = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(P-m)^2/2\sigma^2} dp \dots (2.7)$$

이고, 확률 밀도 함수

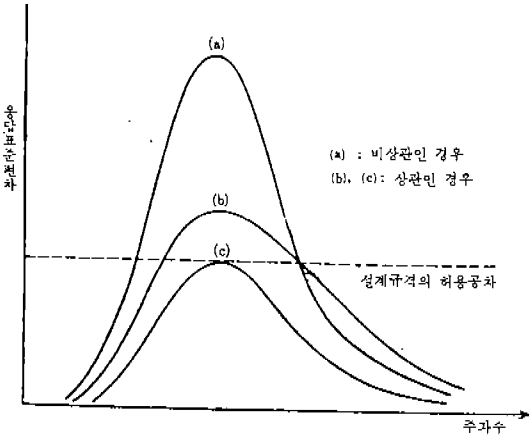
$$f(P) = \frac{d\psi(P)}{dp} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(P-m)^2/2\sigma^2} \dots (2.8)$$

그림 2.3에서  $f(p-m) = f(p+m)$ 이므로 평균값  $m$ 에 대하여 대칭이다. 만약 허용 공차 한계점의 상한과 하한을 각각  $P_{max}$ 와  $P_{min}$ 이라 하면 영역은  $P_{min} \leq P \leq P_{max}$ 이고 허용할 수 있는 값의 확률을  $A$ 라고 하면

$$A = \int_{P_{min}}^{P_{max}} f(P) dp = \int_{P_{min}}^{P_{max}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(P-m)^2/2\sigma^2} dp \dots (2.9)$$

이 되며 이것을 수율(yield)이라고 한다.

그림 2.4는 허용 공차장으로서 주파수 또는 시간대 응답표준편차를 그린 것이다. 허용공차장은 수율을 판단하는 한 방법이다. 예를 들면 그림 2.4에서 규정한 허용공차 한계에 대해서 이 한계를 초과하는 면적을 확인하고 상이한 회로에 대해서 비교할 수 있다. 이 경우는 동일한 회로의 상이한 상관계수에 대해서 비교한 것이다. 설계규격 이내에 들



〈그림 2-4〉 허용공차장

어오는 것이 수율이 제일 좋은 것이다. 곡선 (a)은 나쁜 수율을 나타내고 (c)은 거의 100%의 수율을 나타내며 (b)는 중간 정도이다.

2.4 몬테칼로 회로 해석

소자분포는 공칭치 부근에서 변동을 하고 있다. 그림 2.1과 같은 분포를 갖는 저항으로 회로를 설계한다면 공칭치만으로 설계했을 때 구성된 회로의 동작 상태가 구성 부품의 변동에 의해 실제 사양과 다른 경우가 생긴다.

이러한 변동을 고려하여 성능 함수가 설계 목표치에 들어오도록 해석하는 방법을 변동해석이라 하며, 이 방법에는 최악 조건 해석, 모멘트 해석, 몬테칼로 해석이 있다.

몬테칼로 해석은 통계적인 방법으로 해석하는 것으로서 회로의 신뢰도를 판단하는 자료를 제공한다. 몬테칼로해석을 하기 위해서는 2.2절의 수학적배경에서 말한 바와 같이 우선 성능 함수에 대한 수치 모형을 만들어야 한다.

성능 함수는 전달함수도 될 수 있고 이득 전력 지연 시간 등도 될 수 있다. 성능 함수가 구해지면 여기에 포함되는 저항, 인덕턴스, 커패시턴스 등의 부품의 분포에 해당하는 난수를 발생시켜 각 부품을 랜덤하게 선택하여 성능함수식에 대입하고 이 값의 분포를 구하는 것이 통상적인 방법이다.

본 논문에서는 분포를 구하는 것 이외에 공차장이란 개념을 도입하여 수율을 구하는 것을 함께 고려하였고 아울러 부품이 상관관계가 있을 때 이것을 고려한 출력과 출력 공분산을 구하는 방법도 제시하였다.

이 분포로부터 성능 함수의 설계 규격을 벗어나는 부분을 표류신뢰도라 하고 목표치를 벗어나지 않도록 설계해야 한다.

한편 최악조건설계는 1962년 H. S. Scheffer, J. J. Duffy, B. C. Spradlin씨 등이 설계한 방법으로서 회로의 부품이 허용공차의 극한치에 도달했을 때 회로가 신뢰성 있게 동작하도록 설계하는 것이다. 그러나 이것은 신뢰도측정이 곤란하고 회로가 여러가지 원인에 의해서 실패한다면 서로 다른 원인에 의해서 실패한다면 이이 상이한 원인에 대한 불확률을 구별할 수 없으며 출력의 평균치 확률과 극한치 확률을 구별할 수 없다.

모멘트설계는 1963년 D. G. M Mark씨가 창안한 설계방법으로서 부품의 표준편차와 평균치를 추정하여 회로성능이 규정된 한계 이내에 있도록 확률을 결정하는 것이다.

이 방법은 부품정수의 도수분포 특성의 첨도 (skewness)를 고려하지 않았고 부품정수와 성능특성간의 범함수관계 (functional relationship)가 곡선의 평균치 부근에서 심한 곡률을 가지면 평균치에서 함수의 기울기에 의해서 결정되는 직선으로 곡선을근사시키므로 정확치 못한 결과를 가져올 수 있다.

〈다음호에 계속〉