

〈研究論文〉



## 非正規分布工程에서 메디안特殊管理圖의 模型設計와 適用研究

Median Control Chart for Nonnormally Distributed Processes

辛 容 伯\*  
Shin, Yong Back

### ABSTRACT

Median Control Chart for Nonnormally Distributed Processes

Prof: Yong-Back Shin (P.E., Ph.D)

Dept. of Industrial Engineering

Ajou University

Statistical control charts are useful tools to monitor and control the manufacturing processes and are widely used in most Korean industries. Many Korean companies, however, do not always obtain desired results from the traditional control charts by Shewhart such as the  $\bar{X}$ -chart,  $X$ -chart,  $\bar{X}$ -chart, etc. This is partly because the quality characteristics of the process are not distributed normally but are skewed due to the intermittent production, small lot size, etc. In Shewhart  $\bar{X}$ -chart, which is the most widely used one in Korea, such skewed distributions make the plots to be inclined below or above the central line or outside the control limits although no assignable causes can be found. To overcome such shortcomings in nonnormally distributed processes, a distribution-free type of confidence interval can be used, which should be based on order statistics. This thesis is concerned with the design of control chart based on a sample median which is easy to use in practical situation and therefore properties for nonnormal distributions may be easily analyzed.

Control limits and central lines are given for the more famous nonnormal distributions, such as Gamma, Beta, Lognormal, Weibull, Pareto, Truncated-normal distributions.

Robustness of the proposed median control chart is compared with that of the  $\bar{X}$ -chart, the former tends to be superior to the latter as the probability distribution of the process becomes more skewed. The average run length to detect the assignable cause is also compared when the process has a Normal or a Gamma distribution for which the properties of  $\bar{X}$  are easy to verify, the proposed chart is slightly worse

\* 生産管理技術士(工場管理), 亞洲大學校教授・學生處長・産業工學博士

than the  $\bar{X}$ -chart for the normally distributed product but much better for Gamma-distributed products. Average Run Lengths of the other distributions are also computed.

To use the proposed control chart, the probability distribution of the process should be known or estimated. If it is not possible, the results of comparison of the robustness force us to use the proposed median control chart based on a normal distribution. To estimate the distribution of the process, Sturge's formula is used to graph the histogram and the method of probability plotting,  $\chi^2$ -goodness of fit test and Kolmogorov-Smirnov test, are discussed with real case examples. A comparison of the proposed median chart and the  $\bar{X}$  chart was also performed with these examples and the median chart turned out to be superior to the  $\bar{X}$ -chart.

## 1. 序 論

일반적으로 計量値管理圖라고 하면 W.A. Shewhart의  $3\sigma$ 原則에 입각한  $\bar{X}-R$ ,  $X$ ,  $\bar{X}-R$  등의 傳統的인 管理圖를 말하는 바 이들은 모두 製品이 연속적으로 生産되는 工程이거나 또는 로트의 크기가 큰 公定에서 그 品質特性値의 分布가 正規分布이거나 그에 類似한 分布를 따른다고 간주될 때 使用되는 工程管理用 SQC의 代表的 技法이다.

위의 같은 관리도를 적용하기 위해서는 먼저 対象 製品의 正規性을 입증할 수 있어야만 소기의 目的을 달성할 수 있게 된다.

그러나 製品의 特性値가 非正規性을 나타내고 있는 경우에는 위의 관리도들은 몇가지 문제점을 보이게 된다.

먼저 비정규분포 製品을 전통적인 Shewhart 관리도로서 관리하게 되면 실제로는 製造工程에 異常이 없다 하더라도 管理圖상에는 管理限界 밖으로 打點이 되어 異常要因이 발생한 것처럼 誤報(false alarm)를 주는 경우가 많이 發生한다. 이는 특히 國內의 많은 製造企業(工場)에서 管理圖技法을 적용함에 있어 겪는 어려움이라고 보고되고 있어 SQC 技法의 效果를 감소시키는 結果를 초래하고 있다.

첫째로 非正規分布의 경우 正規分布보다는 後尾의 確率이 대부분 크게 되기 때문이다.

둘째로 전통적인 관리도중 특히 많이 사용되고 있는  $\bar{X}$  관리도 등을 비대칭성 분포에 적용하

면 標本들이 中心線 상한 또는 하한에 치우쳐서 타점되는 경향이 많다. 이는 비정규분포, 특히 비대칭분포에서는 표본평균  $\bar{X}$ 가 중심의 경향을 나타내는 가장 좋은 統計量이라고 볼 수 없기 때문에 발생된다고 판단된다. 이와 같은 문제점들을 해결하기 위하여 對數管理圖, 最頻數管理圖, Gram-Charlier 및 Pearsonian 管理圖 등 非正規分布用 管理圖들이 開發되었다.

그러나 대수관리도는 品質特性値를 對數變換하였을 때 正規性을 가져야 하므로 그 적용범위가 한정되어 있고 또한 모든 品質特性値를 대수 변환하여야 하는 번거로움이 있다.

한편 최빈수관리도는 비정규분포에서는 2개의 표준편차를 계산해야 하고 또 最頻數를 계산하는 과정이 복잡하며 그리고 관리한계의 폭이 넓어 관리도분석상 민감도가 떨어지는 短點이 있다. Gram-Charlier 관리도나 Pearsonian 관리도 등은 理論的이기 때문에 그 적용 및 실용화가 매우 복잡하다는 短點을 지니고 있다.

本研究에서는 이러한 점에 착안하여 비정규분포 特性을 갖는 工程을 효과적으로 管理할 수 있는 관리도를 개발하고자 한다. 公定의 品質特性値가 비정규분포를 따르는 것은 品質규격의 상한이나 하한 중 어느 하나만 주어져 있다든가 公定이 불안정할 때 또 公定의 특정부분에 중점적인 관리 및 檢사를 엄격하게 할 경우에 많이 나타나며 특히 有限母集團이라든가 無限母集團이라 하더라도 각 개체의 분포가 비대칭인 경우에 해당되는 바 國內에서는 産業與件이 多品種 小量生産, 단속적 生産체제를 유지해야 한다는

점과 中小企業의 제반 기술수준여건의 미비 등으로 말미암아 흔히 발견되고 있는 현상이다.

이와 같은 비정규분포공정을 관리하기 위해서는 정규분포의 경우와 달리 먼저 그 品質特性值의 分布를 정확하게 推定하고 그에 따른 관리도를 설계하여야 한다.

그러나 이러한 과정은 試料의 크기가 충분히 크지 않으면 그 正確성이 기대될 수 없는 바 이런 分布推定이 약간 잘못되더라도 효율적인 관리를 위해서는 품질특성치의 順序統計量에 의거한 관리도를 작성하여 분포에 무관한 適應性(robustness)이 있는 관리기법을 개발하여야 한다.

그러나 관리도는 그 적용대상이 주로 製造現場의 工程이 中心이므로 使用이 간편하고 계산 과정도 간단해야 한다. 본 연구에서는 순서통계량 중에서 中心性向을 잘 나타내고 사용하기 가장 간편한 標本의 中位數에 기초한 中位數 特殊管理圖의 模型을 開發하여 비정규분포공정을 효과적으로 관리할 수 있도록 하는 것이 그 目的이다.

본 연구는 소량생산, 단속생산 등으로 많이 發見되고 있는 非正規分布工程을 효과적으로 관리하기 위하여 전통적인  $3\sigma$  관리도 대신 적용하기 간편한 새로운 中位數특수관리도를 開發하고자 한다.

## 2. 研究方法

本研究의 方法은 非對稱分布下의 特殊管理圖適用에 關連하여 종래의 既開發된  $\bar{X}$  管理圖,  $\bar{X}-R$  管理圖, 對數管理圖, Gram-Charlier 管理圖 등의 現實適用에 있어서 그들의 制限된 條件下에서 이용되어야 하는 限界性和 非對稱分布形態에 따른 多樣한 고려가 없었던 點을 着眼하여 非對稱分布工程의 管理圖適用을 통한 製造工程管理를 위하여 品質特性值의 中心의 性向을 나타낼 수 있는 代表的인 記述的 測定值인 算述平均, 中位數, 最頻數들 중에서 사용하기 간편하고 비교적 분포에 무관하게 適應性이 있는 中位數(median)를 기초로 한 管理圖法을 考證한다.

여기서 現實的인 問題로 대두되는 計量值의

品質特性值管理를 위한 製造工程管理上 샘플링하는 試料의 크기가 적은 경우와 연속생산이 아닌 단속적 생산이거나 그 生産로트로부터 作成된 히스토그램(histogram)의 分布가 分명한 非對稱正規分布일 경우를 重點 着眼하여 이의 經濟的 適應性이 있는 特殊管理圖의 模型을 設計하고자 한 것이다.

특히 非對稱分布工程에서 計量值管理圖適用上 平均値選擇은 算述平均値( $\bar{X}$ )보다 中位數( $\tilde{X}$ )가 使用上의 容易性이 있고, 또 製造工程(母集團)의 대표적인 平均値의 性質을 규명하기 쉽고 確率論的으로도 中位數( $\tilde{X}$ )가 算述平均( $\bar{X}$ )보다 우월하다는 것이 컴퓨터 시뮬레이션(computer simulation)으로 立證이 되어 中位數 特殊管理圖의 模型을 設計하기로 하였다. 但, 現實的 適用의 便宜를 위하여 試料의 크기는 홀수인 경우만으로 制限하였고, 어떤 生産로트(母集團)에서 뽑은 確率標本의 累積確率分布函數(cumulative probability distribution function: c.d.f)를 求하여 이로부터 確率密度函數(probability density function: p.d.f)를 유도, 이들로부터 標本中位數의 모든 성질을 쉽게 규명할 수 있는 바 本研究에서는 Pearson 確率限界法을 導入하고, Shewhart 관리도에서 傳統的인  $\bar{X}$  管理圖의 管理限界 근거인 正規分布下에  $3\sigma$  밖으로 나갈 確率값으로 規定하여 管理限界(管理上限: UCL, 管理下限: LCL)를 兩側規格值(規格上限: SU, 規格下限: SL) 한쪽 規格值(SL 또는 SU 만 指定)가 주어질 경우로 區分하여 求하고, 中心線(CL)은 標本中位數( $\tilde{X}$ )를 中心線으로 하였다.

여기서 兩側規格值가 주어졌을 경우 確率  $P$ 는

$$P(\tilde{X} \geq UCL) + P(\tilde{X} \leq LCL) = 0.0027$$

이 되도록 設計하였다.

非正規分布들은 一般的으로 非對稱分布들이므로 上記式을 만족하는 UCL 과 LCL 값을 찾기가 매우 어려우므로 經濟的 方法으로

$$P(\tilde{X} \geq UCL) = P(\tilde{X} \leq LCL) = 0.00135$$

가 되도록 UCL 과 LCL 을 決定하였다.

한쪽 規格值가 주어질 경우의 UCL 과 LCL 을

$$P(\tilde{X} \leq LCL) = 0.0027$$

$$P(\bar{X} \geq ULC) = 0.0027$$

이 되도록 UCL과 LCL을 결정하였다.

이를 근거로 非正規分布들 중 代表的인 감마分布, 베타分布, 對數正規分布, 와이블分布, 파레토分布, 切斷正規分布 등에 대한 메디안特殊管理圖를 設計하고, 이들 각각에 대한 適應性을 檢討·分析하여  $\bar{X}$  管理圖와 비교하여 그 우월성을 立證하고 또 그 汎用性を 위하여 實證問題로서 本研究에서 模型設定한 메디안特殊管理圖의 事例研究로 그 效用性を 確認하였다.

### 3. 國內 管理圖法 適用現況과 問題點

#### 1) 管理圖法 適用現況

傳統的인 平均值와 範圍에 대한 관리도의特徵이라면 제조공정을 해석하기 위한 해석용 관리도에서는 그 공정 중에서 채취한 一群의 데이터를 집계하여 規格內에서 정규분포를 하여야 한다는 前提條件이 따른다.

이는 모집단의 분포가 정규분포가 아닌 경우라도 시료의 평균치에 대한 분포는 정규분포를 가정할 수 있으나, 유한모집단이며 限定된 條件下에서는 정규분포로 추정할 수 없는 경우에 문제점을 발견할 수 있다. 실제 우리나라 현 광공업계는 上記의 조건들을 충족시켜 주지 못하고 있는 실정이 많으며 이는 製造工程이 불안정하고, 계속적으로 가동되고 있지 않기 때문에 기인하는 경우가 대부분이다.

그 주요 원인으로서는 國內 광공업계의 生産管理上의 隘路事項을 조사·분석한 國內 광공업계의 기업경영 隘路要因 조사에서 기업규모에 大差없이 1973年度 이래로 '85年 現在까지 生産 관리부문이 연평균 28.8%로 가장 높았으며 매년 동일양상을 나타내어 왔고 최근 조사·분석된 자료에서도 示唆되었다.

#### 2) 管理圖法適用上의 問題點

1984年度中 國內 鑛工業界가 기업경영과정에서 겪었던 어려움은 생산관리부문이 29.4%로 가장 컸던 것으로 나타났으며, 그 주된 어려움은 生産施設 20.3%, 제조기술 19.7%, 원자재

확보곤란 19.2%, 기술인력 확보곤란 19.2% 등으로 비슷한 수준으로 높은 비중을 示唆하였다. 이는 사용설비의 노후화와 진부화 등으로 能力과 精密度의 不適當, 生産技術의 不足과 水準低位, 기술인력 확보의 곤란과 技能別·能力別로 전문화시키지 못하고 있으며 또한 원자재확보곤란으로 사용재료의 未標準化 등에서 상당한 原因들이 內在해 있음을 해석할 수 있다. 이상의 조사·분석의 결과는 생산관리면에서 제조공정의 不安定要因에 대한 經營的인 요소들을 分析했다.

한편 品質管理面에서는 「우리나라의 공업표준화와 品質管理에 대한 성과분석——月刊 品質管理(1968年 1月號, 韓國規格協會發行)」에서 특히 관리도적용상의 隘路事項을 조사한 결과 ① 「동일제조공정이 계속되지 않는다」가 30%, ② 「실제 조치가 곤란하다」가 25%, ③ 「품질관리자가 부족하다」가 23%, ④ 「경영자의 인식부족」이 7%, ⑤ 「기타」가 15%로 나타났다.

이상의 제원인에 대한 분포사항도 시간의 흐름과 경제구조에 영향은 가변적인 데이터이겠으나, 이는 단적으로 우리나라 광공업계는 오늘 현재도 제조공정이 상당히 不安定한 상태에서 가동되고 있음을 시사하여 준다.

그리고 상기 조사에 관련된 적용관리도의 종류는 다음과 같은 現況이며 특히 國內製造기업체에서는 KS表示許可制度 실시(1963年度)에 힘입어 品質管理를 위한 제조공정관리용으로 관리도법적용에 관심을 갖기 시작하여 1987年度 現在에 이르기까지 KS規格으로 7종의 관리도가 制定되어 있으며 또한 관리도가 SQC技法의 代表的인 技法 중의 한 가지로 꼽히고 있는데, 最近 國內 SQC技法適用업체 중 관리도법적용업체가 절대다수인 85.7%로 調査·分析되었다.

또한 國內 제조업체에서 適用하고 있는 관리도를 調査하고 이것들을 年度別로 정리한 結果는 다음 Table 3-1과 같으며 특히 年均値와 範圍의 관리도( $\bar{X}-R, X$ )가 적용관리도법 중 통산約 56% 이상을 適用하고 있다. 이 관리도(여기선  $\bar{X}-R$  관리도와  $X$  관리도)가 效果的으로 적용되려면 제조공정이 正規分布이거나 또는 正規分布로 推定될 때, 즉 均일한 상태로 유지될 때

Table 3-1. The Application Status of Control Chart in Korean Industry (單位：%)

관리도명 년 도	$\bar{X}-R$	P	X	$P_n$	C	U	특 수	무표시	비 고
1966	47	20	7	9.2	8	4.6	3	1.2	월간品質管理 '66.12月號
1967	44	19	17	9	7	4	0		" '68. 1月號
1969	37	15	10	4	3	1		20	" '70. 2月號
1974	35	24	20	9	5	2	0		標本調査 '74. 3(辛容伯)
1976	57.1	10	17.6	4.4	8.7	0.2	2		" '76.11
1982	38.1	14.6	21.2	2.5	1.8	9.2	4.5	大企業	亞洲大 논문집 제 5 집
	60.4	14.8	14.8	7.0	0.6	—	—	中小企業	'83. 3(辛容伯)
1984	2.5	31.8	13.6	2.3	9.1	0	2.3	15.9	'84, 85 공장새마을품질
1985	28.6	30.9	14.3	4.8	4.8	0	2.3	14.3	관리표준화대회, 분업조
1986	63.4	17.0	$\bar{X}-R$ 포 합	$P$ 포 합	10.2	C포합	2.2	21.0	월간工場管理 '86.11月號

비로소 참된 效果를 얻을 수 있는 것이므로 우리나라 광공업계의 현실적인 문제에서는 제조공정이 불안정한 편이 증가수이며 특히 규격상한 또는 규격하한만이 지정되어 있는 규격품질의 제품을 생산하기 위한 제조공정에서는 正規分布를 이루는 제조공정보다 非正規分布를 이루고 있는 공정이 해야 할 수 없이 많음을 실제 히스토그램을 그려보면 쉽게 알 수 있다.

#### 4. 非正規分布工程에서 計量値管理圖 適用의 改善方向과 模型設計

##### 1) 改善方向

非正規分布를 이루고 있는 제조공정을 표준형 管理圖로서는 그 적용의 정확성과 신속성을 기할 수 없으므로 올바른 제조공정 관리를 할 수 없게 된다. 이러한 문제점을 해소하기 위하여 正規分布가 아닌 제조공정에서 적용할 非正規分布 管理圖는 다음과 같은 條件에서 適用하여야 한다. 즉 시료평균의 分布는 비대칭 모집단에서의 分布보다 正規分布형태에 매우 가까울지라도 그 모집단은 때때로 정규분포형태부터 상당히 벗어나 있을 경우 정규모집단의 가정에 근거한 管理限界는 만족하지를 못한다. 이와 같은 문제점을 해결하기 위해서 과거에는 다음과 같은 세 가지의 해결책들이 제안되었다.

첫째, 試料의 크기를 增加시킨다.

둘째, 非對稱의인 管理限界를 설정한다. 즉 관리상한 또는 관리하한 한쪽에 나타나는 點들의

確率을 되도록 같게 設定한다.

셋째, 가능한 正規分布가 되도록 資料를 對數 또는 기타의 函數로 變數變換을 하여준다.

여기서 첫째방법은 이른바 中心極限定理에 기초를 둔 것인데 이 方法의 단점은 試料의 크기를 얼마나 크게 해야  $\bar{X}$ 의 正規性이 보장되며 또 어떤 비정규분포의 品質特性인가에 따라 달라지게 되어 그와 같은 보장이 매우 어렵고, 따라서 試料의 크기를 충분히 크게 해야 하므로 여러가지 면에서 非經濟的인 단점이 있다. 둘째 방법은 理論的으로는 간단하나,  $\bar{X}$ 의 경우는 그 分布函數가 몇몇 특수한 경우를 제외하고는 求할 수가 없어서 管理限界設定이 매우 어렵다는 단점을 가지고 있다. 또 셋째 방법은 앞에서도 살펴본 바와 같이 對數正規分布 등 特定分布에만 制限的으로 使用되어야 한다는 제약과 또 모든 자료는 變數變換하여야 한다는 번거로움에 그 단점이 있다. 이에 본 研究에서는 試料의 크기가 작을 때에도 좋은 性質을 나타내며, 그 分布의 特性을 규명하기 쉽고 해당 分布에 無關한 適應性이  $\bar{X}$ 보다 우수한 標本中位數를 기초로 한 中位數 特수관리도를 모형·개발하여 上記의 問題點들을 해결하고자 한다.

##### 2) 中位數特殊管理圖의 模型設計

어떤 母集團, 즉 製品모트에서 무작위로 뽑은  $n$ 개의 製品의 品質特性値를 각각  $X_1, \dots, X_n$ 이라 하고 이들로부터 求해진 順序統計量을  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ 이라 表示하였다(但,  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq$

..... $X_{(n)}$ ). 本研究에서는 理論 進개의 便宜上 표본의 크기  $n$ 을 홀수인 경우만 고려하기로 하고 즉  $n=2k+1$ 이라고 하며, 단,  $k$ 는 양의 정수이다. 이 경우 표본의 中位數(sample median:  $\bar{X}$ )는  $k+1$  번째 順序統計量인  $X_{(k+1)}$ 이 된다. 따라서 中位數 特殊管理圖의 設計는 順序統計量  $X_{(k+1)}$ 의 特性에 따라 左右된다.  $F(x)$ 를 어떤 製品品質 特性值  $X$ 의 누적분포함수(c.d.f),  $f(x)$ 를 확률 밀도함수(p.d.f)라고 하면 이 경우  $X_{(k+1)}$ 의 누적분포함수는  $P\{\bar{X} \leq x\} = \sum_{i=k+1}^n P\{i \text{ 개의 } X \leq x, n-i \text{ 개의 } X > x\} = \sum_{i=k+1}^n \binom{n}{i} (F(x))^i (1-F(x))^{n-i} \dots (4-1)$  이 되며 따라서 확률밀도함수는 다음 式(4-2)

$$f_{\bar{X}(x)} = \frac{(2k+1)!}{k!k!} (F(x))^i (1-F(x))^{n-i} f(x) \dots (4-2)$$

와 같음을 알 수 있다. 따라서 표본중위수  $\bar{X}$ 의 性質은 式(4-1) 및 (4-2)로부터 쉽게 규명할 수 있다.

本研究에서는 이 표본중위수를 이용하여 다음과 같이 管理圖를 設計하고자 한다. 표본중위수는 中心的 性向을 推定하는 統計量의 일종이므로 製造工程이 안정상태에서 불안정상태로 된 경우에는 표본중위수가 갑자기 큰 값을 갖거나 또는 작은 값을 갖게 된다. 따라서 이와 같은 현상이 발생되면 管理圖上에서 재빨리 검출되어야 하므로 管理圖에는 管理上限(UCL)과 管理下限(LCL)이 주어지거나 또는 規格值의 上限(SU)과 下限(SL)의 한쪽 規格만 指定된 경우에는 이들 중 하나의 管理限界가 주어지야 하며 中位數 特性值의 設計는 결국 이 管理限界(線)들과 中心線의 값을 어떻게 決定하느냐에 달려 있다.

本研究에서 管理限界 UCL과 LCL들은 兩側規格值(SL~SU)가 指定된 경우에는  $P(\bar{X} \geq UCL) + P(\bar{X} \leq LCL) = 0.0027 \dots (4-3)$  이 되도록 設計하였는데 여기서 0.0027은 전통적인  $\bar{X}$  管理圖가 正規分布인 경우  $3\sigma$  밖으로 나갈 확률값이다. 그러나 非正規分布들은 一般적으로 비대칭분포들이므로 (4-3)式을 만족하는 UCL과 LCL 값을 찾기는 매우 어려우므로 等側檢推定에서 흔히 適用되는 方法으로

$$P(\bar{X} \geq UCL) = P(\bar{X} \leq LCL) = 0.00135$$

가 되도록 UCL과 LCL을 決定하였다.

따라서 (4-1)式으로부터 UCL과 LCL은

$$P(\bar{X} \geq UCL) = 1 - P(\bar{X} \leq UCL) \\ = 1 - \sum_{i=k+1}^n \binom{n}{i} (F(UCL))^i X \\ (1-F(UCL))^{n-i} = 0.00135 \dots (4-4)$$

$$P(\bar{X} \leq LCL) = \sum_{i=k+1}^n \binom{n}{i} (F(LCL))^i X \\ (1-F(LCL))^{n-i} \\ = 0.00135 \dots (4-5)$$

이 된다.

式(4-4)과 (4-5)를 만족하는 UCL과 LCL의 값은 二分法(bisection method) 등과 같은 간단한 數值解析的인 方法으로 쉽게 求할 수 있다. 또 管理圖의 中心線은 표본중위수가 母中位數(population median)의 좋은 推定值이므로 本研究에서도 표본중위수를 中心線으로 하였다. 品質特性值의 下限이나 上限 하나만 주어져 있는 한쪽 規格值(SL 또는 SU)만 指定된 경우

$$\text{管理下限: } P(\bar{X} \leq LCL) = 0.0027 \dots (4-6)$$

$$\text{管理上限: } P(\bar{X} \geq UCL) = 0.0027 \dots (4-7)$$

로 決定하면 된다.

따라서 어떤 品質特性值의 分布函數를 알 수 있으면 上記 式(4-3, 4-4) 및 (4-6, 4-7)로부터 中位數 特性值의 管理限界를 設計할 수 있다.

## 5. 事例研究——음료용空罐製品 End Unit 加工工程의 事例分析

<Table 5-1>은 D製罐會社의 음료용空罐製品의 完成 End Unit Depth의 品質特性치를 實測한 資料이다. 이 資料에 의거 히스토그램을 作成하면 <Fig. 5-1>과 같다.

본 연구에서 히스토그램<Fig. 5-1>로 볼 때 品質特性치는 베타分布를 따른다고 추정하였다. 이를 Kolmogorov-Smirnov 檢定을 통해 알아 보기 위하여 먼저 각母數들의 값을 추정하여 보면  $\hat{a}=0.246$ ,  $\hat{b}=0.286$ ,  $\hat{\alpha}=3.6$ ,  $\hat{\beta}=2.2$ 임을 알 수 있다. 여기서  $\hat{a}$ 는 이 品質特性치 規格의 下

Table 5-1.

Data for  $\bar{X}$  and  $\bar{X}$ -Chart of Empty Can

제품명칭	음료용空罐		기간	1986. 5. 22
품질특성	완성 End Unit Depth			5. 31
측정단위	Inch		작업장	
규격한계	최대	0. 254	시료크기	n=5
	최소	0. 246		

일시	시료번호	측정치					계 $\Sigma X$	평균치 $\bar{X}$	범위 R	
		$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$				
	1	(0. 252)	0. 255	0. 251	0. 254	0. 250	1. 262	0. 252	0. 005	
	2	(0. 253)	0. 255	0. 252	0. 253	0. 251	1. 264	0. 253	0. 004	
	3	0. 255	0. 254	0. 252	(0. 253)	0. 252	1. 266	0. 253	0. 003	
	4	0. 252	0. 252	0. 254	0. 254	(0. 253)	1. 265	0. 253	0. 002	
	5	0. 251	(0. 251)	0. 248	0. 247	0. 252	1. 249	0. 250	0. 005	
	6	0. 252	0. 255	(0. 252)	0. 255	0. 252	1. 266	0. 253	0. 003	
	7	0. 253	0. 252	(0. 252)	0. 250	0. 254	1. 261	0. 252	0. 004	
	8	0. 248	0. 249	(0. 250)	0. 253	0. 254	1. 254	0. 251	0. 006	
	9	0. 254	(0. 254)	0. 252	0. 252	0. 254	1. 266	0. 253	0. 002	
	10	0. 249	(0. 253)	0. 251	0. 255	0. 253	1. 261	0. 252	0. 006	
	11	0. 254	0. 254	0. 251	0. 250	(0. 252)	1. 261	0. 252	0. 004	
	12	0. 247	0. 250	(0. 250)	0. 251	0. 251	1. 249	0. 250	0. 004	
	13	0. 254	0. 253	0. 249	0. 248	(0. 250)	1. 254	0. 251	0. 006	
	14	0. 252	0. 255	(0. 253)	0. 253	0. 251	1. 264	0. 253	0. 004	
	15	0. 254	(0. 253)	0. 252	0. 252	0. 253	1. 264	0. 253	0. 002	
	16	0. 248	0. 250	(0. 251)	0. 253	0. 253	1. 255	0. 251	0. 005	
	17	0. 254	(0. 252)	0. 252	0. 251	0. 253	1. 262	0. 252	0. 003	
	18	0. 251	0. 252	0. 254	0. 254	(0. 253)	1. 264	0. 253	0. 003	
	19	0. 255	(0. 254)	0. 254	0. 253	0. 253	1. 269	0. 254	0. 002	
	20	0. 252	(0. 253)	0. 254	0. 254	0. 252	1. 265	0. 253	0. 002	
	21	0. 254	0. 253	0. 251	0. 251	(0. 252)	1. 261	0. 252	0. 004	
$\bar{X}$ 판리도		메디안특수판리도					계	5. 296	0. 079	
UCL = $\bar{X} + A_2\bar{R} = 0. 2542$		$\Sigma \bar{X} = 5. 296$					$\bar{X} = 0. 252, R = 0. 0038$			
LCL = $\bar{X} - A_2\bar{R} = 0. 2498$		$\bar{X} = 0. 252$					$\frac{n}{4}$	$\frac{A_2}{0. 73}$	$\frac{D_4}{2. 28}$	$\frac{D_5}{-}$
							5	0. 58	2. 11	-

註: ( )內는 中位數임.

限을 나타내며,  $\hat{\delta}$ 는 規格의 上限이 0. 254 이나, 그 특성치의 값이 0. 255 인 제품이 여러번 나타나므로  $\hat{\delta}$ 를 0. 256 으로 정하였다. 또  $\hat{\alpha}$ 와  $\hat{\beta}$ 는 각각 적률추정치들서 다음의 관계式

$$\bar{X} = \hat{\alpha} + (\hat{\delta} - \hat{\alpha}) \frac{\hat{\alpha}}{(\hat{\alpha} + \hat{\beta})}$$

$$S^2 = (\hat{\delta} - \hat{\alpha})^2 \frac{\hat{\alpha}\hat{\beta}}{(\hat{\alpha} + \hat{\beta})^2(\hat{\alpha} + \hat{\beta} + 1)}$$

를 만족하는 解들이다. 여기서  $\bar{X}$ 는 표본평균,  $S^2$ 는 표본분산을 나타낸다. 이 제품의 특성치가 위와 같은 값의 母數를 갖는 베타분포를 따르는 가를 알아보기 위하여 Kolmogorov-Smirnov檢定을 다음과 같이 실시하였다. 먼저 Kolmogorov-Smirnov檢定을 하기 위해서는 理論分布의 누적 확률과 표본누적분포함수와의 최대편차를 계산

級 限 界	中 央 値	度 數	Histogram
0.247 ~ 0.248	0.2475	6	
0.248 ~ 0.249	0.2485	3	
0.249 ~ 0.250	0.2495	8	
0.250 ~ 0.251	0.2505	14	
0.251 ~ 0.252	0.2515	23	
0.252 ~ 0.253	0.2525	22	
0.253 ~ 0.254	0.2535	21	
0.254 ~ 0.255	0.2545	8	
合 計		105	5 10 15 20 25 30

Fig. 5-1. Histogram of Table 5-1.

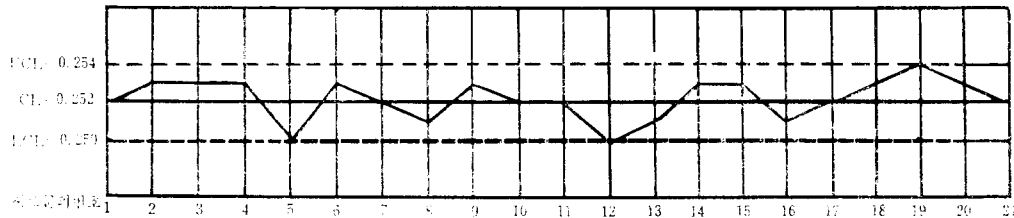


Fig. 5-2.  $\bar{X}$ -Chart for Normal Distribution of Table 5-1.

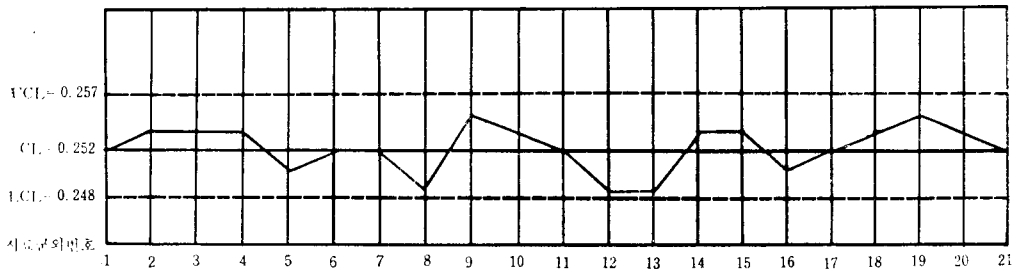


Fig. 5-3. Median Control Chart for Normal Distribution of Table 5-1.

해야 한다. 그런데 이와 같은 최대편차는 반드시 표본누적분포함수의 불연속점, 즉 비약점에 서 나타나게 되는 바 다음 <Table 5-2>는 그 값

Table 5-2. Deviations of Quality Characteristics.

X	S(x)	$F_0(x)$	$ S(x) - F_0(x) $
0.248	0.05769	0.01687	0.04082
0.249	0.08654	0.05543	0.03111
0.250	0.16346	0.13690	0.02656
0.251	0.29808	0.26420	0.03388
0.252	0.51923	0.43390	0.08533
0.253	0.72115	0.62690	0.09425
0.254	0.92308	0.81190	0.11118
0.255	1	0.94860	0.05140

들을 나타낸 것이다.

<Table 5-2>로부터  $D_n = \max |S(x) - F_0(x)|$ 는 0.254에서 0.11118인 바, 이 값과 Kolmogorov-Smirnov Table에서  $n=104$ ,  $\alpha=0.05$ 에 해당하는 값  $D_n(0.05)$ 를 비교해 보면  $D_n=0.11118 < 0.133359$ 이므로 위의 자료는 베타분포를 따르는 假定이 채택된다.

이제 이 제품의 관리상태를 파악하기 위하여 관리도를 作成, 比較·分析해 보면 다음 <Fig. 5-2>처럼 品質特性値의 分布를 正規分布로 假定하여  $\bar{X}$  管理圖를 作成하면 管理限界를 벗어나는 點이 3點으로 나타나 工程異常을 豫報하여 주고 있지만 實際의 工程에 異常이 없었으며, 또



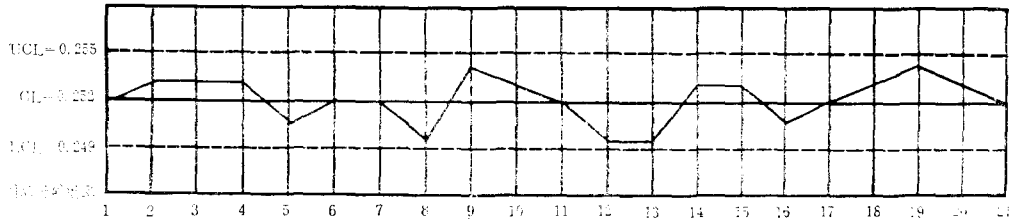


Fig. 5-4. Median Control Chart for Beta Distribution of Table 5-1.

한 規格值의 범위(0.254"~0.256")內에 있어 별 다른 問題點이 없음에도 불구하고 誤報(false alarm)를 하고 있다.

여기서 正規分布의 假定下에 메디안特殊管理圖는 <Fig. 5-3>과 같으며, 前述한 바와 같이 베타分布下에서 메디안特殊管理圖는 <Fig. 5-4>와 같이 그 適用의 優秀性이 立證된다.

## 6. 結 論

本研究에서는 品質特殊性值가 計量值이고 그 分布가 非對稱正規分布인 工程을 管理하기 위하

여 試料의 크기가 적은(3 또는 5개) 경우에 標本中位數를 基礎로 한 메디안特殊管理圖의 模型을 開發하였다. 非對稱正規分布의 工程은 特히 生産로트의 크기가 작거나 단속적인 生産을 할 수 밖에 없는 國內 여러 企業의 製品에서 흔히 發見될 수 있는 바 이와 같은 分布에서는 標本の 平均보다 標本中位數가 模型開發에 必要한 假定에 훨씬 影響을 덜 받는다는 것은 잘 알려진 事實이다. 本研究에서는 이와 같은 點을 利用하여 非對稱正規分布中에서 使用하기 쉽고 널리 알려진 감마分布, 베타分布, 對數正規分布, 와이불分布, 파레토分布, 左右切斷正規分布 등

Table 6-1. Equation of Control Limits for Non-Normal Distributions.

分布의 種類	中心線(CL)	管理上限(UCL)	管理下限(LCL)
1. 감마 分布	$\hat{\beta}CL_G + \hat{\delta}$	$\hat{\beta}UCL_G + \hat{\delta}$	$\hat{\beta}LCL_G + \hat{\delta}$
2. 베타 分布	$\hat{a} + (\hat{b} - \hat{a})CL_B$	$\hat{a} + (\hat{b} - \hat{a})UCL_B$	$\hat{a} + (\hat{b} - \hat{a})LCL_B$
3. 正規 分布	$\bar{X}$	$\bar{X} + UCL_{NA_2}\bar{R}$	$\bar{X} + LCL_{NA_2}\bar{R}$
4. 對數 正規 分布	$\exp(\bar{x})$	$\exp(\bar{x} + UCL_{NA_2}\bar{R})$	$\exp(\bar{x} + LCL_{NA_2}\bar{R})$
5. 와이불 分布	$\hat{\delta} + \left(\frac{CL_W}{\hat{\alpha}}\right)^{1/\hat{\beta}}$	$\hat{\delta} + \left(\frac{UCL_W}{\hat{\alpha}}\right)^{1/\hat{\beta}}$	$\hat{\delta} + \left(\frac{LCL_W}{\hat{\alpha} - \hat{\alpha}}\right)^{1/\hat{\beta}}$
6. 파레토 分布	$k \exp(CL_F/\hat{a})$	$k \exp(UCL_F/\hat{a})$	$k \exp(LCL_F/\hat{a})$
7. 切斷 正規 分布			
① 左 側	$\hat{\mu} + CL_{LT}\hat{\sigma}$	$\hat{\mu} + UCL_{LT}\hat{\sigma}$	$\hat{\mu} + LCL_{LT}\hat{\sigma}$
② 右 側	$\hat{\mu} + CL_{RT}\hat{\sigma}$	$\hat{\mu} + UCL_{RT}\hat{\sigma}$	$\hat{\mu} + LCL_{RT}\hat{\sigma}$
③ 兩 側	$\hat{\mu}$	$\hat{\mu} + UCL_{DT}\hat{\sigma}$	$\hat{\mu} + LCL_{DT}\hat{\sigma}$

**Table 1.** Values of Control Limits for Gamma Distribution(Doubly Specification Assignment)

$\alpha$	LCL <sub>G</sub>		CL <sub>G</sub>	CL <sub>G</sub> U	
	n=3	n=5		n=3	n=5
1.0	0.0199	0.0511	0.6931	3.9267	2.9981
1.5	0.0914	0.1756	1.1829	4.9347	3.9100
2.0	0.2130	0.3543	1.6783	5.8510	4.7467
2.5	0.3734	0.5720	2.1757	6.7122	5.5383
3.0	0.5639	0.8168	2.6740	7.5356	6.2990
3.5	0.7782	1.0827	3.1729	8.3310	7.0370
4.0	1.0116	1.3652	3.6720	9.1047	7.7572
4.5	1.2603	1.6613	4.1714	9.8608	8.4632
5.0	1.5236	1.9687	4.6709	10.6024	9.1573
5.5	1.7977	2.2859	5.1704	11.3317	9.8415
6.0	2.0820	2.6113	5.6701	12.0502	10.5171
6.5	2.3750	2.9442	6.1698	12.7597	11.1853
7.0	2.6758	3.2847	6.6696	13.4609	11.8467
7.5	2.9836	3.6285	7.1694	14.1547	12.5023
8.0	3.2977	3.9787	7.6629	14.8422	13.1527
8.5	3.6176	4.3337	8.1690	15.5236	13.7981
9.0	3.9428	4.6929	8.6689	16.1997	14.4394
9.5	4.2727	5.0561	9.1688	16.8708	15.0766
10.0	4.6070	5.4229	9.6687	17.5374	15.7102
10.5	4.9455	5.7931	10.1686	18.1998	16.3403

**Table 2.** Values of Control Limits for Gamma Distribution(Single Specification Assignment)

$\alpha$	LCL <sub>G</sub>		CL <sub>G</sub>	UCL <sub>G</sub>	
	n=3	n=5		n=3	n=5
1.0	0.0283	0.0653	0.6931	3.5773	2.7601
1.5	0.1166	0.2084	1.1829	4.5515	3.6436
2.0	0.2573	0.4064	1.6783	5.4398	4.4570
2.5	0.4371	0.6412	2.1757	6.2764	5.2282
3.0	0.6464	0.9025	2.6740	7.0775	5.9707
3.5	0.8786	1.1839	3.1729	7.8526	6.6920
4.0	1.1291	1.4810	3.6720	8.6073	7.3968
4.5	1.3948	1.7909	4.1714	9.3455	8.0882
5.0	1.6733	2.1116	4.6709	10.0703	8.7687
5.5	1.9626	2.4413	5.1704	10.7835	9.4399
6.0	2.2614	2.7789	5.6701	11.4868	10.1031
6.5	2.5685	3.1232	6.1698	12.1815	10.7592
7.0	2.8829	3.4737	6.6696	12.8685	11.4093
7.5	3.2040	3.8296	7.1694	13.5488	12.0539
8.0	3.5309	4.1903	7.6692	14.2230	12.6936
8.5	3.8632	4.5554	8.1690	14.8916	13.3287
9.0	4.2005	4.9246	8.6689	15.5552	13.9599
9.5	4.5422	5.2974	9.1688	16.2143	14.5874
10.0	4.8881	5.6736	9.6687	16.8691	15.2114
10.5	5.2378	6.0529	10.1686	17.5200	15.8323

에서 管理限界 밖으로 벗어난 確率이 0.0027 이 되도록 메디안 特殊管理圖를 設計한 것이다.

<Table 6-1>은 本 研究에서 模型設計한 메디안 特殊管理圖의 中心線 및 管理限界를 나타낸 公式들이다.

本 研究에서는 위와 같은 形態의 中心線과 管理限界를 갖는 메디안 特殊管理圖의 現實適用을 위하여 각 設計變數(design parameter)들에 대한 數值表(上記 Table 1, 2, 其他 分布의 경우 省略)를 計算하였다.

이와 같이 設計된 메디안 特殊管理圖의 性質을 糾明하기 위하여 먼저  $\bar{X}$  管理圖에 대한 適應性을 따르다는 假定下에 設計된 傳統의  $\bar{X}$  관리

도와 本 研究의 메디안 特殊管理圖에서 工程分布가 正規分布가 아닌 非對稱分布로 變化하였을 경우에 1,000 번의 試料를 取해 管理限界線을 벗어난 回數를 分析한 結果,  $\bar{X}$  管理圖는 分布의 變化에 따라 그 形態가 많이 變하는 反面 메디안 特殊管理圖는 假定分布에 많은 影響을 받지 않는 適應性이 있음을 컴퓨터·시뮬레이션으로 立證하였다. 따라서 工程의 分布가 正規分布라는 假定이 確實하지 않는 경우에는  $\bar{X}$  관리도 보다 本 研究에서 模型開發한 메디안 特殊管理圖를 使用하는 것이 훨씬 바람직하다는 것을 實證하였다.

**REFERENCES**

1. Arolan, L.A., and Levene, H., (1950) "The Effectiveness of Quality Control Charts," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 45, No. 252, pp.520~529.
2. Burr, I.W., (1967) "The Effect of Non-Normality on Constants for  $\bar{X}$  and R Charts," *Industrial Quality Control*, Vol. 23, No. 11, pp.563~569.
3. Bisgaard, S., Hunter W.G. and pallesen, L.,

- (1981) "Economic Selection of Quality of Manufactured Product," *Technometrics*, Vol. 26, No. 1, pp. 9~18.
4. Chung-How, Y., and Hillier, F.S., (1970) "Mean and Variance Control Chart Limits Based on a Small Number of Subgroups," *Journal of quality Technology*, Vol. 2, No. 1, pp. 9~16.
  5. Chiu, W.K. and Wetherill, G.B., (1974), "A Simplified Scheme for the Economic Design of  $\bar{X}$ -Charts," *Journal of Quality Technology*, Vol. 6, No. 2, pp. 63~69.
  6. Denisoff, B.A., (1980) "Process Control Management," *Quality Progress*, Vol. 13, No. 6, pp. 14~16.
  7. Ferrell, E.B. (1964) "A Median, Midrange Chart Using Run-Size Subgroups," *Industrial Quality Control*, Vol. 20, No. 10, pp. 1~4.
  8. Gibra, I.N. (1971), "Economically Optimal Determination of the Parameters of an  $\bar{X}$ -Control Chart," *Management Science*, Vol. 17, No. 9, pp. 635~646.
  9. Hillier, F.S., (1964), " $\bar{X}$ -Chart Control Limits Based on A Small Number of Subgroups," *Industrial Quality Control*, pp. 24~29.
  10. Johnson, N.L., (1966) "Cumulative Sum Control Charts and the Weibull Distribution," *Technometrics*, Vol. 8, No. 3, pp. 481~481.
  11. Lloyed S. Nelson, (1984) "The Shewhart Control Chart test for Special Causes," *Journal of Quality Technology*, October
  12. Moore, P.G. (1957), "Non-Normality in Quality Control Charts," *Applied Statistics*, Vol. 6.
  13. Nelson, P.R. (1979), "Control Charts for Weibull Processes with Standards given," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 28, pp. 283~288.
  14. Schilling E.G. and Nelson, P.R. (1976), "The Effect of Non-Normality on the Control Limits of Xbar charts," *Journal of Quality Technology*, Vol. 8, pp. 183~188.
  15. Shahani, A.K. (1971), "A Control Chart Based on Sample Median," *Quality Engineer*, Vol. 35, pp. 7~9.
  16. 日本規格協會, 品質管理便覽, 1966, pp. 157~159.
  17. 大韓商工會議所, 企業經營隘路要因調查報告(1984. 4~1985. 4)
  18. 黃義徹, 最新品質管理, 博英社, 1980, pp. 305~373.
  19. 辛容伯, 中小企業을 위한 效果的인 TQC 適用方案에 관한 研究, 安養商工會議所, 安養地域經濟研究中心, 1985, p. 15, pp. 89~94.
  20. 辛容伯·黃義徹, 非對稱와이분分布工程에서 메디안特殊管理圖의 設計, 品質管理學會誌, Vol. 14, No. 2, 1986, pp. 2~8.