

應急修理가 가능한 段階別 事後保證製品の 最適交替正策

Optimal Replacement Policy for a Stepdown Warrantied System with Minimal Repair

*金 原 中

**李 根 熙

Abstract

An age replacement policy is considered for a system under a stepdown warranty. It is assumed that only minimal repairs are performed for failures occurred before age T. A unique optimal value of T which minimizes the expected cost rate is obtained. The cases of the free replacement warranty, prorata warranty and hybrid warranty are also considered and some numerical examples are given.

1. 序 論

事後保證은 供給業者가 販賣된 製品에 대하여 一定한 期間동안 發生하는 故障에 대하여 責任을 진다는 消費者와의 일종의 契約으로 消費者의 구매의욕을 북돋울 수 있는 중요한 經營政策의 하나이다. 왜냐하면 消費者는 비슷한 機能·性能의 製品이라면 向後 發生할 수 있는 不確實한 故障에 대하여 事後處理에 대한 부담이 적은 製品을 선호하고, 그러한 供給業者를 신뢰할 것이기 때문이다. 따라서 消費者는 가급적 事後保證期間도 길고 故障이 發生하였을 경우 製品의 修理나 交替에 필요한 費用의 부담비율도 적은 製品을 선호하게 된다.

그러나 供給業者편에서는 保證期間을 무한정 길게 책정하여 그 期間內에서의 供給業者의 비

용 부담비율을 크게 하게 되면 向後의 企業의 利益計劃이나 投資計劃에 막대한 지장을 초래하게 되며, 이는 결국 製品의 價格을 인상하는 결과가 되어 製品販賣量의 감소를 초래하게 될 것이다.

事後保證制度에 대한 過去의 研究들은 Nguyen과 Murthy(1984)의 研究와 같이 대부분 이러한 점에 착안하여 供給業者의 立場에서 事後保證에 필요한 費用을 分析하고 이를 토대로 適切한 事後保證期間과 供給業者의 비용부담비율또는 製品의 價格을 決定하고자 하는 것들이었다.

한편 消費者의 立場에서 事後保證制度에 대한 또 다른 관심은 事後保證이 되어 있는 製品을 어떻게 效率의으로 運用할 것인가 하는데 있다고 볼 수 있다. 특히 過去의 整備·交替政策에 대한 研究들에서는 修理나 交替에 필요한 모

* 亞洲大學校 工科學 産業工學科

** 漢陽大學校 工科學 産業工學科

든 費用을 전부 消費者 즉 使用者가 부담하는 것을 전제로 개발되었으나 事後保證이 되어 있을 경우는 供給業者도 保證期間内에서는 그 費用의 일부를 부담하게 되므로 整備나 交替政策은 달라질 수 밖에 없게 된다. 이러한 점에 착안하여 Park (1985)은 應急修理(minimal repair)가 可能하고 無料保證이 되어 있는 製品에 대한 最適交替政策을 研究하였으며, Ritchken과 Fuh (1986)은 修理不可能한 경우를 다루었다. 여기서 應急修理라 함은 컴퓨터와 같은 복잡한 시스템에서의 부분적인 故障에 대한 修理와 같이 故障率函數를 변화시키지 않는 修理를 말한다.

本 研究에서는 Kim과 Yi(1987)가 提案한 段階別事後保證이 되어 있는 製品에 대한 交替政策을 다루고자 한다.

段階別事後保證制度는 그동안 많은 研究가 있어왔고 널리 쓰여졌던 無料保證政策(free replacement warranty), 比率保證政策(prorata warranty), 이 두 政策을 組合한 混合保證政策(hybrid warranty policy) 등을 일반화시킨 政策인데 本 研究에서는 이를 消費者의 立場에서 應急處理가 可能한 경우 最適壽命交替政策(age replacement policy)을 구하고자 한다.

2. 記號 및 假定

記號

$r(t)$: 故障率函數

$R(t)$: 累積故障率函數

$R^{-1}(t)$: $R(t)$ 의 逆函數

X : 故障發生期間

X_i : i 번째 故障發生時間, $i = 1, 2, \dots$

$N(t)$: t 時間까지의 故障數

S_i : $R(X_i)$

W : 保證期間

W_1, W_2, \dots, W_n : 保證時間 內隔

T : 交替週期

T^* : T 의 最適值

P : 新製品交替費用

C : 應急修理費用($C < P$)

C_1, C_2, \dots, C_n : 保證期間內的 供給者(負擔) 修理費用($C = C_1 > C_2 > \dots > C_n$)

$C(X)$: X 時刻에 發生한 故障에 대한 消費者의 修理費用

$A(T)$: $[0, T]$ 사이에 消費者의 期待修理費用

$B(T)$: 單位時間當 期待費用

假定

1. 故障率函數 $r(t)$ 는 증가고장율(increasing failure rate)이다.
2. 應急修理는 故障率을 변화시키지 않으며 그 時間을 무시할 수 있다.
3. 모든 故障에 대하여는 應急修理를 實施한다.
4. 保證契約은 新製品으로 交替하였을 때에만 갱신되며, 應急修理를 한 경우에는 인정되지 아니한다.
5. 製品의 交替는 동일한 故障率函數를 갖는 新製品으로 이루어진다.

III. 段階別 保證政策

段階別 保證政策은 $[0, W]$ 에서 發生하는 故障에 대하여 다음과 같이 供給者가 費用을 負擔하는 政策이다. 이 政策에서는 保證期間 $[0, W]$ 를 n 개의 간격 $[0, W_1], [W_1, W_2], \dots, [W_{n-1}, W_n]$ 으로 나누어, $[W_{i-1}, W_i], 1 \leq i \leq n$, 사이에서 製品에 故障이 發生하면 供給者는 그 修理(혹은 交替)에 필요한 費用중 C_i 만큼은 負擔하는 政策이다. 단, 여기서 $W_0 = 0, W_n = W$ 이며 $C = C_1 > C_2 > \dots > C_n$ 이다. 즉 段階別 保證政策은 그림 1과 같이 供給者의 費用負擔을 감소시키는 政策이다.

여기서 만일 $n = 1$ 이라고 하면 段階別 保證政策은 無料保證政策과 동일하고, 또 W 가 固定된 상태에서 n 을 크게하여 $W_i - W_{i-1} \rightarrow 0$ 로 하면 段階別 保證政策은 比率保證政策과 같기 된다. 또 W_1 과 W 를 고정시키고, $W_i - W_{i-1}$ 을 $i \geq 2$ 인 경우에 0에 근접시키면 段階別 保證政策은 混合保證政策이 된다. 따라서 段階別 保證

정책은 無料保證政策, 比率保證政策, 混合保證政策을 모두 포함하는 가장 일반적인 保證政策이라고 볼 수 있다.

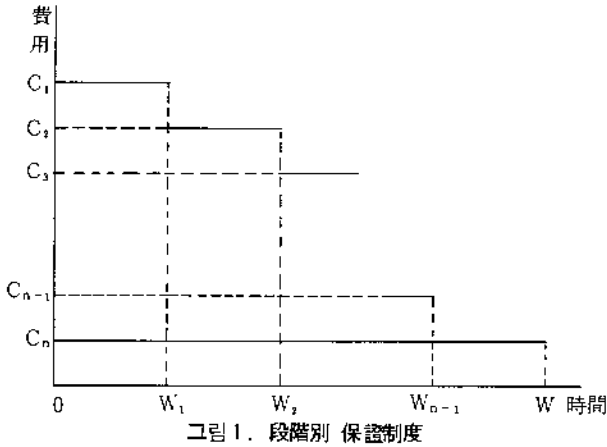


그림 1. 段階別 保證制度

IV. 最適交替政策

段階別 事後保證이 되어 있는 시스템에 대하여 消費者가 다음과 같은 壽命交替政策을 利用하고 있다고 假定하자.

交替政策: 시스템의 수명이 T에 이르게 되면 시스템을 교체하고 T까지 발생하는 모든 故障에 대하여는 應急修理를 實施한다.

本 研究에서는 段階別 事後保證이 되어 있는 경우 修理 및 交替에 필요한 費用을 最小化 할 수 있는 T의 값을 구하고자 한다.

$C(X)$ 를 시스템이 시간X에서 故障이 났을 때 그 修理를 위하여 消費者가 負擔하여야 하는 費用이라고 하면, 그림 1로 부터

$$C(X) = \begin{cases} C - C_i, & W_{i-1} < X \leq W_i, \quad i = 1, \dots, n \\ C, & X > W_n \end{cases} \quad \dots\dots\dots(1)$$

이 된다.

이제 最適T의 값을 구하기 위해서는 시스템의 交替期間 T사이에서 發生하는 故障들로 인한 期待費用을 구해야 하는데, 이를 위하여는 다음과 같은 보조정리들이 필요하게 된다. 보조정리 1은 應急修理模型의 故障率函數의 불변성으로 인한 것으로 Barlow와 Proschan(1965)에서 그 증명을 찾을 수 있다.

보조정리 1. $R(t)$ 를 시스템의 累積故障率函數라고 하면, 時間t까지 發生하는 故障의 數는 다음과 같은 비정상포아송 과정에 따른다.

$$P\{N(t) = k\} = \frac{R(t)^k e^{-R(t)}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

보조정리 1로 부터 다음과 같은 보조정리가 성립함을 쉽게 알 수 있는데, 증명은 Parzen (1962)에서 찾을 수 있다.

보조정리 2. X_i 를 i번째 故障이 發生하는 時刻이라고 하고, $S_i = R(X_i)$ 라고 하자. 그러면 $\{N(t) = K\}$ 라는 조건하에 확률변수벡터 (S_1, S_2, \dots, S_k) 는 균등분포 $U(0, R(t))$ 에서 추출된 확률표본의 순서통계량과 같은 分布를 따른다.

보조정리 1과 2로 부터 保證期間内の 故障에 대한 消費者의 期待負擔費用을 다음과 같이 구할 수 있다.

定理 1. 段階別 事後保證이 되어 있는 시스템을 保證期間 $[0, T]$ 사이에서 發生하는 故障에 대하여 應急處理를 實施하면 $[0, T]$ 사이의 消費者의 期待負擔費用은 다음과 같다.

$$A(T) = \int_0^T C(t) r(t) dt \quad \dots\dots\dots(2)$$

證明. $A(T) = \sum_k \sum_{i=1}^k E\{C(X_i) \mid N(T) = k\} P\{N(T) = k\}$

$$= \sum_k \sum_{i=1}^k E\{C(R^{-1}(S_i)) \mid N(T) = k\} P\{N(T) = k\}$$

$$= \sum_k \frac{k}{R(T)} \int_0^{R(T)} (C(R^{-1}(t)) dt \frac{R(T)^k e^{-R(T)}}{k!})$$

$$= \int_0^{R(T)} C(R^{-1}(t)) dt$$

$$= \int_0^T C(t) r(t) dt$$

따라서 이 시스템을 운용하는데 필요한 單位時間當 期待費用은 다음과 같이 구해진다.

定理 2. 段階別 事後保證이 되어 있는 시스템을 운용하는데 필요한 單位時間當 期待費用은 다음과 같다.

$$B(T) = \frac{P + \int_0^T C(t)r(t)dt}{T} \dots\dots\dots(3)$$

證明. 이 시스템은 T마다 교체되므로 재생과정이론(Ross(1970))으로 부터

$$B(T) = \frac{\text{주기당 기대비용}}{\text{기대주기}} \dots\dots\dots(4)$$

임을 알 수 있다. 그런데 기대주기의 길이는 T이고, 주기당 기대비용은 新製品交替費用의 합이므로 (4)식으로 부터 (3)식을 얻을 수 있다.(3)식은 시스템을 운용하는데 필요한 期待費用이다. 따라서 T의 最適값은 (3)식을 이용하여 구할 수 있다.

定理 3. 段階別 事後保證이 되어 있는 시스템의 最適交替週期 T*는 다음 방정식을 만족하는 유일한 근이다.

$$C(T)r(T)T - \int_0^T C(t)r(t)dt = P \dots\dots\dots(5)$$

만일 (5)식을 만족하는 근이 存在하지 않는 경우에는 T* = ∞, 즉 交替를 하지 않는 것이 最適이다.

證明. (3)식으로 부터

$$\frac{dB(T)}{dT} = \frac{Q(T)}{T^2} = \frac{C(T)r(T)T - (P + \int_0^T c(t)r(t)dt)}{T^2}$$

임을 알 수 있다. 그런데

$$\frac{dQ(T)}{dT} = C'(T)r(T)T + C(T)r'(T)T \geq 0$$

이고, Q(0) = -P < 0 이므로, $\frac{dB(T)}{dT} = 0$ 을

만족하는 근은 존재하면 유일하다. 만일 이 근이 존재하지 않으면 T* = ∞임을 알 수 있다.

定理 3 으로 부터 最適交替週期 T*는 (5)식을 만족하는 유일한 근이던가 아니면 T* = ∞ 임을 알 수 있다. 만일 시스템의 故障分布가 와이블分布로서

$$R(t) = (\lambda t)^\beta, \lambda > 0, \beta \geq 1$$

인 경우에는 最適交替週期 T*는 다음 식을 만족하는 근이다.

$$(C - C_{k+1}) (\lambda T)^\beta (T - 1) = P + \sum_{i=1}^k (C - C_i) (\lambda W_i)^\beta - \sum_{i=1}^{k+1} (C - C_i) (\lambda W_{i-1})^\beta \dots\dots\dots(6)$$

단, 여기서 k는 $W_k \leq T < W_{k+1}$ 을 만족하는 값이며, $W_{n+1} = \infty, C_{n-1} = 0$ 이다.

例 1. 어떤 마이크로컴퓨터는 36개월의 保證期間이 設定되어 있는데 처음 6개월은 故障修理費用 全額을, 그 다음부터는 半額을 供給業者가 負擔한다고 한다. 컴퓨터에 故障發生時 應急修理費用은 100이며, 새로운 시스템으로 交替하는 데에는 1000의 費用이 든다고 하며, 시스템의

故障分布函數는 $R(t) = (\frac{t}{20})^2$ 을 만족하는 와이블分布라고 한다. 이 경우의 最適交替週期 T*를 구해보면

$$C(X) = \begin{cases} 0, & X \leq 6 \\ 50, & 6 < X \leq 36 \\ 100, & 36 < X \end{cases}$$

이므로

(6)식으로 부터 T* = 57.74(개월)임을 쉽게 구할 수 있다.

段階別 事後保證政策은 無料保證政策, 比率保證政策, 混合型保證政策을 일반화시킨 것이므로, 定理 3의 결과는 이들 각 政策에 모두 適用될 수 있게 된다. 즉, 無料保證政策하에서는

$$C(X) = \begin{cases} 0, & X \leq W \\ C, & X > W \end{cases}$$

(5)식으로 부터 T* ≥ W이고

$$r(T)^* T^* - (R(T^*) - R(W)) = P/C \dots\dots\dots(7)$$

을 만족함을 알 수 있다. (7)식에서 W = 0 인 경우는 事後保證이 고려되지 않은 最適應急修理壽命交替模型임을 알 수 있다. 또한 比率保證政策하에서는

$$C(X) = \begin{cases} \frac{CX}{W}, & X \leq W \\ C, & X > W \end{cases}$$

이므로, 최적교체주기 T*는

$$r(T^*)T^{*2} + \int_0^{T^*} R(t)dt - T^*R(T^*) = \frac{P}{C}W,$$

$$T^* \leq W, \dots (8)$$

이거나

$$r(T^*)T^* - R(T^*) = \frac{P}{C} - \frac{1}{W} \int_0^W R(t)dt,$$

$$T^* > W, \dots (9)$$

을 만족함을 알 수 있다.

또 混合保證制度의 경우에는

$$C(X) = \begin{cases} 0, & X \leq W_1 \\ C^1 \frac{X - W_1}{W - W_1}, & W_1 < X \leq W \\ C, & X > W \end{cases}$$

이므로, 최적교체주기 T^* 는

$$r(T^*)T^{*2} + \int_{W_1}^{T^*} R(t)dt - W_1 r(T^*)T^* - (T^* - W_1)R(T^*) = \frac{P}{C}(W - W_1) \dots (10)$$

$$W_1 < T^* \leq W,$$

이거나

$$r(T^*)T^* - R(T^*) = \frac{P}{C} - \frac{1}{W - W_1} \int_{W_1}^W R(t)dt,$$

$$T^* > W \dots (11)$$

를 만족함을 알 수 있다. 여기서 $W_1 = 0$ 로 하

면 (10), (11) 식들로부터 (8), (9)식들을 각각 얻을 수 있고, $W_1 \uparrow W$ 로 하면 (11)식으로부터 (7)식을 얻을 수 있다.

例2. 例1과 같은 상황에서 $W = 36$ 개월인 無料保證政策이 되어 있을 경우의 최적교체주기는 $T^* = \sqrt{4000 - 36 \times 36} = 52.0$ 개월이 된다. 또 比率保證政策하에서는 $T^* = \sqrt{4000 - 12 \times 36} = 59.73$ 개월이다. 만일 $W_1 = 6$, $W = 36$ 인 混合保證政策하에서는 $T^* = \sqrt{4000 - \frac{36^3 - 6^3}{90}} = 59.03$ 개월이 된다.

V. 結 論

本 研究에서는 應急修理가 가능한 段階別 事後保證 製品의 最適壽命交替政策을 구하였다. 아울러 段階別 事後保證制度의 특수한 경우라고 볼 수 있는 無料保證制度, 比率保證制度, 混合保證制度하에서의 最適壽命政策도 구하였다. 本 研究에서 구한 이러한 壽命交替政策은 앞으로 도 많은 分野에서 研究가 可能할 것으로 기대되는데, 그 하나는 應急修理가 아닌 完全修理模型 또는 完全修理 應急修理를 混合한 2가지 形態의 修理模型 등에 대하여 最適交替週期를 구하는 것이고, 다른 하나는 壽命에 의한 交替政策이 아닌 故障數에 의거한 交替政策이나 이들을 混合한 交替政策등을 들 수 있다.

Reference

- [1] Barlow, R.E. and Proschan, F.(1965). *Mathematical Theory of Reliability*, Wiley.
- [2] Kim, W.J. and Yi, G.H.(1987). "Cost Analysis of a Stepdown Warranty Policy," *J.SKISE*, Vol.10, No.15, 23-32.
- [3] Nguyen, D.G. and Murthy, D.N.P.(1984). "Cost Analysis for Warranty Policies," *Nav. Res. Logit. Q*, Vol.31, 525-541.
- [4] Park, K.S.(1985). "Optimal Use of Product Warranties" *IEEE Trans. Rel*, Vol.R-34, 519-521.
- [5] Pargen, E.(1962). *Stochastic Processes*. Holden-Day.
- [6] Richken, P.H. and Fuh, D.(1986). "Optimal Replacement Policy for Irreparable Warranted Items," *IEEE Tans. Rel*. Vol R-35, 621-623.