

Gamma-Prior가 고려된 KS A 3102의 修正檢査方式 Rectifying Inspection Plan for KS A 3102 with Gamma-Prior Distribution

鄭 永 培*
黃 義 徹**

ABSTRACT

A rectifying inspection plan which assumes a gamma - prior distribution on the lot percent defective is considered. This sampling inspection plan is developed for finite lot sizes with matching OC curves and generated from an initial plan selected from KS A 3102 single sampling by attributes. Comparisons are made with each plan by three examples.

I. 序 論

샘플링 검사방식의 결정에 있어서 기존 검사방식의 일부 취약점을 보완한 修正檢査方式 (Rectifying Inspection Plan) 및 効率的인 샘플링 방식 (Effective Sampling Plan)에 많은 研究가 진행되고 있다. 그 한가지 접근방법이 로트 不良率 P 에 事前分布 (Prior Distribution)를 부여하여 실제상황에 보다 근접한 모델을 제시한 후 檢査方式을 결정하는 베이시안 (Bayesian) 개념을 도입한 것이다.

Lauer [1978]는 로트 不良率 P 의 事前分布로서, 不良率 0%~100%에서 여러 경우의 분포의

형태를 잘 나타낼 수 있는 베타 (Beta) 分布를 사용하여 베이시안개념을 도입한 새로운 검사방식을 제시했다.

Guild & Raka [1980]는 로트 不良率 P 의 事前分布로서, 특히 로트의 不良率이 낮은 경우 즉 0%~10%에서 기존검사방식의 OC 곡선에 잘 맞는 감마 (Gamma) 分布를 사용한 검사방식을 보여 주었다.

그러나 이러한 모델에 의한 검사방식은 기존의 샘플링檢査表를 이용할 수 없으며 비록 그 과정을 컴퓨터 프로그램화하더라도 실제 작업장에서는 사용하기 어려운 점이 있다.

* 仁川大學校 産業工學科 專任講師
** 漢陽大學校 産業工學科 教授

또한 KS A 3102 計數規準型 1회 샘플링檢査表는 二項分布에 의해 계산이 되어 있으므로 로트의 크기가 시료의 크기에 비해서 큰 경우($N/n \geq 10$)라는 가정이 전제되어 있다. 그러나 실제 작업장에서 취급하는 로트의 크기는 特定の有限數이므로 기존 검사방식의 OC 곡선에 위배

되지 않는 有限의 特定 로트 크기하에서의 새로운 수정검사방식이 필요하게 된다.

本 研究에서는 計數規準型 1회 샘플링 檢査에서 로트不良率 P 에 Gamma-Prior의 베이저안 샘플링 검사를 실시함으로써 로트의 不良률이 낮고 工程이 安定되어 있는 경우의 실제상황에

표 1. 계수규준형 1회 샘플링 검사표

작은 글자는 n , 굵은 글자는 c

$\alpha \approx 0.05, \beta \approx 0.10$

$P_0(\%)$ P ₀ (%)	0.71 0.90	0.91 1.12	1.13 1.49	1.41 1.80	1.81 2.24	2.25 2.80	2.81 3.55	3.56 4.50	4.51 5.60	5.61 7.10	7.11 9.00	9.01 11.2	11.3 14.0	14.1 18.0	18.1 22.4	22.5 28.0	28.1 35.5	$P_1(\%)$ P ₁ (%)
0.090 0.112	*	400 1	↓	—	↓	—	60 0	50 0	—	↓	↓	—	↓	↓	↓	↓	↓	0.090 0.112
0.113 0.140	*	↓	300 1	↓	—	↓	—	↓	40 0	—	↓	↓	—	↓	↓	↓	↓	0.113 0.140
0.141 0.180	*	500 2	↓	250 1	↓	—	↓	—	↓	30 0	—	↓	↓	—	↓	↓	↓	0.141 0.180
0.181 0.224	*	*	400 2	↓	200 1	↓	—	↓	—	↓	25 0	—	↓	↓	—	↓	↓	0.181 0.224
0.225 0.280	*	*	500 3	300 2	↓	150 1	↓	—	↓	—	↓	20 0	—	↓	↓	—	↓	0.225 0.280
0.281 0.355	*	*	*	400 3	250 2	↓	120 1	↓	—	↓	—	↓	15 0	—	↓	↓	—	0.281 0.355
0.356 0.450	*	*	*	500 4	300 3	200 2	↓	100 1	↓	—	↓	—	↓	15 0	—	↓	↓	0.356 0.450
0.451 0.560	*	*	*	*	400 4	250 3	150 2	↓	80 1	↓	—	↓	—	↓	10 0	—	↓	0.451 0.560
0.561 0.710	*	*	*	*	500 6	300 4	200 3	120 2	↓	60 1	↓	—	↓	—	↓	7 0	—	0.561 0.710
0.711 0.900	*	*	*	*	*	400 6	250 4	150 3	100 2	↓	50 1	↓	—	↓	—	↓	5 0	0.711 0.900
0.901 1.12		*	*	*	*	*	300 6	200 4	120 3	80 2	↓	40 1	↓	—	↓	↓	↓	0.901 1.12
1.13 1.40			*	*	*	*	500 10	250 6	150 4	100 3	60 2	↓	30 1	↓	—	↓	↓	1.13 1.40
1.41 1.80				*	*	*	*	400 10	200 6	120 4	80 3	50 2	↓	25 1	↓	—	↓	1.41 1.80
1.81 2.24					*	*	*	300 10	150 6	100 4	60 3	40 2	↓	20 1	↓	—	↓	1.81 2.24
2.25 2.80						*	*	*	*	250 10	120 6	70 4	50 3	30 2	↓	15 1	↓	2.25 2.80
2.81 3.55							*	*	*	*	200 10	100 6	60 4	40 3	25 2	↓	10 1	2.81 3.55
3.56 4.50								*	*	*	*	150 10	80 6	50 4	30 3	20 2	↓	3.56 4.50
4.51 5.60									*	*	*	*	120 10	60 6	40 4	25 3	15 2	4.51 5.60
5.61 7.10										*	*	*	*	100 10	50 6	30 4	20 3	5.61 7.10
7.11 9.00											*	*	*	*	70 10	40 6	25 4	7.11 9.00
9.01 11.2												*	*	*	*	60 10	30 6	9.01 11.2

비고 화살표는 그 방향의 칸의 n, c 를 사용한다.

* 표는 표 2에 따른다. 빈칸에 대해서는 샘플링 검사방법이 없다.

자료 : KS A 3102

보다 근접한 모델을 제시하고 特定の 有限로트 크기에 대해 기존 검사방식의 OC 곡선에 위배 되지 않는 修正檢査方式을 구한다.

II. 記號說明

- α : 生産者危險 (KS A 3102表에서는 5%)
- β : 消費者危險 (KS A 3102表에서는 10%)
- P_0 : 가급적 合格시키고자 하는 로트不良率의 上限
- P_1 : 가급적 不合格시키고자 하는 로트不良率의 下限
- n_1 : KS A 3102에 의한 試料의 크기
- c_1 : KS A 3102에 의한 合格判定個數
- n_2 : 有限 로트 크기에서의 KS A 3102의 修正 試料의 크기.
- c_2 : 有限 로트 크기에서의 KS A 3102의 修正合格判定個數
- n^* : Gamma-Prior 베이지안 샘플링에 의한 n_2 의 修正試料의 크기
- c^* : Gamma-Prior 베이지안 샘플링에 의한 c_2 의 修正合格判定個數
- a, b : 감마分布의 母數
- μ_p : 감마分布에 의한 로트不良率 P 의 母平均
- σ_p^2 : 감마分布에 의한 로트不良率 P 의 母分散

III. KS A 3102

현재 韓國標準協會에서 발행하여 사용되고 있는 KS A 3102 샘플링 檢査表는 表1, 表2. 와 같다. 즉 P_0 와 P_1 을 각각 $(1-\alpha)$, β 의 확률로 지정하여 生産者와 消費者의 要求를 만족하는 두개의 제약식을 合格判定計數 C 의 변화에 대해 가장 근사한 試料의 크기를 平均해서 구한 것이다.

IV. 有限로트 크기에서의 修正檢査方式

KS A 3102 檢査方式은 로트의 크기 N 에 대해서는 고려되어 있지 않다. 즉 KS A 3102 샘플링

표 2. 샘플링검사 설계 보조표

p_1/p_0	c	n
17 以上	0	$2.56/p_0 + 115/p_1$
16 ~7.9	1	$17.8/p_0 + 194/p_1$
7.8 ~5.6	2	$40.9/p_0 + 266/p_1$
5.5 ~4.4	3	$68.3/p_0 + 334/p_1$
4.3 ~3.6	4	$98.5/p_0 + 400/p_1$
3.5 ~2.8	6	$164/p_0 + 327/p_1$
2.7 ~2.3	10	$308/p_0 + 770/p_1$
2.2 ~2.0	15	$502/p_0 + 1065/p_1$
1.99~1.86	20	$704/p_0 + 1350/p_1$

자료 : KS A 3102

플링檢査表는 二項分布에 의해 계산되어 있으므로 試料의 크기에 비해 로트의 크기가 매우 크다는 가정을 전제로 하고 있다. 샘플링理論에서는 보통 $N/n \geq 10$ 을 基準으로 하고 있지만 이것 역시 대략적인 기준에 불과하다. 따라서 보다 効率的인 檢査方式의 결정을 위해서는 로트의 크기 N 이 특정값으로 주어질 때 기존의 KS A 3102 검사방식의 修正이 필요하게 된다.

Hamaker [1959]은 無限 로트 크기에서의 검사 방식(n_1, c_1)은 로트의 크기가 특정 有限값 N 으로 주어질 때 기존 검사방식의 OC 곡선에 위배 되지 않는 새로운 검사방식(n_2, c_2)는 아래의 (1), (2)식을 만족해야 함을 보였다.

$$n_2 = \frac{n_1(c_2 + 2/3)}{c_1 + 2/3 + n_1/3N} \dots\dots\dots (1)$$

$$n_2 \geq N n_1 / (N + n_1) \dots\dots\dots (2)$$

위의 (1), (2)식에 의한 OC 곡선이 기존 검사 방식의 OC 곡선과 정확하게 일치하는 (n_2, c_2)를 구할 수는 없으나 (2)식의 부등식을 등식으로 간주할 때 기존의 OC 곡선과 유사하게 된다. 이때의 (1), (2)식을 n_2, c_2 에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$n_2 = \frac{N \cdot n_1}{N + n_1} \dots\dots\dots (3)$$

$$c_2 = \frac{Nc_1 - n_1/3}{N + n_1} \dots\dots\dots (4)$$

V. Gamma-Prior 에 의한 最終修正 檢査方式

감마分布의 母數 a, b 는 P 의 平均과 分散의 함수이며 이들 값의 변화에 따라 그림 1. 과 같이 여러 형태의 分布를 표현할 수 있고 특히 불량률이 낮을 때의 분포를 잘 반영할 수 있기 때문에 本 研究에서는 로트不良率 P 의 事前分布로서 감마分布를 적용한다.

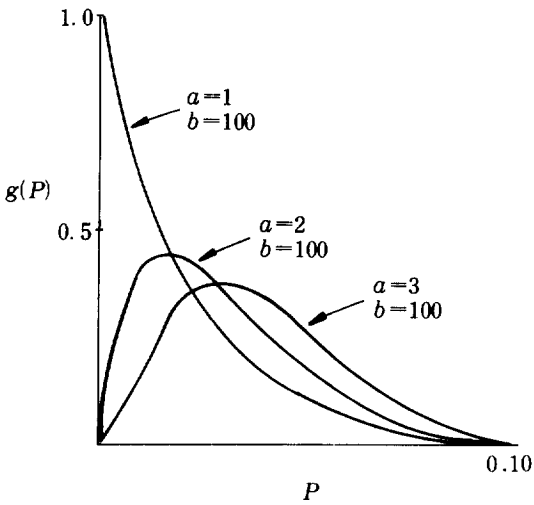


그림 1. Gamma-Prior Distributions

로트不良率 P 의 감마分布 $p. d. f$ 는 다음과 같다.

$$g(P) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} P^{a-1} e^{-bP} \dots\dots\dots (5)$$

$$a = 1, 2, 3, \dots$$

$$b > 0$$

$$0 \leq P \leq 1$$

母數 a, b 의 감마分布를 하는 確率變數 P 의 포아송(Poisson)分布에 대한 條件付確率의 OC 곡선에서의 檢査방식을 (n^*, c^*) 라 할 때, 試料의 크기가 n_2 , 로트의 不良率 P 인 포아송分布의 $p. d. f$ 는 다음과 같다.

$$k(y | n_2 P) = (n_2 P)^y e^{-n_2 P} / y! \dots\dots\dots (6)$$

(5), (6)式을 베이즈정리 (7)式에 代入하여 (8), (9)式을 구하면

$$g(P | y) = g(P) \cdot k(y | n_2 P) / f(y)$$

$$f(y) = \int_0^1 g(P) k(y | n_2 P) dP \dots\dots\dots (7)$$

$$g(P | y = c; n_2, c_2) = \frac{n_2^{c_2+1} P^{c_2}}{\Gamma(c_2+1)} e^{-n_2 P} \dots (8)$$

$$g(P | y = c; n^*, c^*) = \frac{(b + n^*)^{a+c^*}}{\Gamma(a+c^*)} P^{a+c^*-1} e^{-(b+n^*)P} \dots\dots\dots (9)$$

이 된다.

(8), (9)式으로부터 (n_2, c_2) 와 (n^*, c^*) 의 관계는 다음과 같다.

$$n_2 = n^* + b \dots\dots\dots (10)$$

$$c_2 = c^* + a - 1 \dots\dots\dots (11)$$

이때 로트不良率 P 의 Gamma-Prior에 의한 母平均과 母分散을 각각 μ_P, σ_P^2 이라고 하면

$$(\mu_P, \sigma_P^2) = \left(\frac{a}{b}, \frac{a}{b^2} \right) \dots\dots\dots (12)$$

(12)式을 a, b 에 대해 정리하면

$$(a, b) = \left\{ \left(\frac{\mu_P}{\sigma_P} \right)^2, \frac{\mu_P}{\sigma_P^2} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

이 된다.

그러므로 유한 로트 크기에서의 KS A 3102 修正檢査方式 (n_2, c_2) 에서 Gamma-Prior 에 의한

再修正檢査方式 (n^* , c^*)는 다음과 같다.

$$n^* = n_2 - \frac{\mu_P}{\sigma_P^2} \dots\dots\dots (14)$$

$$c^* = c_2 - \left(\frac{\mu_P}{\sigma_P}\right)^2 + 1 \dots\dots\dots (15)$$

여기서 μ_P , σ_P 역시 母數이므로 이들값에 대한 推定이 요구된다. 특히 감마分布는 그림 1. 에서 보는 바와 같이 a , b 값에 따라 散布가 매우 다른 형태를 취하므로 범위 R 에 의한 推定을 실시한다. [황의철(1980)] 즉, μ_P , σ_P 의 推定值 $\hat{\mu}_P$, $\hat{\sigma}_P$ 는 다음과 같다.

$$\hat{\mu}_P = \sum_{i=1}^k \bar{P}_i / k \quad (k : \text{부분群의 數}) \dots\dots\dots (16)$$

$$\hat{\sigma}_P = \bar{R} / d_2$$

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^k R / k \dots\dots\dots (17)$$

따라서 KS A 3102 檢査方式(n_1 , c_1)의 有限로트 크기에서 로트不良率 P 의 Gamma-Prior일때 最終修正檢査方式(n^* , c^*)는

$$n^* = \frac{N \cdot n_1}{N + n_1} - \frac{\hat{\mu}_P}{\hat{\sigma}_P^2} \dots\dots\dots (18)$$

$$c^* = \frac{N c_1 - n_1 / 3}{N + n_1} - \left(\frac{\hat{\mu}_P}{\hat{\sigma}_P}\right)^2 + 1 \dots\dots\dots (19)$$

가 된다.

VI. 數值例

數值例 1 : KS A 3102에 의한 샘플링檢査
 $P_0=0.01$, $P_1=0.04$, $\alpha=0.05$, $\beta=0.10$ 일때
 $(n_1, c_1)=(200, 4)$

數值例 2 : 有限 로트 크기에서의 修正檢査方式

위의 수치에 1 에서 로트의 크기가 $N=2,000$ 일 때

$$n_2 = \frac{2000 \times 200}{2000 + 200} = 181.8$$

$$c_2 = \frac{2000 \times 4 - 200 / 3}{2000 + 200} = 3.6$$

$$(n_2, c_2) = (182, 4)$$

數值例 3 : KS A 3102에서 有限 로트 크기 N 과 로트不良率 P 의 Gamma-Prior에 의한 最終修正檢査方式

위의 數值例 2 에서 $\hat{\mu}_P=0.01$ $\hat{\sigma}_P^2=(0.01)^2$ 일때

$$n^* = 181.8 - \frac{0.01}{(0.01)^2} = 81.8$$

$$c^* = 3.6 - \left(\frac{0.01}{0.01}\right)^2 + 1 = 3.6$$

$$(n^*, c^*) = (82, 4)$$

VII. 結 論

計數規準型 1회 샘플링檢査인 KS A 3102는 P_0 와 P_1 에 의한 두개의 制約式을 만족시키는 檢査方式이므로 生産者와 消費者를 동시에 보호할 수 있는 檢査방식이나 다른 單一制約式하에서의 檢査方式에 비해 檢査의 効率性이 떨어진다. 이러한 단점은 로트의 크기와 로트不良率의 分布를 부여함으로써 보완될 수 있다.

數值例의 결과를 보면 로트의 크기와 로트不良率의 分布가 주어질 때의 檢査方式이 기존의 KS A 3102의 檢査方式보다 試料의 크기가 허저하게 감소했음을 알 수 있다. 이것은 새로이 주어지는 정보에 의한 檢査갯수의 감소라는 利點으로 해석될 수 있다.

本 研究는 KS A 3102에서 추가적으로 주어지는 로트의 크기와 로트不良率 P 의 分布에 대해 (18), (19)式을 사용하여 이미 일반작업장에서 널리 사용되고 있는 檢査表를 그대로 이용할 수 있는 KS A 3102의 修正檢査方式을 제시하였다.

参 考 文 献

1. 황의철, (1980), 최신 품질관리, 박영사, 318-322
2. Collani, E.V. (1986, Jan.), "The α -optimal Acceptance Sampling Scheme", Journal of Quality Technology, Vol. 18, No.1, 63-66.
3. Dodge, H.F., Romig, H.G. (1959), Sampling Inspection Tables, New York, J. Wiley & Sons, Inc.
4. Gventher, W.C. (1985, Apr.), "Rectifying Inspection for Nonconforming Items and the Hald Linear Cost Model", Journal of Quality Technology, Vol. 17, No. 2, 81-85.
5. Guenther, W.C. (1984, Jan.), "Determination of Rectifying Inspection Plans Single Sampling by Attributes", Journal of Quality Technology, Vol. 16, No. 1, 56-63.
6. Guild, R.D., Raka (1980, Apr.), "Effective Sampling Plans Based on a Prior Distribution", Journal of Quality Technology, Vol. 12, No. 2, 88-93.
7. Hamaker, H.C. (1959), "Adjusting Single Sampling Plans for Finite Lot sizes", Applied Statistics, Vol. 8, 210-214.
8. Juran, J.M., Gryna, F.M. (1980), Quality planning and Analysis, McGraw-Hill Book Company, 433-438.
9. Lauer, N.G. (1978, Apr.), "Acceptance Probabilities for Sampling Plans Where Proportion Defective Has a Beta Distribution", Journal of Quality Technology, Vol. 10, No.2, 52-55.
10. Soundararajan, V. (1981, July), "Single Sampling Attributes Plans Indexed by AQL and AOQL", Journal of Quality Technology, Vol. 13, No. 3, 195-200.