韓國數學教育學會誌〈數學教育〉
1987. 12, Vol. XXVI, No. 1

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1987, Vol. XXVI, No. 1

문제의 정보공간 분석을 통한 문제구조의 이해 및 학교수학에서의 그 활용

신 현 성
강원대학교

1. 서 론

Kilpatrick이 분류한 문제해결 연구에서 과제변인(task variables)은 이 분야에 많은 연구자들의 관심을 가져다 주었으며 특히 Kru-tetskii(1976), Knifong(1976) 및 Hunt(1975)등에 의하여 문제진술에서 문법적 어구배열(syntax), 내용과 문맥(content and context), 문제의 재표현(내적, 외적)에서 그들의 구조변인 알고리즘, 전략등이 활발하게 논의되었다.

과제변인은 polya의 모델과 밀접한 관련을 맺고있다. 문법적 어구배열 및 내용과 문맥은 문제의 이해와 관련이 있고, 문제구조, 알고리즘 및 전략은 문제를 계획하고 푸는 단계와 관련이 있다. 따라서, 우리나라에서 주로 연구되어온 polya모델을 중심으로한 문제해결 지도는 과제변인들의 연구와 같이 진행되어져야 할 것이다.

문제를 정의하고 문제들이 가지고 있는 구조와 성격을 규명하는 일은 문제유형에 따라 연구되는 해결전략의 설정에 큰 도움이 된다. 본 연구에서는 전반부에서는 문제해결에서 내용과 문맥변인, 문제구조변인등을 살펴보고, 후반부에서는 연구자(1985)가 발전시킨 전략행위 코딩조직을 이용하여 관찰한 학생들과 교사들의 풀이행위를 바탕으로한 지도방법 두가지를 제시한다.

2. 문제내용과 문맥변인

내용(content)은 문제속에 있는 수학적의미에 관련된 것으로 과제의 본질을 말한다. 수학적 문제의 내용은 네개의 부분으로 나누어진다.

1) 수학적인 주제
2) 응용에 관련된 것
3) 이의(Semantic)내용과 관련된 것
4) 문제요소와 관련된것 등이다.

여기서 어의(Semantic)내용은 문제진술속에 있는 중심단어나 구등이며 문제요소(problem element)들은 문제진술(problem statement) 속에있는 주어진 정보, 허용된 연산, 최종목표와 같은 것을 말한다.

수학적 주제 : 수학적주제 분류는 Kurutet-skii(1975)가 수학적능력에 대한 연구에서 산수, 대수, 기하, 논리, 일반수학등과 같이 문제분류를 시도한바 있다. 이것은 학교수학에서 가장 많이 분류하는 방법으로 문제에 주어진 정보, 주어진 연산, 최종목표등에 그 분류의 기초를 둔다. 그러나, Hill, Fehr등은 수학적 주제를 유한수 조직, 일반연산, 수학적 사상……등과 같이 개념별로 분류하기도 한다. 또, 문제서술상 비슷한 성질들을 모은 문제군을 만들고 각 문제군에 알맞은 알고리즘이나 풀이전략을 생각할 수 있게 한다면 문제해결 지도에 도움이 된다는 의견도 있다. 이러한 분류방법으로 문제를 작업(work)문제, 비례문제,

혼합물 문제등으로 구별하는 것이다.

어의내용 : 이 영역에는 두가지가 있다. 하나는 핵심용어(Keyword)이고 다른 하나는 수학적 단어(vocabulary)이다. 핵심용어는 계산이 관련된 문장제에서 문제풀이에 중요한 역할을 한다. "조금 덜" "더많이" "각각" "다같이"등은 연산을 결정하는 데 도움이 되는 용어이다. 예를들면

> 우유 배달부는 월요일에는 8병의 우유를 가져오고 일요일에는 월요일 보다 4병 더 가져온다. 그는 일요일에는 몇 병 가져왔는가?

에서 "더"는 언어힌트 역활을 하고

> 우유 배달부는 월요일에 7병의 우유를 가져온다. 그 양은 일요일에 가져온 양보다 4명이 적은양이다. 일요일에는 몇 병을 가져왔는가? 병

에서는 "적은"은 힌트가 될 수 있다.

문제요소 : 문제요소는 문제에 주어진것, 연산, 최종목표등 3가지로 구분된다. 문제에 직접, 간접적으로 제시되는 3가지는 문제형태의 결정이나 풀이방법에 영향을 준다. 예를들면, 최종목표의 형태에따라 해를 구하는 방법이 결정된다.

> 둘레가 81㎝이면서 최대넓이를 가지게 하려면 어떻게 직사각형을 그려야 하는가?

에서 최종목표는 도형을 그리는 것이고 어

> 어떤수를 3, 5, 7로 나누었을 때 나머지가 각각 2, 3, 2가 되었다. 어떤수를 발견하여라.

에서 최종목표는 수를 구하는 것이다.

문맥은 문제진술에 나타난 형식을 말하며 다음과 같이 3가지로 나눈다.

1) 언어, 그림, 조작활동등과 같은 표현방법(embodiment),
2) 추상적과 구체적, 응용과 이론 등과 같은 문장배치(verbal setting),
3) 힌트의 유무, 주관식과 객관식등과 같은 정보형태(in formation form).

이러한 요인들은 문제해결 향상에 큰 역활을 하고 연구에 사용되는 문제군을 발전시키는 데 중요한 정보가 된다. 이를테면, 문장배치에서 추상적인 문제로

> 주어진 수의 2배에 3을 더한것은 15와 같다. 주어진 것은 무었인가?

와 같은 문제를 흔히 볼 수 있으며 구체적인 문제로

> 학생A는 장난감을 가지고있다. 그런데 가지고 있는 갯수의 2배에 4개를 더하면 하면 14개가 된다. 얼마나 많은 장난감을 가지고 있는가?

등과 같이 보기를 들 수 있다.

3. 문제구조변인

문제해결 연구에서 인공지능 모델을 이용하여 인간의 문제해결을 연구하는 움직임이 있었다. 이러한 모델은 컴퓨터를 통한 형식적분석(formal analysis)을 이용하게되며 알고리즘을 찾는데 효과적이다는 사실이 많은 연구자에 의하여 제시되었다. 이러한 작업의 기저를 제공해 줄 수 있는 것이 문제구조를 밝히는 일이다. 문제구조를 알아보는 방법으로 몇가지가 제시되고 있으나 Nilsson의 정보공간분석(state-space analysis)방법을 소개한다.

정보공간(state-space)의 정의 : Newell 과 Simon은 문제가 제시되었을 때 문제공간(problem space)을 다음 요소로 구성된 공간이라고 했다.

1) 문제정보
2) 연산활동
3) 출발점 지식
4) 사용가능한 모든 지식

문제가 주어져 있을 때 문제는 어떤 정보를 가지고 있고 이들 정보들은 서로 연합하여 어떤 해의 길(solution path)을 거치면서 최종목표에 도달하게 되는지 이러한 요소들을 도식화할 수 없을까? 하는 의문을 가지게 된다. 정보공간은 문제풀이에 동원된 가능한 정보(state)들과 한 정보에서 다른 정보로 가는 가능한 이동(move)들로 구성된 집합이다. 출발점

을 초기 정보(initial state)로 보고 최종목표를 최종정보(goal state)라고 한다. 구체적인 문제를 들어 정보공간분석을 논하여 보자.

1 100원 짜리 동전 한 개와 50원 짜리 동전 한 개가 다음 그림과 같이 놓여있다.

100 50 : ├─┤ 는 공간

그런데, 100원 짜리 동전은 오른쪽으로만 이동할 수 있고 50원 짜리는 왼쪽으로만 이동할 수 있다. 한 개의 동전이 이동할 때는 다음 두가지 규칙이 적용된다.

①한 개의 동전은 인접한 빈공간으로 한 공간씩 이동하거나

②다음 빈 공간으로 가기 위하여 다른 동전을 뛰어넘을수 있다.

한 개의 동전이 어떻게 이동하여 다른 동전자리로 가는지 가능한 방법을 제시하여라.

2 위의 문제와 같은 조건하에서 동전의 갯수와 그 위치가 다음과 같이 놓여 있을 때 동전들이 서로 어떻게 교환이 되어 다른 동전자리로 가는지 가능한 방법을 제시하여라.

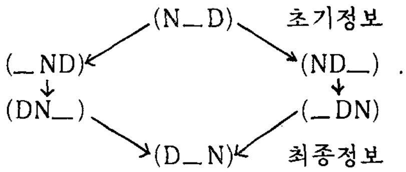
100 100 50 50

위의 두 문제는 문제의 문법적 구성, 내용과 문맥등에는 차이가 없다. 그러나 문제의 구조면에서는 큰 차이가 있다. 두 문제에 대한 정보공간분석은 그림 1과 같다. 이 정보공간분석에서 알 수 있는 바와같이 문제의 복잡성을 판단하는데 다음과 같은 내용을 참고 할 수 있다.

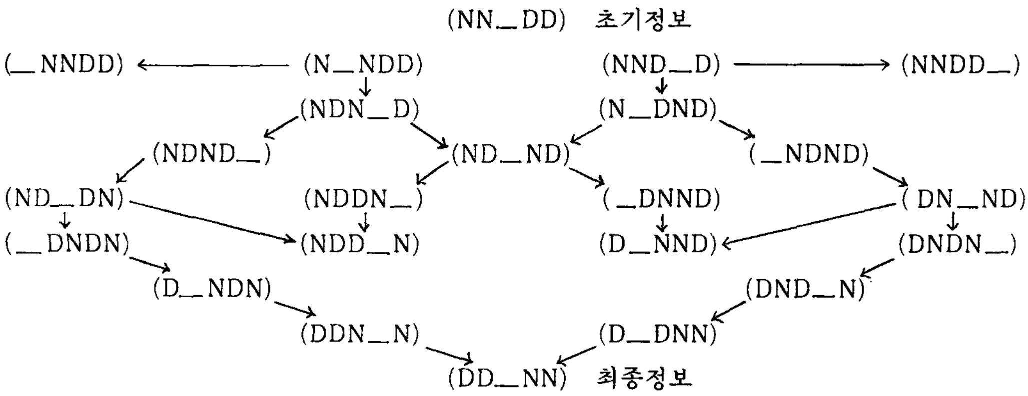
100원 동전과 50원 동전의 정보공간분석

N : 100원 동전, D : 50원 동전

- **100원 동전 1, 50원 1**



- **100원 동전 2, 50원 2**



〔그림 1〕

1) 정보공간에 있는 정보들의 수
 백원 짜리 1개 오십원 짜리 1개인 경우 6
 백원 짜리 2개 오십원 짜리 2개인 경우 23
2) 완전한 해의 길이
 백원 짜리 1 오십원 짜리 1인 경우 3단계
 백원 짜리 2 오십원 짜리 2인 경우 8단계
3) 불완전한 해의 길이
 백원 짜리 1 오십원 짜리 1인 경우 0
 백원 짜리 2 오십원 짜리 2인 경우 4

두 문제가 공통으로 가지고 있는 것으로는 초기이동의 수 2, 최종정보의 수 1, 완전한 해의 길 2 이다.

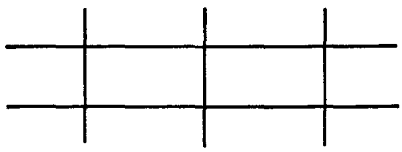
정보공간 분석에서 제시되는 이동(move)은 유한 개의 연산자들로 해석한다면 각 연산자는 문제정보들로 구성된 정의역과 후계정보로 구성된 치역을 가진다. 따라서, 해의 길을 발견한다는 것은 초기 정보에서 최종정보를 얻는 일련의 연산자들의 배열을 발견하는 것으로 해석할 수 있다. 위의 동전의 이동에서는 4개의 연산자(예를들면 100원짜리를 오른쪽으로 휨이 없이 옮기기)가 있으며 각 연산자는 유일한 후계정보를 생성해 낸다. 따라서, 지금까지 사용한 이동을 연산자로 생각하면 두 문제공간 사이에는 동형과 준동형을 논 할 수 있다.

동형인 정보공간 : Goldin에 의하면 두개의 문제정보공간 A, B가 동형이 된다는 것은 A에서 B로 가는 사상f가 있고 그 사상 f는 다음과 같은 조건을 만족하는 경우를 말한다.

1) 사상 f는 전단사이고,
2) 정보공간 A에서 A의 정보S_1에서 S_2로 가는 이동 f_1이 있다면 정보공간 B에서도 f_1에 대응된 이동f_1'가 있어 f_1'는 대응된 정보S_1'에서 대응된 정보S_2로 가야한다. 역도 마찬가지어야 하며,
3) 정보공간 A의 초기정보S_0는 정보공간 B의 초기정보S_0' 위로 사상되며,
4) 정보 S_n이 정보공간 A에서 최종정보이면 이에 대응하는 정보공간 B의 S_n'도 B에서 최종정보가 되어야한다.

그러나, 어떤 정보공간의 경우 여러개의 초기정보나 최종정보가 있을 때는 ①, ②만을 만족하면 두 정보공간 A, B는 서로 동형이라고 한다. 이와같이 두 문제공간이 동형일 때는 문제정보를 변형시켜도 문제구조는 같게되어 알고리즘이나 전략의 지도시 유익하게 된다. 동형인 문제들을 모아 동치류를 만들면 이 문제군에 대한 풀이지도가 효과적으로 이루어 질 수 있다. 예를들면, 다음 두 문제를 보자.

1. 숫자놀이에서 자연수 1, 2, 3…9까지 지 써있는 카드가 있다. 두 팀이 숫자 고르기 시합을 하는데 어느팀이든 3개의 숫자카드를 선택하여 합이 15가 되도록 해야한다. 가능한 3개의 숫자를 찾아라.
2. 다음과 같이 9개의 칸이 있는 널판이 있다. 숫자 1, 2, 3…9를 이용하여 세 수의 합이 15가 되도록 써넣어라.



이 두 문제는 동형인 문제가 된다. 일반적으로 학교수학에서 주어진 문제에 동형인 문제들만 취급할 수 없다. 주어진 문제보다 발전적인 문제를 취급함으로써 해법의 다양성을 경험시켜야하는 요구가 있기때문이다. 이점에 대해서는 Krutetskii(1976)도 수학적 능력 중에서 사고의 다양성(flexibility)을 강조하고 있다. 동형인 문제들의 제한점은 한정된 전략 및 알고리즘의 학습이 된다는 것이다. 따라서, 지도의 실제에서는 문제구조를 조금씩 변경시킬 필요가 있다. 지금까지 제시한 정보공간의 동형개념을 일반화 한다면 정보공간의 준동형사상 개념을 생각할 수 있다. Goldin의 정의는 다음과 같다.

두 정보공간 S, T의 준동형 사상은 S에서 T로 가는 사상 f로서(꼭 단사이거나 전사일 필요는 없다) 다음을 만족하는 사상이다.

> 정보공간 S에 정보 s_1, s_2이 있어 s_1에서 s_2로 가는 이동이 있다면 정보공간 T에서도 $f(s_1)$에서 $f(s_2)$로 가는 이동이 있던지, $f(s_1)=f(s_2)$가 되어야 한다.

이때 준동형 사상 f에 의하여 S의 최종정보가 역시 T의 최종정보로 사상하면 그 준동형사상은 목표보존(goal-preserving)이 되었다고 한다. 이 준동형사상은 다시 전사인 경우와 단사인 경우로 나누어 생각할 수 있다. 이와같은 방법으로 문제의 구조를 알아보는 것은 여러방법 중의 하나이지만 문제를 어떤 기준에 의하여 분류하므로써 풀이전략을 세우고 지도하는 데 도움을 줄 수 있다. 교사의 입장에서는 이러한 정보공간 분석은 문제를 동일문제, 유사문제등등으로 유별하는데 도움을 줄 수 있기 때문에 다양한 문제에서 효과적인 분석방법을 더 연구해야 한다.

알고리즘에 의한 분석 : 문제에 대한 알고리즘 분석은 주로 연산(+, −, ×, ÷) 활동이 제시되어있는 대수문제에서 적용되며 앞에서 언급한 문제정보 공간분석을 대신할 수 있는 방법으로 여겨진다. 알고리즘은 정보공간분석에서 초기정보에서 최종정보로 이르는 유한개의 길(path)로 정의된다. 따라서, 정보공간에서 제시되어진 연산자들의 집합이라고도 말할 수 있다. 이러한 알고리즘은 정형문제(routine) 등에서 문제구조를 파악하는데 사용된다. 알고리즘의 일반화로서의 전략(strategy)은 알고리즘과 같이 유일한 이동(move)일 필요는 없고 일련의 이동(move)들을 간략하게 해주는 어떤 절차로서 이해된다. 여기에는 해의 길은 물론 가능한 길(path)도 포함된다.

3. 정형문제의 구조변인

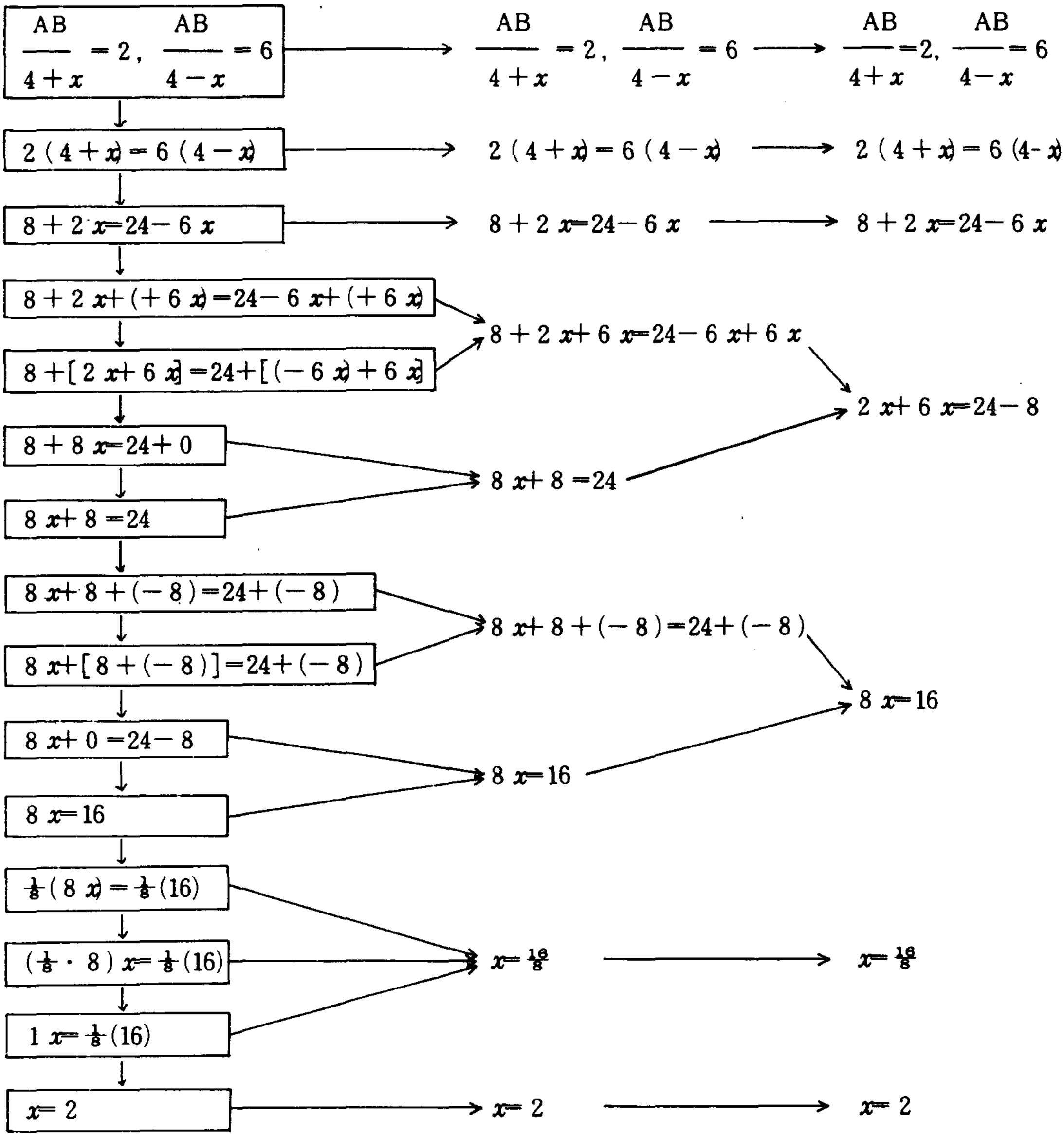
교과서에서 흔히 볼 수 있는 정형문제의 문제 구조 분석은 비수학적 문제의 정보공간 분석과 약간 틀리나 그 방법을 이용할 수 있다. 정형문제는 학교수학에서 제시되는 표준표현(standard representation)이 있게마련인데 이 표현은 일반적으로 학생들이 변수를 잡고 문제를 식으로 나타낸 것이 된다. 이와같이 식으로 문제구조를 표현하는 경우의 정보공간 분석은 확장된 정보공간과 축소된 정보공간으로 나타낼 수 있다. 예를들면 다음 문제를 생각하여보자.

> 잔잔한 강에서는 시속 4km로 여행할 수 있는 보트가 상류 A에서 하류 B까지 가는데 2시간이 걸렸다. 그러나, 이 보트는 B에서 A로 돌아가는데는 6시간 걸렸다. 물결의 속도를 구하여라.

그림 2는 문제에대한 확장된 정보공간과 축소된 정보공간을 나타내고 있다. 방정식을 세우면

$$\frac{\dot{A}B}{4+x}=2, \quad \frac{AB}{4-x}=6$$

이 되고 이 정보가 문제의 정보공간의 초기정보가 되며, 최종정보는 $x=\square$ 와 같이된다. 배수문제에서 식으로 문제구조가 표현이 안되는 경우에는 비수학적 문제에서 제시한 공간분석 방법을 택하여 나타낼 수 있다.



〔그림 2〕

다음 장에서는 본 연구의 결론부분으로 지금까지 언급한 문제의 정보공간 분석과 어의정보(semenatic information)를 활용하여 학교수학에서 문제해결의 지도 실제를 적용부분으로 제시하고자 한다.

4. 지도의 실제

학교수학에서 문쥐해결의 지도는 개념의 지도와 더불어 Higgins(1973)가 이야기 한것처럼 중요한 연구과제로 남고있다. Bloom이 교육목표 분류에서 제시한 분석력, 종합력, 평가력을 어떻게 학교수학에서 실현할 것인가 또, Thorndike등에 의하여 연구되었던 전이력을 길러주는 학습을 어떤 형태로 구체화 해서 학생들에게 전달해야 할 것인가는 학교수학이 당면한 과제임이 틀림없다. 여기에서는

앞에서 살펴본 문제의 정보공간분석과 어의정보를 활용하여 생각할 수 있는 지도의 실제를 정형문제, 비정형문제(non-routine)를 선택하여 제시하고자 한다.

정형문제 1

잔잔한 강에서는 시속 4 km로 여행을 할 수 있는 보트가 상류 A에서 하류 B까지 가는데 2시간이 걸렸다. 그러나, 이 보트는 하류 B에서 상류 A로 돌아가는데는 6시간이 걸렸다. 물결의 속도를 구하여라.

이 문제에 기술되지 않은 가정은 1) 바람은 보트의 속도에 영향을 끼치지 않는다는 것이고, 2) 강에 방해물이 없다는 것이며, 3) 물결의 속도와 마찬가지로 보트의 속도도 항상 일정하다는 것이다. 또, 이 문제에 관련되면서 기술되지 않은 정보는 거리=(시간)×(속도) 등이다. 어떤 문제든 이러한 숨겨진 정보를 가지게 마련인데 이러한 정보의 확인없이 문제풀이로 들어간다는 것은 학교수학에서 문제해결에 방해가 되는 원인이 될 수 있다. 이 문제에 대한 지도를 다음에서 어의정보를 강조하며 토론학습 형태로 기술하였다.

목표 : 학생들로 하여금 어의정보를 이해하고 주어진 문제와 문제구조가 유사한 (동형인 것도 포함) 문제를 만들고 정보공간분석을 통해 해의 길을 찾도록한다.

토론A : 다음과 같은 어의정보를 학생들과 토론한다.

1) 보트에 영향을 끼치는 힘 : 바람 물결등

2) 보트가 물결을 거슬러 올라갈때와 내려올때의 보트의 속도 :

$$B+W+C+\cdots=BSD$$

$$B-W-C+\cdots=BSU$$

여기서, B는 여객선 속도, W는 바람의 속도, C는 물결의 속도 BSD는 물결을 따라 내려갈때의 배의 속도, BSU는 물결을 거슬러 올라갈때의 배의 속도등이다.

3) 몇 가지 문제상황에 알맞은 숨겨진 정보 : ①보트의 속도는 잔잔한 물에서 어떻게 측정되나? 실제 강에서 배의 속도는 항상 일정하다고 말 할 수 있는가? 이 문제에서 보트 속도는 어떻게 생각해야 하는가?

② 바람의 속도는 어떻게 계산해야 하는가? 무시해야 하는가?

③ 물결의 속도는 어떻게 측정되는가? 물결을 거슬러 올라가는 것하고 물결을 따라 내려오는 것하고는 어떤 차이가 있는가?

토론B : 전체 문제상황을 다음 그림과 같이 나타내도록 하는데 polya가 제시한 문제이해와 계획 수립에 있는 질문을 통해 정보를 확인한다. 문제의 정보공간분석을 하도록 한다.

(배의정지속도)= 4 km, (시간)= 2
(이동속도)= 4 km+ $x$km
(거리)=(이동속도)×(시간)

$\longrightarrow$

$\longleftarrow$

(배의정지속도)= 4 km, (시간)= 6
(이동속도)= 4 km− $x$km
(거리)=(이동속도)×(시간)

출발점(상류) 도착점(하류)

〔그림 3〕

토론C : 알맞은 방정식을 정보공간에서 확인하도록 한다(그림 2).

발전학습 : 교사는 기본문제와 구조가 비슷한 문제를 제시하는데 다음 기준에 의한다.

① 동형인 문제제시

② 문제구조의 변화를 준다.

③ ①과②를 제시할 때 과다정보, 과소정보도 고려해본다.

A. 시속 8 km로 잔잔한 강에서 갈수 있는 여객선이 상류에 있는 갑도시에서 하류에 있는 을도시로 가는데 4시간 걸렸

다. 이 여객선이 을도시에서 여행객을 내리고 다시 갑도시로 돌아가는데 10시간이 결렸다. 물결의 속도는 얼마인가.

B. 강물을 따라 A, B 두 도시가 있다. 거리는 24km이다. 지금 상류 B와 하류 A의 중간 지점에 다리가 있는데 B에서 다리까지는 배를 이용하고 다리에서 A까지는 걸어간다. 이 조건하에서 여행자는 B에서 A까지 5시간 걸렸고 A에서 B까지는 7시간 걸렸다. 만일 물의 흐름이 없다면 두 도시는 $5\frac{2}{3}$시간이 걸린다. 물결의 속도를 구하여라.

토론D : 학생이 문제를 하나 창안하게 하고 정보공간분석을 통해 해의 길을 찾도록 한다.

정형문제 2

학생A는 오전 9시 30분에 집을 나와 자전거로 시속 12km속도로 학교를 향해 출발했다. 9시 45분에 그의 형 B는 동생이 놓고간 수학책을 전달하기 위하여 같은길을 자전거로 달려 20분 뒤에 동생 A를 만났다. 형 B는 얼마의 속도로 달렸는가?

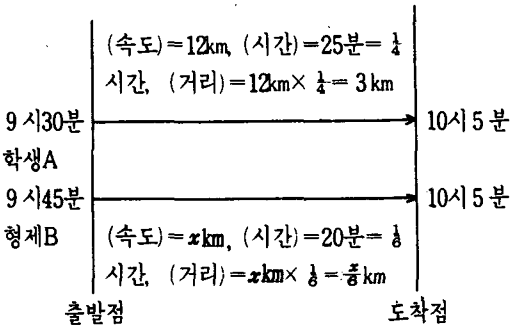
목표 : 주어진 문제와 유사한 문제를 제시하고 그 문제의 정보공간분석을 통해 해의 길을 찾도록하는데 있다.

토론A : 다음을 교사는 설명한다.
어떤 사람이 여행한 거리와 다른 사람이 여행한 거리가 같을때, $D_1 = D_2$로 표시한다. 단, 여기서 D는 거리를 나타내는 문자이다. 여행자의 출발점과 도착점은 같으나 두 사람중 한 사람은 다른 길로 더 먼 거리를 여행했을 때 이때 푸는 방법은 $D_1 + C = D_2$가 된다. 여기서 D_1은 짧은 거리이고 C는 여행자가 여행한 거리에 더해진 상수이다.

토론B : 학생A, B가 달린 속도와 시간을 이용한 거리는

(거리) = (속도) × (시간)

토론C : Polya의 질문을 이용 다음과 같이 문제상황을 도식화 한다.



〔그림 4〕

토론D : 방정식을 풀고 해를 구하고, 검산을 반드시 시킨다.

발전문제 제시

첫째 문제는 기본문제에서 시간, 속도, 명칭만을 바꾼 문제를 제시한 다음 다음과 같은 문제를 계속 풀도록 한다.

시속 30마일로 여행하는 자동차가 오전 10시에 일정한 장소를 떠났다. 오전 11시 30분에 시속 40마일로 달리는 다른 자동차가 같은 장소를 출발하여 같은 도로로 여행하였다. 두번째 차가 첫번째 차를 추월하는데는 얼마나 많은 시간이 걸리겠는가?

두 기차의 속도의 합은 시속 100마일이다. 두 기차중 빠른 기차는 늦은 기차보다 4시간후에 출발하여 8시간 걸려 늦은 기차를 추월했다. 두 기차의 속도를 구하여라

A비행기는 도시 A를 출발하여 도시 B로 향하였다. 2시간후 B비행기는 A비행기의 속도보다 50마일 빠르게 A비행기가 간 길보다 50마일 긴 길을 택하여 B도시로 향하였다. 두 비행기는 두번째 비행기 B가 출발한지 5시간 후에 도시 B에 동시에 도착했다. 두 비행기의 속도를 구하여라.

토론E : 학생들 스스로 유사한 문제를 만들고 정보공간분석을 하게하여 해의 길을

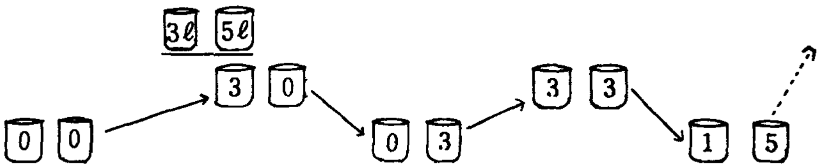
찾도록 한다.

비정형문제

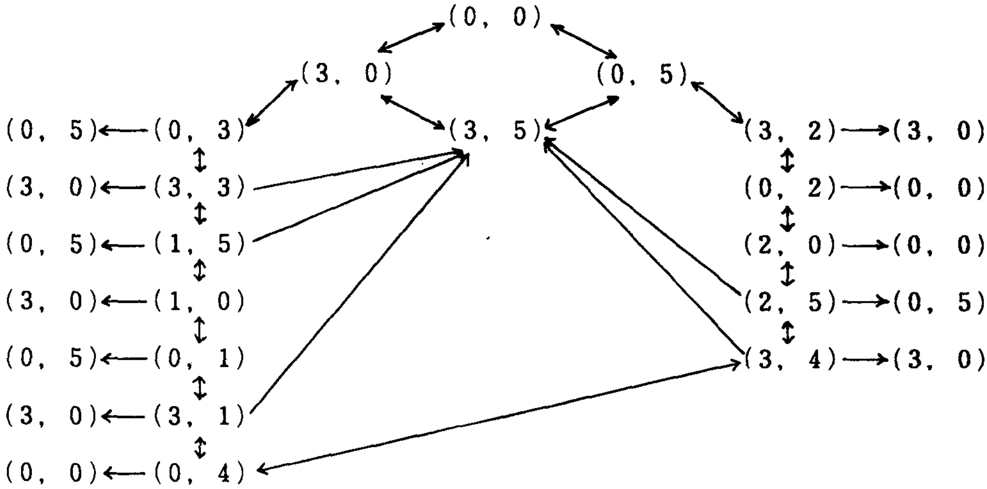
지금 학생A가 강가에 서 있다고 하여보자. 학생 A는 두개의 눈금이 없는 양동이를 들고있는데 하나는 꼭 3ℓ의 물을 담을수 있고 다른 하나는 꼭 5ℓ의 물을 담을 수 있다. 양동이의 물을 비워도 좋고 다른 양동이에 물을 부어도 좋다면 어떻게 해서 학생 A는 꼭 4ℓ의 물을 길어올수 있을까?

상황 1 : 교사는 학생들로 하여금 빈컵 두개를 준비하게 하여 가능한 이동(move)를 종이에 나타내도록 한다.

상황 2 : 학생들로 하여금 문제를 푸는 과정을 시행착오를 통해 그림으로 표현하게 한다.



4ℓ문제의 정보공간분석



〔그림 5〕

상황 3 : 학생들로 하여금 완전 정보공간분석을 을 학도록 하고 해의 길을 제시하도록 한다.

5. 결론 및 토론

본 연구에서는 두가지 변인에 의한 응용으로 정형문제와 비정형문제를 통해 학교수학에서 가능한 지도의 실제를 제시하였다. 그러나, 본 연구에서는 문제해결 연구에서 거론되고 있는 과제변인(task variable)중 극히 일부분만 취급하였다. 문제의 종류를 어떤 관점으로 나누어야 할것인가? 유사한 문제란 어떤 방법으로 정의를 해야 할 것인가? 유사한 문제군을 형성했을 때 문제군에 알맞은 알고리즘 및 전략변인은 어떻게 정해주어야 하는가? 등등 창의력있는 연구가 진행되어야 한다.

Reference

1. Days, H. C. The effect of problem stucture on the processes used by con-

crete and formal-operational students to solve verbal mathematics problems. ***un-published doctoral dissoration,*** Purdue University, 1977.

2. Goldin, G. A. Artificial intelligence models for human problem solving. ***Technicial Report, Graduate School of Education,*** University of Pennsylvania, 1973.
3. Kilpatrick, J. Variables and methodologies in research on problem solving. ***paper presented at the Research Workshop on Problem Solving,*** University of Georgia, 1975.
4. Knifong, J. D., & Holtan, B. An analysis of children's written solutions to word problens, ***Journal for Research in Mathematics Education,*** 1976.
5. Krutetskii, V. A. ***The psychology of mathematical ability in school-children,*** Chicago: University of Chicago Press, 1976.
6. NCTM: ***Problem solving, Research in Mathematics Education,*** Virginia: NCTM, Inc., 1980.
7. Nilssen, N. J. ***problem Solving methods in artificial intelligence.*** New York: NcGraw-Hill, 1971.