論　文

J.of the korean Institute
of Industrial safety
Vol. 2, No. 3, Dec, 1987.
PP. 1-7

모우드Ⅲ 荷重下의 界面균열에서의 塑性變形

Plastic Deformation in an Interface Crack under Mode III Loads

朴 宰 鶴
충북대학교 공과대학 산업안전공학과

Jai Hak Park
Department of Industrial Safety Engineering, Chungbuk National Univ., Cheongju, Korea

ABSTRACT

The effect of plastic deformation in an interfacial crack is considered. Yield zones are assumed to have the form of a strip along the interface. The crack is subjected to mode III loads at infinity and lies along the interface of two semi-infinite planes iwth different material properties. The sizes of the yield zones, the relation between the size of the yield zone and CTOD are obtained in a closed form solution. The *J* integral also can be obtained in a closed form solution.

1. 서　　론

界面균열(interface crack)이란 상이한 性質의 두 材料가 接合된 경우 그 接合面 內에 존재하는 균열을 지칭하는 것이다.

그 例로서는 接着劑에 의해 두 물체를 接合시킨 경우에 接合面의 일부분에서 接着力이 소실되어 형성된 균열이나, 金屬表面에 행한 코딩(coating)이나 클래딩(cladding)에서 母材와 表皮層 사이에 형성된 균열등을 들수 있다.

따라서 異性材料 간의 接合力의 소실로 인하여 발생되는 파괴나 고장의 해석을 위해서는 界面균열에 대한 理解가 요구되고 있다.

응용면에서의 중요성으로 인하여 界面균열에 대한 연구는 1959年 Williams[1]에 의해 비롯된 이래로 많은 연구자[2,3,4]에 의해서 수행되었다. 그러나 이들의 解에서는 공통적으로 균열先端 부근에서 應力場이 振動을 하고 균열面이 중첩되는 등의 물리적으로 적합하지 못한 특성을 나타내고 있다. 따라서 새로운 界面균열 모델이 Atkinson[5], Comninou[6], Sinclair[7]에 의하여 제시되었고, Park[8] 등은 保存積分을 사용함으로써 모델에 무관한 해석을 할 수 있음을 보였다. 그러나 이들의 연구는 界面을 이루고 있는 두 재료가 彈性變形만을 하는 경우에 한정되어 있다.

界面균열의 균열先端 부근에서 나타나는 높

은 應力값은 필연적으로 性變形을 동반하게 될 것이므로 보다 실제에 접근된 解析을 위해서는 소성변형에 대한 고려가 요구된다. 균열선단 부근에서 발생된 性變形을 理論的으로 완전히 해석하는 것은 거의 불가능하므로 단순화된 모델을 통하여 性變形을 고려해주려는 시도가 있어 왔는데 均質材料 內에 존재하는 균열의 경우에 대하여 Dugdale[9] 과 Bilby 등[10] 은 性域이 균열面 上에 띠모양으로 존재하고 있다고 가정함으로써 간단하게 性變形을 고려해 줄 수 있음을 보였다.

이 Dugdale 과 Bilby 등의 모델을 界面균열에 적용하여 性域을 界面 上에 띠모양으로 존재한다고 가정함으로써 소성변형의 효과를 살펴볼 수가 있는데, 이 모델에 모우드 Ⅰ의 荷重이 작용할 경우는 조종두[11] 에 의하여 연구되었고, 모우드 Ⅰ과 모우드 Ⅱ의 荷重이 함께 작용할 경우는 박재학 등[12] 에 의하여 연구되었다.

이 논문에서는 동일한 모델에 모우드 Ⅲ의 하중이 작용할 경우에 대하여 고려한다. 이 문제는 Erdogan[13] 에 의해서도 일부 다루어진 바가 있지만 여기서는 그외는 다른 轉位(dislocation)를 이용한 방법으로 해석을 행한다. 그리고 J적분을 이 문제에 적용하여 J적분이 閉形解(closed solution)로 표현될 수 있음을 보였다.

2. 모델에 대한 說明

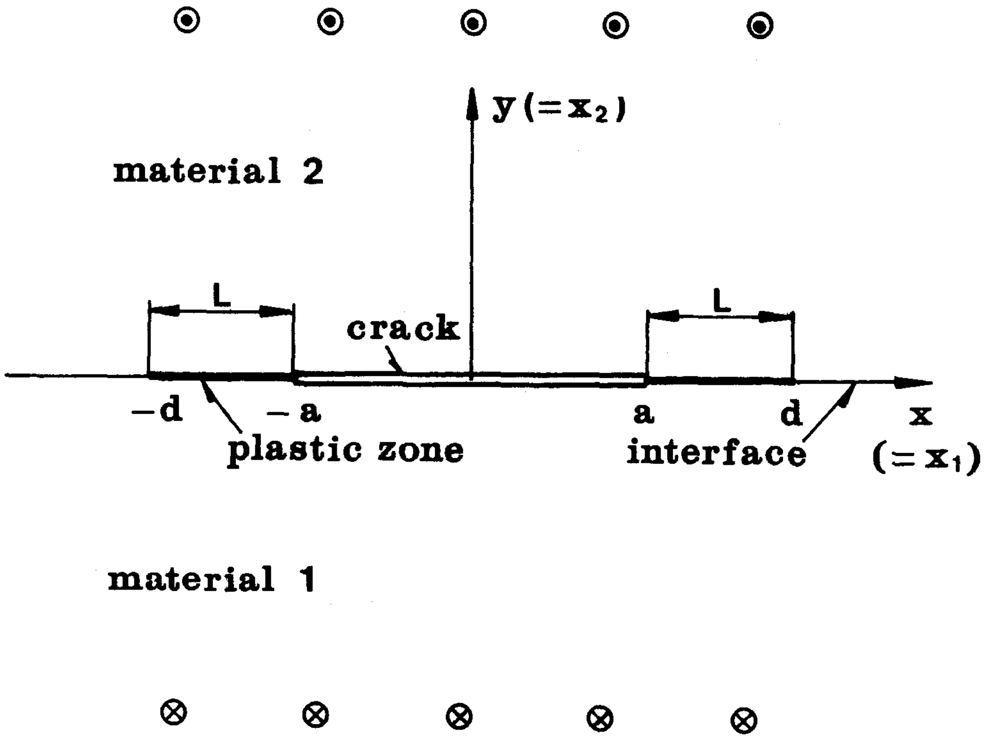

Fig.1. An interface crack model with plastic zones along the inter mode Ⅲ loads.

존재하는 균열에서의 結果와 비교해 보면, 전단탄성계수가 각각 G_1, G_2인 재료가 界面을 이루고 있는 경우의 界面균열은

$$G^* = \frac{2G_1G_2}{G_1+G_2} \quad \cdots\cdots (21)$$

에 의해 계산된 G^*의 전단탄성계수를 가지는 균질재료 內에 존재하는 균열재료와 동일한 δ와 J적분을 가지게 됨을 알 수 있다.

5. 結 論

서로 性質이 相異한 두 半無限平板으로 이루어진 界面에 존재하는 균열에 無限域에서 모우드 Ⅲ의 응력이 가해질 때의 塑性變形의 효과를 살펴보았다. 소성역은 界面 上에 띠모양으로 존재한다고 가정하였고, 균열과 소성역을 螺線轉位의 연속된 분포로 모델화하고 平衡條件을 만족하는 轉位密度函數를 구하였다.

해석결과 소성역의 크기, 균열先端에서의 相對變位 및 J적분을 閉形解(closed solution)로 구할 수 있었다.

6. 參考文獻

1) M.L. Williams, "The Stresses around a Fault or Crack in Dissimilar Media", Bull. Seismological Soc. America, Vol. 49, pp. 199-204, 1959.
2) F. Erdogan, "Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materals with Cracks", ASME J. Appl. Mech., Vol. 32, pp. 403-410, 1965.
3) A.H. England, "A Crack Between Dissimilar Media", ASME J. Appl. Mech., Vol. 32, pp. 400-402, 1965.
4) J.R. Rice and G.C. Sih, "Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media", ASME J. Appl. Mech., Vol. 32, pp. 418-423, 1965.
5) C. Atlinson, "On Stress Singularities and Interface in Linear Elastic Fracture Mechanics", Int. J. Fracture, Vol. 13, pp. 807-820, 1977.
6) M. Comninou, "The Interface Crack", ASME J. Appl. Mech., Vol. 44, pp. 631-636, 1977.
7) G.B. Sinclair, "On the Stress Singularity at an Interface Crack", Int. J. Fracture, Vol. 16, pp. 111-119, 1980.
8) J.H. Park and Y.Y. Earmme, "Application of Conservation Integrals to Interfacial Crack Problems", Mechanics of Materials, Vol. 5, pp. 261-276, 1986.
9) D.S. Dugdale, "Yielding of Steel Sheets Containing Slits", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 8, pp. 100-104, 1960.
10) B.A. Bilby, A.H. Cottrell, and K.H. Swinden, "The Spread of Plastic Yield from a Notch", Proc. Roy. Soc. London, Vol. A272, pp. 304-314, 1963.
11) 조종두, 계면균열의 새로운 모델, 한국과학기술원 석사논문, 1985.
12) 박재학, 조종두, 엄윤용, "소성역을 고려한 계면균열의 새로운 모델", 한국항공우주학회지, 제10권, 제1호, PP. 34~42, 1986
13) F. Erdogan, "Elastic-Plastic Anti-plane Problems for Bonded Dissimilar Media Containing Cracks and Carities", Int. J. Solids Structures, Vol. 2, pp. 447-465, 1966.
14) N.I. Muskhelishvili, Singular Integral Equations, P. Noordhoff, Groningen, 1953.
15) J.R. Rice, "A Path Independent Integral and The Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks", ASME J. Appl. Mech., Vol. 35, pp. 379-386, 1968.
16) W.E. Warren, "Plastic Yielding through a Two-Material Interface from Cracks under Antiplane Deformation", Int. J. Fracture, Vol. 12, pp. 843-859, 1976.
17) I. Stakgold, Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Macmillan, Vol. II, p. 12, 1968.

$x=\pm d$에서는 塑性域이 끝나는 점이므로 B(x)는 그점들에서 有限한 값을 가져야 함을 알 수 있고, Muskhelishvili[1]에 의하면 이러한 경우의 식(5)의 解는 다음과 같이 표현된다.

$$B(x)=\frac{2\sqrt{d^2-x^2}}{\pi G_1(1+\mu)}\left[\int_{-d}^{d}\frac{\tau\,dt}{\sqrt{d^2-t^2}(x-t)}+\int_{-d}^{-a}\frac{-\tau_R\,dt}{\sqrt{d^2-t^2}(x-t)}+\int_{a}^{d}\frac{-\tau_R\,dt}{\sqrt{d^2-t^2}(x-t)}\right]\cdots(6)$$

또한 해가 존재하기 위해서는

$$\int_{-d}^{d}\frac{\tau\,dt}{\sqrt{d^2-t^2}}+\int_{-d}^{-a}\frac{-\tau_R\,dt}{\sqrt{d^2-t^2}}+\int_{a}^{d}\frac{-\tau_R\,dt}{\sqrt{d^2-t_2}}=0\quad\cdots\cdots(7)$$

이 성립되어야 한다. 식(7)로부터

$$\frac{a}{d}=\cos\left(\frac{\pi\tau}{2\tau_R}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

을 얻을 수 있고, 식(6)을 계산하면

$$B(x)=\frac{2\tau_R}{\pi G_1(1+\mu)}\left[\cosh^{-1}\left(\frac{m}{a-x}+n\right)-\cosh^{-1}\left(\frac{m}{a+x}+n\right)\right]\cdots\cdots(9)$$

이 된다. 여기서

$$m=\frac{d^2-a^2}{d},\quad n=\frac{a}{d}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

이다.

균열선단에서의 균열면 사이의 상대변위를 δ라고 하면, δ는 식(2)와 식(8)로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\delta=\frac{2a\tau_R(G_1+G_2)}{\pi G_1G_2}\ln\frac{d}{a}\quad\cdots\cdots(11)$$

식(8)에서 볼 때 塑性域의 크기 L($=d-a$)은 G_1, G_2의 값과는 무관하고 단지 τ_R과 τ만의 함수가 됨을 알 수 있다. 식(11)에서 $G_1=G_2$라 하면 均質材料에 대하여 Bilby등[10]이 구한 解

$$\delta_h=\frac{4a\tau_R}{\pi G_1}\ln\frac{d}{a}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

가 된다. 다음과 같이 정의되는 δ_1과 δ_2를 고려하여 보자.

$$\delta_1=\frac{2a\tau_R}{\pi G_1}\ln\frac{d}{a},$$
$$\delta_2=\frac{2a\tau_R}{\pi G_2}\ln\frac{d}{a}.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

즉 δ_1은 剪斷彈性係數가 G_1, 摩擦剪斷應力이 τ_R인 均質材料 內에 존재하는 균열의 균열선단에서의 相對變位의 半, δ_2는 G_2, τ_R인 경우의 상대변위의 半이 된다. 그러면 식(11)에서

$$\delta=\delta_1+\delta_2\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

로 표현된다.

小規模降伏(small scale yielding) 즉 塑性域의 크기 L이 균열길이 a에 비하여 아주 작은 경우에는 식(8)로부터 소성역의 크기는

$$L=\frac{\pi^2\tau^2a}{8\tau_R^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

이 되고 균열선단에서의 상대변위는

$$\delta=\frac{\pi(G_1+G_2)\tau^2a}{4G_1G_2\tau_R}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

가 된다.

4. J 적 분

J적분은 2차원의 變位場에 대하여 다음과 같이 定義된다.

$$J = \oint (wn_1 - T_i \frac{\partial U_i}{\partial x}) ds \cdots\cdots (17)$$

중복된 添字는 合(summation)을 의미한다. 그리고 W는 變形에너지密度, T_i는 트랙션벡터(traction vector), U_i는 變位벡터이고, s는 적분경로에서의 거리, n_1은 적분경로의 진행방향에 대하여 오른쪽으로 垂直한 單位벡터의 x方向 成分이다.

그림 2에 圖示된 두 積分經路 Γ_1과 Γ_2를 고려해 보자. Γ_2는 균열선단에서 멀리 떨어진 임의의 적분경로이고 Γ_1은 Γ_2를 소性域에 무한히 접근시켰을 때의 적분경로이다. 이 경우 Γ_1에 대하여 계산한 J적분과 Γ_2에 대하여 계산된 J적분은 서로 동일한 값이 됨을 證明할 수 있다.[8]

Γ_1에 대해서는 $d_y = 0$이므로 J적분은 다음과 같이 된다.

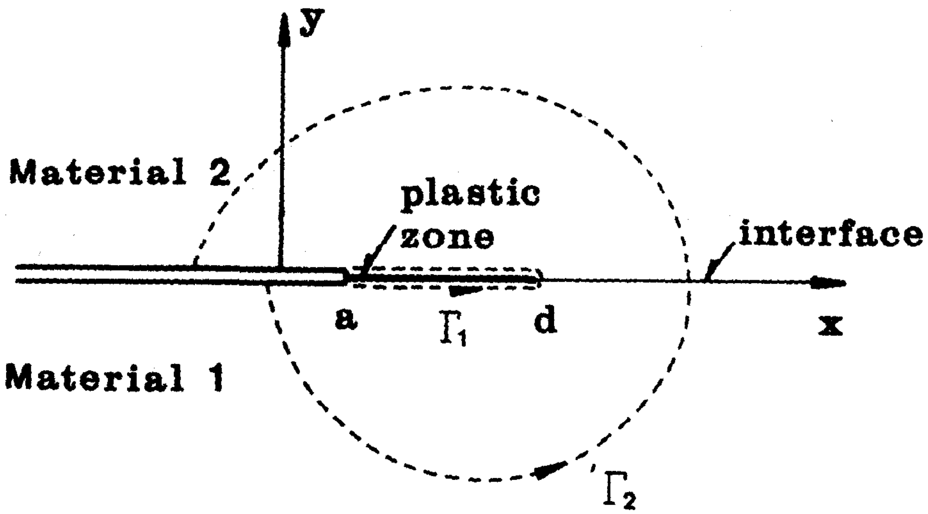

Fig.2. Integration paths.

$$\begin{aligned} J &= -\int_{\Gamma_1} T_i \frac{\partial U_i}{\partial x} ds \\ &= -\int_{\Gamma_1} \sigma_z \frac{\partial h(x)}{\partial x} dx \\ &= \tau_R \int_0^{\delta} dh \\ &= \tau_R \delta . \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (18) \end{aligned}$$

따라서 식 (11)로부터 J적분은

$$J = \frac{2a\tau_R^2 (G_1 + G_2)}{\pi G_1 G_2} \ln \frac{d}{a} \cdots (19)$$

가 되고 小規模降伏의 경우는

$$J = \frac{\pi (G_1 + G_2)}{4 G_1 G_2} \tau^2 a \cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

가 된다.

식 (11) 및 식 (19)의 結果를 均質材料 內에

부록 : 螺線轉位에 의한 응력분포

그림 3에 圖示된 바와 같이 剪斷彈性係數가 각기 G_1, G_2인 두 반 無限平板이 x軸을 따

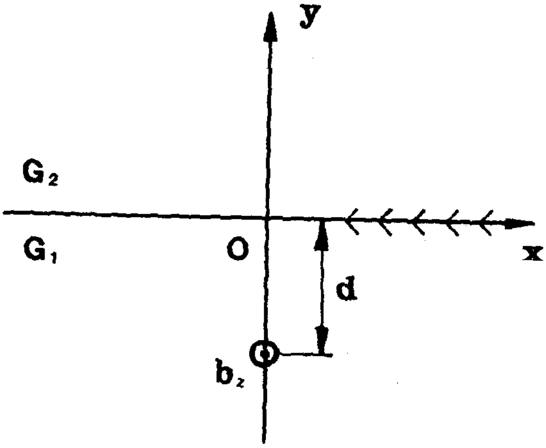

Fig.3. A screw dislocation near interface

라 완전히 接合되어 있고 陰의 y軸 上에 버거스벡터 b_Z인 螺線轉位가 존재한다고 하자. 이 경우 버거스벡터의 정의는 FS/RH 규정을 따른다고 한다. 참고문헌 16에 주어진 응력함수를 이용하여 평판 內에서의 응력분포를 구하면 다음과 같이 된다.

$$\sigma^1_{xz} = (-)\frac{G^1 b_z}{2\pi}\left[\frac{y+d}{(y+d)^2+x^2} + \mu\frac{y-d}{(y-d)^2+x^2}\right]$$

$$\sigma^1_{yz} = \frac{G_1 b_z}{2\pi}\left[\frac{x}{(y+d)^2+x^2} + \mu\frac{x}{(y-d)^2+x^2}\right]$$

$$\sigma^2_{yz} = (-)\frac{G_1(1+\mu)b_z}{2\pi}\frac{y+d}{(y+d)^2+x^2}$$

$$\sigma^2_{yz} = \frac{G_1(1+\mu)b_z}{2\pi}\frac{x}{(y+d)^2+x^2}$$

그림 3에서 $d=0$인 경우 즉 나선전위의 위치가 原點인 경우의 x軸을 제외한 곳에서의 응력분포는

$$\sigma^1_{xz} = \sigma^2_{xz} = (-)\frac{G_1(1+\mu)b_z}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\sigma^1_{yz} = \sigma^2_{yz} = \frac{G_1(1+\mu)b_z}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

가 된다.

Stakgold[17]의 델타函數에 관한 定理로부터, $f(x)$가 陰이 아닌 적분가능한 函數이고

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

을 만족하는 경우 陽의 α에 대하여 $f_\alpha(x)$를

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}f\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

로 定義하면

$$\text{line}_{\alpha\to 0} f_\alpha(x) = \delta(x)$$

가 된다는 사실을 이용하면 螺線轉位가 座標의 原點에 존재할 경우 x軸 上에서의 응력은

$$\sigma_{xz} = (-)\frac{G_1(1+\mu)b_z}{2}\delta(x)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{G_1(+\mu)b_z}{2\pi}\frac{1}{x}$$

이 된다. 여기서 $\delta(x)$는 Dirac의 δ函數이다.

존재하는 균열에서의 結果와 비교해 보면, 전단탄성계수가 각각 G_1, G_2인 재료가 界面을 이루고 있는 경우의 界面균열은

$$G^* = \frac{2G_1G_2}{G_1+G_2} \quad \cdots\cdots (21)$$

에 의해 계산된 G^*의 전단탄성계수를 가지는 균질재료 內에 존재하는 균열재료와 동일한 δ와 J 적분을 가지게 됨을 알 수 있다.

5. 結 論

서로 性質이 相異한 두 半無限平板으로 이루어진 界面에 존재하는 균열에 無限域에서 모우드 Ⅲ의 응력이 가해질 때의 塑性變形의 효과를 살펴보았다. 소성역은 界面 上에 띠모양으로 존재한다고 가정하였고, 균열과 소성역을 螺線轉位의 연속된 분포로 모델화하고 平衡條件을 만족하는 轉位密度函數를 구하였다.

해석결과 소성역의 크기, 균열先端에서의 相對變位 및 J 적분을 閉形解(closed solution)로 구할 수 있었다.

6. 參 考 文 獻

1) M.L. Williams, "The Stresses around a Fault or Crack in Dissimilar Media", Bull. Seismological Soc. America, Vol. 49, pp. 199-204, 1959.
2) F. Erdogan, "Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materals with Cracks", ASME J. Appl. Mech., Vol. 32, pp. 403-410, 1965.
3) A.H. England, "A Crack Between Dissimilar Media", ASME J. Appl. Mech., Vol. 32, pp. 400-402, 1965.
4) J.R. Rice and G.C. Sih, "Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media", ASME J. Appl. Mech., Vol. 32, pp. 418-423, 1965.
5) C. Atlinson, "On Stress Singularities and Interface in Linear Elastic Fracture Mechanics", Int. J. Fracture, Vol. 13, pp. 807-820, 1977.
6) M. Comninou, "The Interface Crack", ASME J. Appl. Mech., Vol. 44, pp. 631-636, 1977.
7) G.B. Sinclair, "On the Stress Singularity at an Interface Crack", Int. J. Fracture, Vol. 16, pp. 111-119, 1980.
8) J.H. Park and Y.Y. Earmme, "Application of Conservation Integrals to Interfacial Crack Problems", Mechanics of Materials, Vol. 5, pp. 261-276, 1986.
9) D.S. Dugdale, "Yielding of Steel Sheets Containing Slits", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 8, pp. 100-104, 1960.
10) B.A. Bilby, A.H. Cottrell, and K.H. Swinden, "The Spread of Plastic Yield from a Notch", Proc. Roy. Soc. London, Vol. A272, pp. 304-314, 1963.
11) 조종두, 계면균열의 새로운 모델, 한국과학기술원 석사논문, 1985.
12) 박재학, 조종두, 엄원용, "소성역을 고려한 계면균열의 새로운 모델", 한국항공우주학회지, 제 10권, 제 1호, PP. 34~42, 1986
13) F. Erdogan, "Elastic-Plastic Anti-plane Problems for Bonded Dissimilar Media Containing Cracks and Carities", Int. J. Solids Structures, Vol. 2, pp. 447-465, 1966.
14) N.I. Muskhelishvili, Singular Integral Equations, P. Noordhoff, Groningen, 1953.
15) J.R. Rice, "A Path Independent Integral and The Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks", ASME J. Appl. Mech., Vol. 35, pp. 379-386, 1968.
16) W.E. Warren, "Plastic Yielding through a Two-Material Interface from Cracks under *Antiplane Deformation*", Int. J. Fracture, Vol. 12, pp. 843-859, 1976.
17) I. Stakgold, Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Macmillan, Vol. II, p. 12, 1968.