Journal of Historia Mathematica Vol.4. No.1, 1987.9
The Society of Korean Mathematical History

近代積分概念의 定立과 測度理論의 發展

목포대학 수학과 정 춘 택

0. Riemann 이전(Euler~Dirichlet)의 積分概念

積分의 現代的概念의 전개는, 函數概念의 발전과 19世紀初 이래의 實變數函數에 관한 면밀한 검토와 밀접한 관계가 있다. 이미, Euler (L. 1707~1783)는 [函數概念을 상당히 一般化하였다. 그는 '函數'를, 解析的으로 定義되는 것에 대해서만 한정할 것이 아니라, 경우에 따라서는 복수의 曲線弧에 의해 주어진 임의의 函數一至는, '不連續'인 函數一에 관해서도 생각할 필요가 있음을 주장하고 있다.[1] 그러나, 구체적으로 不連續函數가 3角級數의 합으로 나타내어진다는 것을 보여주고, 다음 세대에 결정적인 영향을 미친 것은 Fourier (J.B. 1768~1830)이다. 그는, 〈解析的熱理論〉("Théorie analytique de la chaleur," 1822)속에서 이른바 'Fourier級數'를 전개하여, 어떤 函數 $y=f(x)$도 이것에 의해 나타내어질 수 있음을 밝혔다. 즉,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx+\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

단, $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

하지만 Fonrier의 證明에는 엄밀성이 결여되어 있었을 뿐더러, 적용되는 범위도 분명하지 않았다. 게다가, '積分'은 직접 面積의 概念과 연관지어져서 定義되어 있다. 積分의 解析的인 定義가 定立된 것은 Cauchy (A.-L. 1789~1857)부터서이다. 定積分에 관한 그의 理論은, 〈Ecole polytechnique에 있어서의 無限小解析學講義要綱〉("Résumé des leçons données à l'Ecole polytechnique", 1821)에서 다루어지고 있다. 近代積分論의 기틀이된 Cauchy의 定積分의 定義는 다음과 같다.

f를 區間 $[a,b]$에서 連續인 實函數로 하고, 이 區間의 成分의 列 $\langle xi\rangle$는, $a<x_1<\cdots<x_{n-1}<b$를 만족한다고 할 때, 合 S,

$$S=(x_1-a)f(a)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(b-x_{n-1})f(x_{n-1})$$

는 명백히 다음 條件에 의존한다.

i. 差 $b-a$의 分割에 쓰인 成分의 數 n,

ii. 이들 成分의 값, 따라서, 여기서 취해진 分割方法.

그리고,

1) L. Euler, "Opere Omnia" vol. 23, s. 74~91.

$$\sup_{0\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1}) \to 0$$

일 때의 S의 極限이 分割方法에 의존하지 않음을 證明하기 위해 그는, $[a,b]$에서의 函數 f의 平等連續性을 암암리에 전제로 삼고 있다.[2] 그리하여, $[a,b]$상의 連續函數에 대해 $\lim_{h\to 0} S$가 존재한다는 것을 證明하였다.

『이 極限은, 오직 函數 $f(x)$와 變數 x에 주어진 限界値 x_0, x에 의해서만 정해진다. 이 極限이 이른바 定積分이다.』[3]

이것을 그는

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx^{4)}$$

로 나타내었다.

定積分의 가장 중요한 응용의 하나로, 函數 f가 區間 $[a,b]$에서 n階까지의 連續인 導函數를 갖는다고 假定한, Taylor의 公式

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt$$

에 관한 Cauchy의 證明[5]을 꼽아야할 것이다. 이 결과를 바탕으로, 그는, 函數의 無限級數展開에 관한 Taylor의 定理를 유도하고 있다.[6] 그러나 函數項의 級數에 관한 定理에서 그는 잘못을 저지르고 있다. 즉, 一般項 $u_n(x)$를 갖는 連續函數의 級數가 임의의 $x\in[a,b]$에서 收斂할 때,

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx$$

이라는 그릇된 定理가 그것이다.[7] 이 점에 관해서는, 뒤에서 보는 것처럼, Riemann도 오류를 범하고 있다. 이러한 不正確性을 몇군데서 지적할 수 있음에도 불구하고, 그 자신의 말 그대로 Cauchy는,

『(모든 數學者중에서) 公式을 엄밀히 證明하고, 그 적용범위를 옳바르게 한정시켜야할 필요성을 가장 자각하였던 사람중의 하나』[8]

였던 것은 틀림없다.

Fourier級數의 收斂에 관해서 최초로 엄밀한 證明을 세운 것은 Dirichlet (P.G.L. 1805~1859)이다. 그는, Cauchy가 1827년에 발표한 證明[9]이 불완전하다는 것을 지적한데 이어, 자신의 證明을 제시하였다.[10]

2) A.-L. Cauchy, "Résumé des leçons données á l'Eccle polytechnique"(pp. 123~125)
실제로, 그는 임의의 分割에 대응하는 合 S, S'의 差가 $h(=\sup_{0\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1}))\to 0$일때 0에 收斂함을 證明하기 위해서

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\mu=\mu(\varepsilon)\ \forall x_i,\ x_j : |x_i - x_j| \leq \mu \to |f(x_i) - f(x_j)| \leq \varepsilon$$

를 전제로 推論하고 있는데, 이것은 옳다.

3) *ibid.*, pp. 126.

4) 『이 記號는 Fourier의 고안을 따른 것이다』라는 단서를 그는 덧붙였다.

5) *ibid.*, pp. 212.

6) *ibid.*, pp. 221.

7) *ibid.*, pp. 237.

8) A.-L. Cauchy, "Oeuvres comphétes" (2), vol. XV, pp. 150.

9) A.-L. Cauchy, "Mémoire sur les développements des fonctions en séries périodiques," (Mémoires Acad. Roy. Sci., vol. Ⅵ pp. 603~612, 1827).

10) P.G.L. Dirichlet, "Sur la convergence des séries trigonometriques qui servant à représenter une fonction arbitraire entre des limites données" (J. Reine Angew. Math. vol. Ⅳ, pp. 157~169). Cauchy는 두 級收의 一般項 u_n, v_n의 同値性을 이용하여, 一般項 u_n의 級數

즉,

區間 $[0, h(>0)]$에서 連續單調인 實函數 f에 관해

$$L=\lim_{k\to\infty}\int_0^h \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}f(\beta)d\beta=\frac{\pi}{2}f(0)$$

를 求하여, 이것을 써서, f가 $[-\pi, \pi]$에서 區分的으로 連續單調일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$
$$=\frac{1}{2}[f(x_+)+f(x_-)]$$

임을 證明하였다.[11] 이처럼, Dirichlet는, Fourier가 뜻한바를 정확히 나타내어, 지금과 같은 函數의 一般的概念을 定義할 것이다. 이 밖에, 이 論文에서는, 函數의 不連續點의 數, 또는, 極點의 數가 定義區間에서 無限인 경우에 관해 따지고 있다.[12]

1. Riemann에 의한 積分의 定義

收斂級數는, 그 合이 項의 順序에 의존하지 않을 때 可換收斂(commutative convergence)한다고 부른다. Dirichlet는, 그의 論文에서[13], 可換收斂을 하지않는 收斂級數의 보기를 처음으로 제시하였다. 즉, 一般項이

$$u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\qquad(n\in N)$$

인 級數가 그것이다.[14] Riemann (G.F.B. 1826~1866)은 Dirichlet의 이 硏究를 이어받아, 收斂하는 一絕對收斂은 하지않는 一級數의 項을 적당히 바꿔 배열하면, 임의값에 收斂하는 級數를 얻을 수 있음을 밝혔다.[15] Gauss(C.F. 1777~1855), Dirichlet의 제자였던 Riemann은, 그의 최초의 論文[16]을 비롯하여, 줄곧 Dirichlet에 의한 函數의 定義, 즉,

『f는, 만일 그것이 x의 각 값에 대해, 어떤 확정값 $f(x)$를 對應시킬 때, 하나의 變數이다.』[17]

를 채용하였다.

Riemann은 〈3角級數에 의한 函數의 表現可能性에 관하여〉 ("Uber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe", 1854 s. 237) 속에서,

가 收斂하면, 一般項 v_n의 級數도 收斂한다는 결론을 이끌었으나, 이에 대한 反例로서 Dirichlet는

$$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\quad v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]$$

을 제시하였다.

11) *ibid.*, pp. 168~169.

12) 極大極小의 첫수가 無限인 경우와 관련해서, Dirichlet는 連續函數 f의 Fourier級數가 f에 收斂한다고 생각하였으나, 이것은 옳지않다.

13) Gesamm, math, Werke, vol. I, s. 318~319.

14) 실제로, 이 級數의 項을 바꾸어서 배열한 결과 얻어지는 一般項

$$v_n=\frac{1}{\sqrt{4(n-1)+1}}+\frac{1}{\sqrt{4(n-1)+3}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

인 級數는 收級하지 않는다.

15) G.F.B. Riemann, "Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reiche" (1854, s. 234~235).

16) G.F.B. Riemann, "Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer Veränderlichen complexen Grosse" (1851).

17) G.F.B. Riemann, "Über die Darstellung gang willkürlicher Functionen durch Sinus—und Cosinusreihen" (Gesam. math. Werke, vol. I.S. 135).

다음과 같은 결과를 유도하였다. 즉,

『周期 2π인 周期函數는, 일반으로 積分演算이 可能하고, 그리고 또 無限個의 極大極小를 갖지않으면, 모두 3角級數에 의해 表現될 수 있다.』

이어서 그는, 이 積分可能條件을 다음과 같은 條件으로 바꾸어 表現하였다.

『有界인 函數가 $[a,b]$에서 積分可能이기 위한 必要充分條件은, 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 $[a,b]$를 部分區間으로 分割하였을 때, 그 중에서 函數의 移動이 ε보다 큰 것들의 길이의 合을 임의로 작게할 수 있는 일이다』 Riemann이 可算無限個의 不連續性을 지닌 有界인 函數로서 積分可能인 경우가 있음을 지적한 것은,[18] 이 分數의 硏究에 극히 중요한 영향을 미쳤다. 같은 論文에서 그는, 3角級數에 의한 表現可能性과 관련해서 새로운 方法을 도입하였다. 즉, 級數

$$\varphi(x)=A_0+A_1+\cdots+A_n+\cdots$$

$$\therefore\ A_n=\begin{cases}a_0/2 \text{ if } n=0\\ a_n\cos nx+b_n\sin nx \text{ if } n\geq 1\end{cases}$$

에서 $\lim_{n\to\infty} A_n=0$이라고 假定하여, 두번 項別로 積分하여 얻은 函數는,

『$\varphi(x)$를, 그 項이 마침내는 變數의 모든 값에 대해 無限小가 되도록 하는 3角級數에 의해서 表現하기 위한』[19] 必要充分條件에 쓰인다. 또, 이 論文에서 그는, 係數 a_n, b_n이 반드시 Fourier級數가 될 思要가 없다고 지적하여, 3角級數와 Fourier級數 사이에 중요한 差異를 주었으며, 실제 Fourier級數가 아닌 3角級數의 보기를 들고 있다.[20] 3角級數에 관한 Riemann의 이 硏究는 現代解析學의 重要한 기틀이 되었다.[21] 反面에, 그는 連續函數의 級數의 項別積分에 관해서는, Cauchy와 같은 잘못을 저지르고 있다.

Riemann의 積分思想은, Cauchy의 積分槪念, 즉, 積分의 近似過程으로부터 출발하여, 函數 f의 'Riemann合'이 區間$[a,b]$에서 어떤 極限에 접근하는 그 순간을 定義한다는 점에 잘 나타나 있다. 즉,

f를, 區間 $[a,b]$에서 定義된 實數値函數로 하였을 때,

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

$$\delta_i=x_i-x_{i-1},$$

$$S=\delta_1 f(a+\varepsilon_1\delta_1)+\delta_2 f(x_1+\varepsilon_2\delta_2)+\cdots$$
$$+\delta_n f(x_{n-1}+\varepsilon_n\delta_n),\ (0\leq\varepsilon_i\leq 1)$$

로 놓으면,

『임의의 σ,ε에 대해, 모든 σ를 無限히 작게하였을 때, 合 S가 어떤 일정한 極限値

18) G.F.B. Riemann. "Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe" (s. 242).

19) *ibid.*, s. 251.

20) *ibid.*, s. 260~264.

21) 그는 $\lim_{n\to\infty}(u_n(x)+u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+m}(x))=0$으로부터

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b[u_n(x)+u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+m}(x)]dx=0$$

을 證明하기 위해서,

$$d_n=\sup_{x\in[a,b]}|u_n(x)+u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+m}(x)|$$

로 놓았을때, $[a,b]$에서의 級數의 收斂으로부터 $\lim_{n\to\infty} d_n=0$이라는 결론을 이끌었으나, 이것은 그가 級數의 收斂의 平等性(uninformity)을 假定하였기 때문이다.

A에 얼마든지 접근한다는 性質을 갖는 경우, 이 값(=極限値)는 (定積分)

$$\int_a^b f(x)dx$$

라고 한다.』[22]

이 때,

$$D_i = \sup_{x,y \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x)-f(y)|,$$

$$h = \sup_{1 \leq i \leq n} \delta_i$$

를 각각 區間 $[x_{i-1}, x_i]$에 있어서의 函數 f의 積幅, 및 分割에 의한 小區間의 幅으로 하면, 極限値 A가 존재하기 위한 思要充分條件은

$$\lim_{h \to 0} (\delta_1 D_1 + \cdots + \delta_n D_n) = 0$$

이다.[23]

'Rieman積分'은, 無限數學에 관한 활발한 硏究動向속에서 그 위치가 定立되었다. 이 흐름은, 계속 連積體나 實變數函數 등에 관한 Weierstrass(K. T. W. 1815～1897), Du Bois-Reymond (P. 1831～1889), Hankel(H. 1839～1873), Dini(U. 1845～1918) 등의 硏究를 거쳐, 마침내 Cantor(G. 1845～1918)의 集合論을 낳게하였다. 그러니까, Riemann의 積分槪念은 無限數學의 現代的展開에 극히 중요한 위치를 차지하고 있음을 알 수 있다.

2. 測度理論의 形成과 發展

積分可能性의 條件으로서 Riemann이 제시한 形式은, 어떤 區間에 있어서의 函數의 不連積點의 集合에 대한 '測度'의 槪念을 시사하고 있다. 즉, 積分에 관한 Riemann의 定義의 바탕에는 實數集合 R에 있어서의 '區間의 길이'라는 槪念이 깔려있다. 이 사실은, Riemann 積分의 一般化와 관련해서, 먼저 測度管論의 發展에 관해 생각할 必要가 있음을 명백히 해준다.

測度理論은, 加法性·連續性을 保存한채, 길이·넓이·부피 등의 槪念을 보다 큰 集合族에게까지 適用하여 一般化한 것인데, 現代의 測度의 定義는 다음과 같다.

$(S, \mathcal{F})$가 可測空間(measurable space)[24]일 때, 다음 (1), (2)를 만족하는 $\mathcal{F}$위의 集合函數 μ를 '$\mathcal{F}$위의 測度'라고 부른다.

(1) $\forall_{A \in F}: 0 \leq \mu(A) \leq \infty, \ \mu(\phi) = 0$

(2) $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

$(A_1, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{F}, \ A_i \cap A_j = \phi)$[25]

여기서, μ가 S에 있어서의 測度일 때, $(S, \mathcal{F}, \mu)$를 測度空間, $\mu(A)$를 A의 測度라고 부른다. 특히, S가 유클레이데스 空開이고, A가 直方體일 때, $\mu(A)$가 直方體의 부피와

22) *ibid.*, s. 237.

23) 이에 관한 完全한 證明은 H. Lebesgue에 의해 제시되었다(참조 : H. Lebesgue, "Leçons sur lintegration" (1904), pp. 24～25).

24) $F = \{S_i\} (S_i \subset S)$가 다음 條件 (1), (2), (3)을 만족할때, F는 集合 S에 있어서의 集合體라고 한다

(1) $S \in F$, (2) $A \in F \rightarrow A^c \in F (A^c = S - A)$, (3) $A, B \in F \rightarrow A \cup B \in F$

여기서, F가 (1), (2)와 다음(3)'를 만족할 때, F는, S에 있어서의 'σ集合體'라고 한다.

(3)' $A_1, \cdots, A_n, \cdots \in F \rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.

F가 σ集合體일 때, F에 속하는 集合을 F—可測集合(mesurable set)이라 하고, (S, F)를 可測空間이라고 한다.

25) 이것을 完全 (σ)加法性(completely (σ) additive)이라고 부른다.

같아지면, μ를 'Lebesque 測度' (Lebesque Measure)라고 한다.

Jordan (C. 1838~1922)은 〈解析學講義〉[26] (Cours d' Aalyse de l'Ecole Polytechnique, 1909) 속에서, 길이 · 面積 등을 一般的인 입장에서 다루고 있다. 즉, 그는, 이것들의 量을 一般으로—1次元 · 2次元 · 3次元, … 등의— '延長' (étendue)이라고 불렀는데, 오늘날, 그가 도입한 이 'étendue'를 특히 'Jordan 測度' 그리고 Jordan測度가 확정지어는 것을 'Jordan可測'이라고 한다. 앞에서 언급한바와 같이 현재, 길이 · 넓이 등의 槪念의 확장은 일반으로 '測度' (measure)라고 불리어져 있는데, 이 測度의 定義에는 다음 두 條件이 必須的으로 선행해야 한다. 즉, 두 集合 A, B에 관해서,

$$\mathrm{A}\sim\mathrm{B}\Rightarrow m(\mathrm{A})=m(\mathrm{B}) \quad \cdots\cdots ①$$

$$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\phi\Rightarrow m(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=m(\mathrm{A})+m(\mathrm{B}) \quad \cdots\cdots ②$$

Jordan測度는 이 두 條件을 명백히 만족시킨다.

이러한 관점에서는, Jordan測度의 定義는 극히 자연스렇게 받아드릴 수 있으나, 그만큼 너무도 '常識的'이어서, Jordan河測인 集合의 범위가 극히 제한되어 있다는 결함이 있다. 點集合중에는, Jordan可測이 아닌 것이 자주 나타난다. 예를 들어, 平面上의 單位正干角形 U 내부의 有理點 전체의 集合 W에 관해서 생각해보면, $\overline{\mathrm{W}}=\mathrm{U}$이기 때문에, W의 '外面積'은 1이지만, 그 '內面積'은 0이다. 따라서 W은, Jordan可測은 아니다. W의 濃度가 기껏 可附番인데 비하여는, U는 連續體의 濃度—非可附番의 濃度—를 지니고 있기 때문에, $m(\mathrm{W})=0$ 이어야 하는데, 이 결과는 Jordan測度의 범위에서는 얻을 수 없다.

Borel(E. 1871~1956)은 函數論에의 응용과 관련해서, Jordan과는 전혀 다른 입장에서 點集合에 일종의 測度를 부여해야할 필요성을 그의 〈函數論講義〉[27]에서 강조하였다. 이른바 'Borel測度'는, 위의 ①, ②외에 다음 條件을 만족한다.

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathrm{A}_i)=\sum_{i=1}^{\infty}m(\mathrm{A}_i)$$

$$(\forall A_i, A_j : \mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_j=\phi) \quad \cdots\cdots ③$$

Borel可測인 集合 전체의 集合 K는 다음 性質을 지닌다.

$\mathrm{B}_1 : \mathrm{A}=\{\mathrm{A}_i\}_{i=1,\ldots,n,\ldots},\ \mathrm{A}_i\subset\mathrm{K}\longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty}\mathrm{A}_i\subset\mathrm{K}$

$\mathrm{B}_2 : \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2\subset\mathrm{K}, \mathrm{A}_2\subset\mathrm{A}_1\longrightarrow\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_2\subset\mathrm{K}$

$\mathrm{B}_3 : \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2\subset\mathrm{K}\longrightarrow\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\subset\mathrm{K}$

이 集合體 K를 일반으로 'Borel 集合體'—또는 '完全加法的集合體'—라고 한다.

Borel의 착상은, 처음으로 '完全加法的'인 測度를 도입하였다는 점에서 중요한 의의를 지닌다. 실제로, 그 후 嚴客性이 다소나마 요구되는 數學의 온갖 分析의 理論에서는, 항상 測度의 完全加法性을 전제로 삼는 것이 편리하다는 사실이 뚜렸해졌다. 그러나, 이 Borel可測인 集合은 그 범위가 충분히 넓다고 할 수는 없다. Borel可測의 集合 전체의 族 K의 濃度는, 기껏 連續體의

26) C. Jordan, " Remarques sur les integrales definies" (J. Math. Pures Appl., (4) vol. 8, pp. 78).

27) E. Borel," Leçons sur la theorie des fonctions" (1898), pp. 46~48.

濃度 이상의 것은 아니기 때문이다.

Lebesgue(H. 1875~1941)는, 그의 學位論文 〈積學·길이·面積〉(Intégrale Longueur, Aire, 1902) 속에서, 函數의 積分, 曲線의 길이, 曲面의 面積 등의 槪念을 一般化해서 定義하려고 힘썼다. 여기서 그는, Borel의 생각의 결함을 보완하기위해, '測度의 完全加法性'을 유일한 목표로 삼고, 일반적인 測度를 定義하려고 하고 있다. 즉 Lebesgue는,

測度를 구하려는 點集合 M은 有界이고 測度의 單位가될 區間 I속에 있다고 하였을 때, M을 可附番갯수의 서로 素인 區間의 合集合으로 cover한다. 이 때, M의 '外測度' ($inf \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{I}_i$)를 m_e로 나타내면,

$$m_e(\mathrm{M})+m_e(\mathrm{M}^c)\geq 1$$

여기서, M의 '內測度' $(1-m_e(\mathrm{M}^c))$를 $m_i(\mathrm{M})$으로 나타내었을 때,

$$m_e=m_i(\mathrm{M})$$

인 集合 M을 '可測'('Lebesgue可測')이라고 부르고, 이 때의 內測度=外測度를 $m(\mathrm{M})$로 나타내었다. 이 때, Jordan可測이나 Borel可測인 集合은 모두 Lebesgue可測, 즉,

Jorden測度≈Borel測度≈Lebesgue測度

이다. 이처럼, Lebesgue測度는 Jordan測度와 Borel測度를 함께 一般化할 것이다.

3. Lebesgue積分

1901년, Lebesque에 의해 이루어진 積分의 定義의 확장[28]—'Lebesgue 積分'—은, 積分理論을 一般化시키는 결정적인 계기를 열었다. 그라, 定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

의 幾何學的 意味, 즉,

『曲線 $y=f(x)$, 두 直線 $x=a$, $x=b$, 및 x축에 의해서 둘러싸인 圖形의 面積』을,

『$a\leq x\leq b$, $0\leq y\leq f(x)$를 만족하는 點(x, y)의 集合』

으로 바꾸어 數學的으로 정확하게 표현하였다.

Riemann積分에 의해서 項別積分이 可能인 것은, 級數가 平等收斂하는 경우에 限한다. 그러나,

'剩餘가 平等有界'

라는 조건은 위의 경우보다 훨씬 弱하기 (weak) 때문에, 이 성질을 다음 積分의 성질에 덧붙이므로써 얻어지는 Lebesgue 積分은, Riemann 積分에 비하여 그만큼 적용범위가 넓어진다.

i. $\forall_{a,b,h\in R}:\int_a^b\varphi(x)dx=\int_{a+h}^{b+h}\varphi(x-h)dx$

ii. $\forall_{a,b,c\in R}:\int_a^b\varphi(x)dx+\int_b^c\varphi(x)dx+\int_c^a\varphi(x)dx=0$

iii. $\int_a^b[\varphi(x)+\varphi(x)]dx=\int_a^b\varphi(x)dx+\int_a^b\psi(x)dx$

v. $\int_a^b\varphi(x)dx\geq 0$ $(a<b)$, if $\varphi(x)\geq 0$ on (a, b)

v. $\int_0^1 1\cdot dx=1$

앞에서도 언급한 바와 같이, Lebesgue測度는 Jordan 測度의 확장인바, Jordan可測

28) H. Lebesgue, "Oeuvres scientifiques" (5 vol.) L'Enseignement math. (1972~1973), vol. 1, pp. 201~.

인 集合은 Lebesgue 可測이며, 그 Lebesgue 測度는 Jordan測度와 같다. 뿐만 아니라, Lebesgue의 방법은, Jordan의 방법으로는 可測이 아닌 集合도 可測인 것으로 할 수 있으니만큼, 可測集合의 범위를 본질적으로 확대한 셈이 된다. 마찬가지로, Riemann積分可能인 函數는 Lebesgue積分도 확정시키며, 그 積分值도 Riemann積分의 그것과 같다. 뿐만 아니라, Lebesgue 積分이 확정하는 函數의 범위는 Riemann 積分可能인 函數의 범위보다 본질적으로 확대된다. 이 확장의 중요한 의의는, 微分과 積分의 관계가 명확해졌다는 점이다. 連續函數의 범위에서는, '微分積分學의 基本定確'에 의해 微分과 積分의 連算關係는 이미 밝혀져 있었다. 그러나, 積分可能範圍를 不連續函數에게까지 확대한 Riemann積分에서는 이 逆關係는 반드시 성립한다고 할 수 없다. 즉, 어떤 不連續函數가 Riemann의 의미로 積分可能 일 때, 그 積分

$$\mathrm{F}(x)=\int_a^x \varphi(x)\,dx$$

微分可能, 즉,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}$$

가 존재하지만, 반드시 (x)와 일치한다고는 말할 수 없다. 이러한 결함은, Lebesgue 積分을 취하면 보완된다. Lebesgue 積分에서는, 그것을 微分해서 얻은 函數는, 언제나 可測 즉, 積分可能일뿐더러 그 不定積分은 微分하기 전의 函數와 일치한다.

Lebesgue積分은, 그 定義가 제시되자 곧 많은 數學者들의 주목을 끌었으며, 1910년대에는 이 理論과 관련된 거의 모든 基本定理가 Lebesgue 등에 의해 證明되었었다.[29]

積分의 理論은, 面積이라는 直觀的 概念으로부터 출발하여 發展하였다. 積分이 微分의 逆算임은 일찌기 그래프上의 直觀的考察에 의해 인식되어 있었으나, 連續函數의 積分의 概念이 直觀을 떠나서 定義된 것은 Cauchy에 의해서였다. Riemann은, Cauchy의 法則에 의해서 積分을 計算할 수 있는 函數를 '積分可能函數'라고 불렀다. 이어서, Lebesgue에 의해, 積分의 適用範圍가 自然스렇게 확대되어 近代的인 積分理論의 확립을 보게되었으나, 이 過程과 병행해서 測度의 槃念이 계속 權討되어 왔다는 사실에 注目할 필요가 있다.

---

29) 참조 : H. Lebesgue, Intégrale, longueur, aire, *Ann. di Mat.* (3), t. Ⅶ (1902), p. 231~359.
H. Lebesgue, Sur les séries trigonométriques, *Ann, Ec. Norm. Sup.*, (3), t. ⅩⅩ (1903), p. 453~485.
H.Lebesgue, *Lecons sur l'Integrationla recherche das founctions primitives,* Paris (Gauthier-Villars), 1904.
H. Lebesgue, Sur le problème de Dirichlet, *Rend. Palermo,* t. ⅩⅩⅣ (1907), p. 371~402.
H.Lebesgue, Sur l'intégration des fonctions discontinues, *Ann. Ec. Norm. Sup.* (3), t. ⅩⅩⅦ (1910), p. 361~450.
이들 결과중에서 최초의 그리고 가장 쓸모있는 成果는 '有界收斂의 定理' 즉
『積分可能인 函數列 $\langle\varphi_n\rangle$이 어떤 函數 f에 單純收斂하고, 至, 積分可能인 變數$g(\geq 0)$로서 모든 n에 관해서 $|\varphi_n|\leq g$인 것이 존재하면, f은 積分可能이고,

$$\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n(x)\,dx=\int(\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x))\,dx$$

일 것이다.