複數品目 랜덤 結合注文政策의 最適解와 比較

Optimal Solution and Comparison for the Augmented Multi-item Random Orders

權 熙 哲 *
金 滿 植 **

Abstract

Multi-item inventory problems can be well characterized by the nature of interaction of the quantities and timing. This interaction may be due to the effect of certain combination of orders. It is that the set-up cost of ordering individual items can be saved by jointly ordering at a time. This study finds a decision criteria of optimum inventory policy through the comparisions of individual multi-item order policy(IMP), joint multi-item order policy(JMP), augmented multi-item order policy(AMP) in cost ratio. Subsequently we assume that there exists a unique optimum order level corresponding to an optimum reorder range for the augmented multi-item order, at which a cost saving is maximum.

1. 序 論

複數品目 在庫問題에서는 서로 다른 品目들이 量과 注文時期의 相互相衝的 特性으로 매우 잘 特徵지워질 수 있다. 注文量이나 注文時期決定이 독립적이 아닌 의존적 성질을 가지게 되면 相互作用때문에 全體 在庫水準은 어떤 制限을 받거나 注文方法에 따른 結合效果를 招來하게 된다.[8, 9]. 本研究의 範圍는 後者의 問題를 대상으로 한다.

在庫시스템의 性格에 따라 여러 品目을 한꺼번에 注文하면 個別的으로 發注할 때보다 Set-up 費用面에서 經濟的 으로 有利함은 이미 잘 알려져 있다[10]. 특히 최근에는 生産－在庫問題에서 Set-up을 주제로 하는 다시 말해 Set-up을 파라메타가 아닌 결정변수로 다루는 Set-up 費用의 감축문제 또는 Set-up과 販賣수요을 同期 最適化 問題등의 研究도 있다[2, 4].

本研究는 多品目－複合注文으로 인한 Set-up費用과 다른 費用과의 結合效果 特性이 어떤 경우에 便益을 줄 수 있는가를 從來의 方法과 比較할 것이며 특히 再注文 範圍의 랜덤성을 부여하여 模型을 再設定하고 各 評價項目의 最適決定方法을 구한다. 解析의 單純性을 위해 몇가지 假定들과 EOI를 適用한다.

* 曉園工業專門大學 工業經營學科
** 漢陽大學校 產業工學科
接受日：1987 12. 15

2. 多品目 個別注文 政策

多品目 個別注文政策(Individual Multi-item Order Policy：IMP)은 媒介變數를 독립적으로 용이하게 修正할 수있는 可能性을 주기 때문에 各各의 單一品目에 對해 最上의 在庫模型을 設定하는데 있어서 시스템에 상당한 柔軟性을 提供하므로 一部에서는 多品目 在庫시스템의 컴퓨터 分析에 이 政策을 더 選好하기도 하지만[5, 11] IMP는 다른 政策의 比較目的으로 使用될 것이다.

本研究에서 쓰일 몇가지 基本記號와 複數品目 EOI는 다음과 같다.

R_i：品目 i의 수요속도
H_i：品目 i의 在庫維持費
T_i：品目 i의 再注文期間
S_i：品目 i의 Set-up費($S_{if}+S_{is}$
S_{is}：結合注文時 Set-up의 節減
SS：全 Set-up費

$M_i : 1-(S_{is}/S_i) = \frac{S_{it}}{S_i}, \ 0 \leq M_i \leq 1$

TCI : IMP에서의 總在庫費用

TCJ : JMP에서의 總在庫費用

TCA : AMP에서의 總在庫費用

k개의 品目들에 대한 總在庫費用은

$$TCI = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2} R_i H_i T_i + \frac{S_i}{T_i}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2-1)$$

$$T_{i0} = \left(\frac{2S_i}{R_i H_i}\right)^{\frac{1}{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2-2)$$

$$TCI_0 = \sum_{i=1}^{k} (2S_i R_i H_i)^{\frac{1}{2}} = 2 \sum_{i=1}^{k} \frac{S_i}{T_{i0}} \ \cdots \quad (2-3)$$

이때 最適注文量은 다음과 같다.

$$Q_{i0} = R_i T_{i0} = \left(\frac{2R_i S_i}{H_i}\right)^{\frac{1}{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2-4)$$

3. 多品目 複合注文 政策

多品目-複合注文政策(Joint Multi-item Order Policy : JMP)에서는 個別注文보다 結合注文을 하면 Set-up費用, 在庫水準의 감독용이, 일정계획의 單純化등 經濟的으로 有利한 점이 많다는 것인데 이때 各 品目의 注文量은 全品目의 注文間隔에 직접 영향을 받는다. k個의 品目을 同時注文 그리고 同一한 再注文期間 T를 고려한 JMP는 다음과 같다.

즉 JMP의 k개에 대한 總費用은

$$TCJ = \left(\sum_{i=1}^{k} R_i H_i \frac{T}{2} + \frac{SS}{T}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3-1)$$

$$T_{0j} = \left(\frac{2SS}{\sum_{i=1}^{k} R_i H_i}\right)^{\frac{1}{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3-2)$$

그러므로

$$TCJ_0 = \frac{2SS}{T_{0j}} = \left(2SS \sum_{i=1}^{k} R_i H_i\right)^{\frac{1}{2}} \cdots\cdots\cdots \quad (3-3)$$

이제 各 方式에 대한 比較基準인 總費用比率을 다음과 같이 定義한다.

$$A(\text{總費用比率}) = \frac{\text{比較될 政策}}{\text{基準政策}} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3-4)$$

3.1 同一하고 一定한 再注文期間에서의 總比率 評價

이것은 各 品目의 Set-up費用, M_i, $R_i H_i$가 모두 같은 경우를 假定한 總比率評價이다. 그래서 複合注文으로 인한 總 Set-up費用은

$$SS = kSM + (1-M)S$$
$$= kS\left(M + \frac{(1-M)}{k}\right)$$

이때 ( )을 N이라 놓으면

$$SS = kS \cdot N \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3-5)$$

(2-3), (3-3)에 (3-4)와 (3-5)를 適用하여 總費用比率을 구하면 다음과 같다.

$$A_1 = \left(M + \frac{1-M}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= N^{\frac{1}{2}}$$

이 結果를 보면 M이 1일때는 同率이나 模型의 柔軟性으로 보아 IMP가 有利하며 그렇지 않으면 Set-up費用의 節減으로 JMP가 잇점이 있음을 알 수 있다.

3.2 一定하나 서로다른 再注文期間에서의 總比率評價

이것은 3.1에서 $R_i H_i$가 다른 경우인데 (2-2), (3-2)로부터

$$1/\left(\sum_{i=1}^{k} R_i H_i / 2kS\right) = 1/\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{T^2_{i0}}$$

또 k個의 서로다른 品目에 대해

$$1/\left(\sum_{i=1}^{k} R_i H_i / 2kS\right) = T^2_{0j}$$

이므로

$$T^2_{0j} = k/\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{T^2_{i0}}\right)$$

이 式은 T^2_{i0} 調和平均임을 알 수 있다.

이 結果를 (2-3), (3-3)에 代入하여 總費用比率을 구하면 (TCJ_0/TCI_0)

$$A_2 = N^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{(T_{i0})^h}{T_{0j}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3-7)$$

이때 $(T_{i0})^h/T_{0j}$의 實行可能性은 $1/T_{i0} = U_i$로 놓고 Cauchy-Schwarz 不等式[1, 7]에 의해 滿足됨을 입증할 수 있다.

그래서 $(T_{i0})^h/T_{0j}$를 Z라 하면 (3-7)로부터 N이 $\frac{1}{Z^2}$보다 크면 IMP가 有利할 것이고 반대이면 JMP가 選擇되는 것이 나올 것이다. 또 各各의 T_{i0} 期間이 品目들 사이에 꽤 다르게 되면 이 Z는 작은 값이 아님을 짐작할 수 있다.

4. 增補된 多品目 注文政策(Augmented Multi-item Order Policy : AMP)

이제 再注文水準으로 어떤 品目의 在庫가 떨어지면 이 品目 이외의 나머지 品目들의 在庫水準이 체크되어 그들의 再注文 範圍內에 있는 모든 品目들을 모아 한꺼번에 注文하는 경우를 고려한다. 이때 再注文 範圍는 期間에 걸쳐 랜덤하게 分布되어 있고 同期注文의 發生도 랜덤現狀으로 된다고 하자. 즉 어떤 한 品目이

再注文水準에 의해 注文될 時點에서는 n個의 다른 品目(이때 n의 範圍 : $0 \leq n \leq k-1$)이 또한 어떤 確率을 가지고 同期注文될 것이다. 再注文 範圍가 커지면 結合注文 可能性이 增加될 것이고, 結果的으로 Set-up費用의 減縮을 가져오나 이와 相衝되는 效果로 平均在庫水準을 增加시키게 된다. 直觀的인 고려를 해 볼 때 最適 再注文 範圍가 存在할 것인데 그것은 相反된 퍼리를 가진 費用效果의 適切한 均衡에서만 얻을 수 있게 된다.

한편 解析의 便宜를 위해 T를 指數分布를 하는 確率變數로 하고 t를 평균 랜덤 再注文 範圍로 하고 T와 같은 分布를 따른다고 하자. 또 各 品目이 複數채널竝列待期시스템[6]과 같은 假想 채널속에 있다고 假定하면 이 시스템은 k個의 채널을 갖게 되고 同時 再注文範圍에 있는 品目數는 n이 된다. 平均서비스시간을 平均再注文 範圍라고 하면 k채널중 어느곳의 到着率은 $\frac{1}{T_0}$, 서비스율은 $\frac{1}{t}$이 될 것이다. 이때 동시주문의 期待 品目數는 시스템의 狀態確率을 얻으면 쉽게 구할 수 있고 랜덤시점은 어느 한 品目의 在庫水準이 再注文點으로 떨어질 때의 랜덤事件으로 나타낼 수 있다. 즉 이것은 結合注文의 發生이 최소한 한 品目이라도 注文되어져야 한다는 意味이므로 期待 品目數는 狀態 0을 제외한 狀態確率分布로부터 얻는다.

平均 再注文 範圍 t를 알고 $P_n(t)$를 n品目들이 同時에 그들의 再注文 範圍에 있을 確率이라고 하자. 이때 期待 品目數는

$$E[n(t)] = \sum_{i=1}^{k} n \cdot P_n(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4-1)$$

즉 平均 再注文 範圍 t가 增加하면 期待品目數도 增加함을 뜻한다.

이제 同時注文으로 期待할 수 있는 費用節減效果는

$$C_1(t) = [E\{n(t)\} - 1] \cdot S_S \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4-2)$$

또 同時注文일 경우 個別注文시스템보다 平均 $\frac{t}{2}$倍 빠르게 注文되어 지므로 이 結果로부터 期待費用增加는 (2−1)을 利用하여 誘導하면

$$C_2(t) = [E\{n(t)\} - 1] \cdot \left(\frac{R_0 H}{4} \cdot t^2\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (4-3)$$

그러므로 (4−2)와 (4−3)으로 부터 總期待費用 變化分은 다음과 같다.

$$C(t) = \frac{\{C_2(t) - C_1(t)\}}{S} = [E\{n(t)\} - 1] \cdot \left\{\left(\frac{R_0 H}{4S}\right) t^2 + (M-1)\right\} \quad (4-4)$$

또 (2−4)를 고려하면 (4−4)는

$$C(t) = [E\{n(t)\} - 1] \cdot \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{t}{T_0}\right)^2 - (1-M)\right\} \quad (4-5)$$

이것은 어떤 t_0값에 대해 陰最小值를 나타내므로 $q_0 = t_0 \cdot R_0$, 즉 여기서 結合注文에 대한 節減費用이 最大가 되며, 이에 對應하는 唯一한 最適注文水準의 存在性도 가진다. 물론 t_0와 대응하는 最小 C(t)의 解析的 決定은 (4−1)에 依存함을 알 수 있다. 따라서 狀態確率 P_0를 구하면 可能하다.

이제 (2−3)과 (4−5)로부터 總費用比率은

$$A_3 = \frac{TCA_0}{TCI_0} = \left[\frac{C(t_0)}{2E\{n(t_0)\}} + 1\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4-6)$$

이것은 (4−5)를 고려할 때 k와 M에 의해 決定되며 M<1이 현실적이므로 항상 AMP가 有利함을 알 수 있고 A_2가 A_3보다 작으면 JMP가 選擇되며 그렇지 않으면 AMP가 經濟的이다.

5. 各 比較政策 結果表와 數值例

各 比較政策의 結果를 要約하면 Table-1과 같으며 數值例는 再設定된 政策 AMP의 最適再注文範圍와 費用節減函數의 最大値를 구한 것인데 Table-2에 나타나 있으며, 이때 품목수는 k가 4, 16일때의 경우를, M은 0.3으로 했다. 물론 (4−4)에서 알 수 있듯이 C(t)는 陰數值이고 ＊表示는 最大節減費用을 나타낸다. 힘들

Table-1. The Comparative Results of the Order Policies.

	決定基準	結果	
		一定注文期間(A_1)	다른注文期間(A_2)
IMP/JMP	$A_1 = N^{\frac{1}{2}}$ $A_2 = N^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{\frac{(T_{i0})^h}{T_{0j}}\right\}$ $= N^{\frac{1}{2}} \cdot Z$	M=1→IMP M<1→JMP M=0→JMP	$N > \frac{1}{Z^2}$→IMP $N < \frac{1}{Z^2}$→JMP
IMP/AMP	$A_3 = \left[\frac{C(t_0)}{2E\{n(t_0)\}}\right] + 1$	M<1→AMP	
JMP/AMP		$A_2 < A_3$→JMP $A_2 > A_3$→AMP	

Table-2. Optimum Reorder Range and the Relative Cost Saving.

	$\frac{t}{T_0}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
k= 4	E[n(t)]	1.00	1.07	1.19	1.31	1.41	1.58
	C(t)	0.00	0.06	0.06	0.08	0.09	0.08
k=16	E[n(t)]	1.00	1.98	2.96	3.87	4.72	5.54
	C(t)	0.00	0.23	0.40	0.53	0.61*	0.52

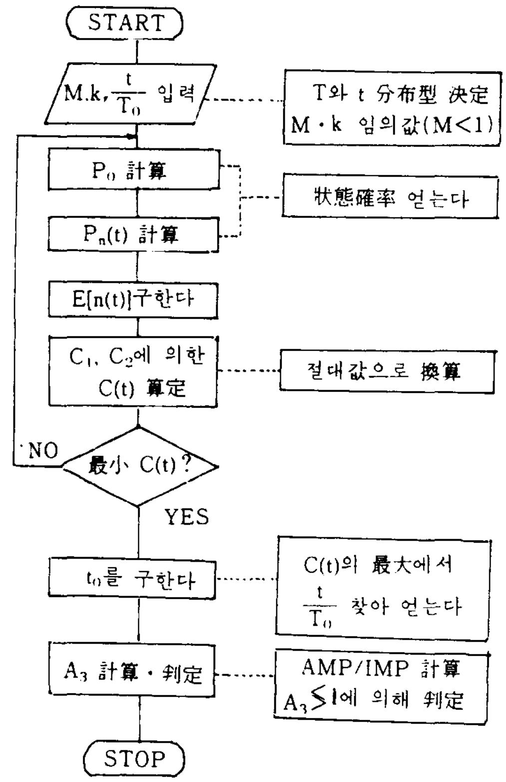

Figure-1. Flow Chart for The Major AMP Computation

지 않는 解析은 省略했으나 數値解析의 理解를 돕고자 Figure-1에 Flow Chart를 나타냈다.

6. 結 論

複數品目들이 注文될때 注文品과 注文時期에는 어떠한 注文政策을 適用하는가에 따라 서로 다른 結合效果를 나타내게 된다. 本 硏究는 종래의 個別注文方式을 基準으로 同時注文方式과의 總費用比率比較를 소개하고 再注文期間, 結合注文發生, 再注文範圍에 랜덤現狀을 부여한 AMP를 再設定하여 IMP, JMP와의 費用效果를 評價하고 있다. 특히 費用節減이 最大일 때 最適再注文範圍가 決定되며 對應하는 唯一한 最適注文水準도 얻는다. 또 各 政策의 比較中 $M<1$일때는 항상 IMP에 比하여 AMP가 바람직함을 알 수 있다.

本 硏究의 擴張期待性으로는 再注文期間, 再注文範圍등 分布型 制限의 緩和, 數値解析上 매우 어려울지 모르나 再設計가 아닌 模型構築의 一般化가 바람직하다.

參考文獻

1. Bickel. P. J.. Doksum. K. A.. Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics. Holden-Day Inc.. 1977.
2. Charles H. Falkner. Optimal Ordering Policies for a Continuous Time. Deterministic Inventory Model. Management Science. Vol. 15. No. 11. pp. 672-685. 1985.
3. Eric Ritchie. Aaron Tsado. The Penalties of Using The EOQ: a Comparison of Lot-Sizing Rules for Linear Increasing Demand. Production and Inventory Management. First Quarter. pp. 12-18. 1986
4. Evan L. Porteus. Investing in Reduced Setup in the EOQ Model. Management Science. Vol. 31. No. 8. pp. 998-1010. 1985.
5. Hanssman. F.. Operations Research in Production and Inventory Control. John Wiley & Sons. 1962.
6. Kleinrock. L.. Queueing System: Vol. 1. John Wiley & Sons. 1975.
7. Ledermann. W.. Hand Book of Applicable Mathematics: Vol. -Analysis. John Wiley & Sons. 1982.
8. Naddor. E.. Inventory Ststem. John Wiley & Sons. 1966.
9. Tersine. R. J.. Materials Management and Inventory System. North-Holland. 1976.
10. Whitin. T. M.. The Theory of Inventory Management. Green-Wood Press. 1957.
11. Zoller. K.. Deterministic Multi-item Inventory Systems with Limited Capacity. Management Science. Vol. 24. No. 4. pp. 451-455. 1977.