

2 수준 직교배열표의 요인 배치 방법

An Algorithm for the Assignment of the Two-Level Factors on the Table of the Orthogonal Arrays

朴 明 圭*

Abstract

This article develops to determine and to allocate the two level factors at the table of orthogonal arrays. The column numbers of two factors and two-factor interaction can be determined in applying the bit-by-bit EX-OR operation. The assignment of the Two factors and Two factor interaction is attained by USING COMPUTER, IBM PC/AT, applying algorithm of EX-OR operation Theory.

1. 서 론

신제품 개발이나 기술혁신, 품질고급화 등의 요구를 충족시키기 위해서는 실험계획법의 적용이 효과적이며, 더우기 실험의 횟수를 줄이기 위한 요청이 높은 경우에는 직교배열표(Tables of Orthogonal Arrays)를 사용하면 경제적인 연구 수행이 가능하다.

그런데 직교배열표를 사용할 때 주효과와 관련 교호작용을 직교배열표의 열번호에 배치시킴으로써 실험계획이 가능하며, 이를 서로 중복되지 않도록 배치시키는 방법으로는 기본표시를 이용하는 2열간의 교호작용표를 사용하거나 기존의 점진도 자료를 사용하여 시행착오과정을 통해서 배치를 계획한다.

오늘날 전자제산기를 이용하기 위해서는 시행착오과정을 전산화함이 필요하며, 더우기 실험의 규모가 커질때에는 보다 논리적인 배치검토의 필요성이 증대되므로 이를 위해서 여기서는 2수준직교배열표를 대상으로 한 배치방법을 BASIC 언어로 작성하였으며, 손으로 배치가 어려운 3가지 경우를 대상으로 하며 실험 배치를 시도하고자 한다.

2. 2수준계 직교배열표의 특징고찰

2.1 기본표시와 열의 관계

* 명지대학교 산업공학과 조교수
接受日: 1987. 12. 9.

정수 $K(K \geq 2)$ 에 대하여 실험횟수(조건) $n=2^K$, 직교배열표의 열의 갯수 $C=2^K-n=n-1$ 이며, 이 경우의 직교배열표를 일반적으로 $L_n(2^C)$ 로 나타낸다. 이때 각 열의 기본표시는 제1, 2, 3, 4, 5, 6열일 때 각각 다음과 같이 a, b, ab, c, ac, bc,등으로 나타낸다. 이를 지수형태로 나타내면 제1열: $a=c^0b^0a^0$, 제2열: $b=c^0b^1a^0$, 제3열: $ab=c^0b^1a^1$, 제4열: $c=c^1b^0a^0$, 제5열: $ac=c^1b^0a^1$, 제6열: $bc=c^1b^1a^0$,이 되며 이는 곧 1→001, 2→010, 3→011, 4→100, 5→101, 6→110,의 특징을 갖는다. 다시말하면 각열의 숫자를 2진수로 바꾼 다음에 이를 오른쪽부터 a, b, c,인 순서의 지수로 적용할 경우에 나타나는 기호를 해당 열의 기본표시로 사용할 수가 있다.

이에 따라서 2진수의 첫째 자리수는 a의 지수, 둘째 자리수는 b의 지수, 셋째 자리수는 c의 지수,로 나타내기로 한다. 한 예로써 $L_8(2^7)$ 의 경우를 표로써 요약하면 표-1과 같다.

2.2 두열 간의 교호작용

제i열과 제j열의 교호작용이 있을때 이 교호작용이 나타나는 열의 번호를 구하기로 한다. 여기서는 편의상 $L_8(2^7)$ 인(열의 숫자가 7이내) 경우에 대하여 설명하기로 한다.

숫자 n의 2진수의 제1, 제2, 제3자리수를 각각 B(n, 1), B(n, 2), B(n, 3)이라 두면 $B(n, l)=0$ 또

표-1. 열번호와 기본표시와의 관계

열번호	(10진수)	1	2	3	4	5	6	7
	(2진수)	001	010	001	100	101	110	111
지 수 표 시		$c^0b^0a^1$	$c^0b^1a^0$	$c^0b^1a^1$	$c^1b^0a^0$	$c^1b^0a^1$	$c^1b^1a^0$	$c^1b^1a^1$
기 본 표 시		a	b	ab	c	ac	bc	abc

는 1, $\ell=1, 2, 3, \dots$ 이다. 이 n의 기본표시는 $a^{B(n, 1)}b^{B(n, 2)}c^{B(n, 3)}$ 이다. 이때 제i열과 제j열의 기본표시는 각각 $a^{B(i, 1)}b^{B(i, 2)}c^{B(i, 3)}$, $a^{B(j, 1)}b^{B(j, 2)}c^{B(j, 3)}$ 이다. 따라서 제i열과 제j열의 교호작용이 나타나는 열의 기본표시는 $a^{B(i, 1)}b^{B(i, 2)}c^{B(i, 3)} \times a^{B(j, 1)}b^{B(j, 2)}c^{B(j, 3)}$ 즉, $a^{B(i, 1)+B(j, 1)}b^{B(i, 2)+B(j, 2)}c^{B(i, 3)+B(j, 3)}$ 이다. 그런데 2수준의 경우 $a^2=b^2=c^2=1$ 이므로 $B(i, \ell) + B(j, \ell) = 2$ 인 경우는 0이 되어야 한다. 즉 $B(i, \ell) = B(j, \ell) = 1$ 일때는 $B(i, \ell) + B(j, \ell) \equiv 0$ 이다. 이는 배타논리합(EX-OR)의 연산을 의미한다.

표-2. 배타적 논리합 연산

B(i, ℓ)	B(j, ℓ)	B(i, ℓ) + B(j, ℓ)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

이제 배타논리합의 연산을 실시한 후에 얻어진 지수부분의 결과를 $B(k', \ell) \equiv B(i, \ell) + B(j, \ell)$ 이라 놓을때 이 경우의 기본표시는 $a^{B(k', 1)}b^{B(k', 2)}c^{B(k', 3)}$ 이 되며 $B(k', 3) | B(k', 2) | B(k', 1)$ 인 2진수를 10진수로 바꾸어서 나타나는 숫자를 $K(k = \sum_{m=1}^3 2^{m-1} \times B(k', m))$ 라 놓을때 제i열과 제j열의 교호작용이 나타나는 열을 의미한다. 이를 요약하면 다음과 같다.

- ① i, j를 각각 2진수로 바꾼다.
- ② 2진수로 바꾸고 각 자리수(digit)끼리 배타적 논리합 연산을 실시한다.
- ③ 이 결과에서 얻어진 수를 다시 10진수로 바꾸어서 이를 k라 둔다.
- ④ 제i열과 제j열의 교호작용은 제k열에서 나타난다.

예로써 제3열과 제6열의 경우를 보면 $3_{10} = 011_2$, $6_{10} = 110_2$ 에서

$$\begin{aligned} & 011_2 \\ \oplus & 110_2 \\ \hline & 101_2 = 5_{10} \end{aligned}$$

즉, 제5열에서 교호작용이 나타남을 알 수 있다.

2.3 인자의 열번호 배치과정

배치 시켜야 할 요인과 교호작용이 각각 f, x개가 있다고 할때 각각의 인자가 중복이 되지 않도록 배치를 하기 위해서는 교호작용이 나타나는 요인들 먼저 배치한 다음에 이들 주효과간의 교호작용이 나타나는 열번호를 계산하며, 모든 교호작용이 요인들과 서로 중복되지 않는 경우에 비로서 남은 요인들을 배치시키는 방법이 효과적이다.

따라서 배치시켜야 할 인자 가운데서 교호작용이 관련회수가 큰 요인부터 배치시키도록 하며, 모든 인자의 배치가 가능한 f+x보다 열번호가 큰 직교배열표를 검토 대상으로 하여 이를 $L_n(2^c)$ 라고 표시하기로 한다.

교호작용과 관련되는 요인들을 먼저 파악해서 이 숫자를 j라고 둘때 이는 c진법으로 표시되는 j자리인 숫자를 검토하기로 한다. 또한 각 자리수(digit) t($1 \leq t \leq j$)는 t번째 요인이라 두고 이 숫자를 g($0 \leq g \leq c-1$)라 놓을 때 t번째 요인은 g+1인 열에 배치되는 것으로 간주한다. 한편 r은 1, 2, ..., j에서 두번이상 나오지 않도록 함으로써 열간의 중복을 회피하도록 한다. 예로써, 배치 시켜야 할 요인을 순서대로 A, B, C라 하고, 직교배열표를 $L_8(2^7)$ 로 두면 $j=3$, $c=7$ 이 된다. 이때 7진법으로 표시된 숫자가 314₇인 경우는 A→4열, B→1열, C→3열에 배치시키는 계획이 되며 인자간의 교호작용은 이들을 기초로 해서 중복여부를 검토하는 것이다. 이와같은 방식으로 $i=1, 2, 3, \dots$ 에 따라서 모든 경우에 대한 요인의 가능한 배치를 검토할 수가 있으며 총 C^j-1 횟수 이내에 배치 여부가 결정되며, 이 횟수이내에서 가능한 배치가 없을 경우에는 $L_n(2^c)$ 인 배치보다 더 큰 직교배열표 $L_n(2^{c'})$ ($n' > n$, $c' > c$)를 선택하여야 한다. 이는 곧 실험횟수가 증가되어야 함을 의미한다.

상기 배치 과정을 흐름도로 나타내면 그림-1, 그림-2, 그림-3이 된다.

3. 사 례

앞에서 제시한 방법을 적용하여 IBM PC/AT 전산 프로그램(부록)을 이용하여 요인배치 문제를 풀이한 결과는 다음과 같다.

- (1) 6개의 인자 및 2개의 교호작용 배치

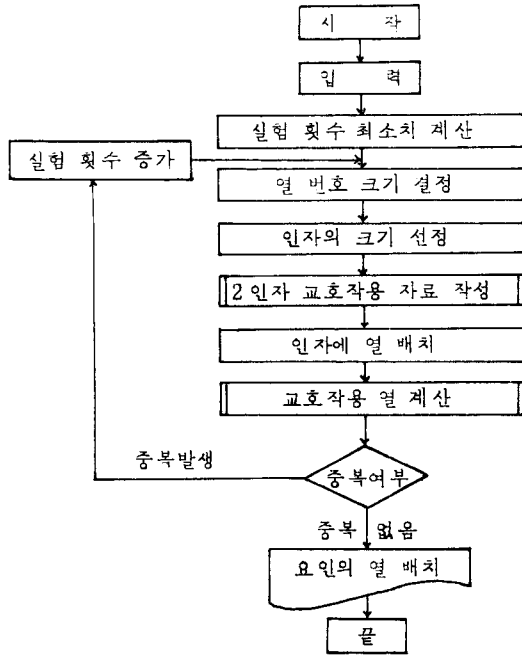


그림-1. 인자 및 교호작용 열 배치 전과정의 흐름도

인자 B, C, E, D, G, A 및 교호작용 A×B, A×C
 열의 총수 15개이며
 B=1, C=2, E=8, D=7, G=3, A=4열에 배치

A×B는 5열, AC는 6열에 배치됨.

2) 5개의 인자 및 10개의 교호작용 배치

인자 B, C, D, E, A 및 교호작용 D×E, E×C, D×C, B×E, A×E, D×A, A×C, B×A, B×C, B×D

열의 총수 15개이며 B=1, C=2, D=4, E=8, A=15열에 배치 D×E는 12열, E×C는 10열, D×C는 6열, B×E는 9열, A×E는 7열, D×A는 11열, A×C는 13열, B×A는 14열, B×C는 3열, B×D는 5열에 배치됨.

3) 5개의 인자 및 10개의 교호작용 배치

인자 A, B, C, D, E 및 교호작용 A×B, A×C, A×D, A×E, B×C, B×D, B×E, C×D, C×E, D×E

열의 총수 15개이며, A=1, B=2, C=4, D=8, E=15열에 배치 A×B는 3열, A×C는 5열, A×D는 9열, A×E는 14열, B×C는 6열, B×D는 10열, B×E는 13열, C×D는 12열, C×E는 11열, D×E는 7열에 배치됨.

4. 결론

직교배열표를 사용하여 실험을 경제적으로 설계할 때는 가능한대로 실험횟수를 최소로 줄이면서, 모든

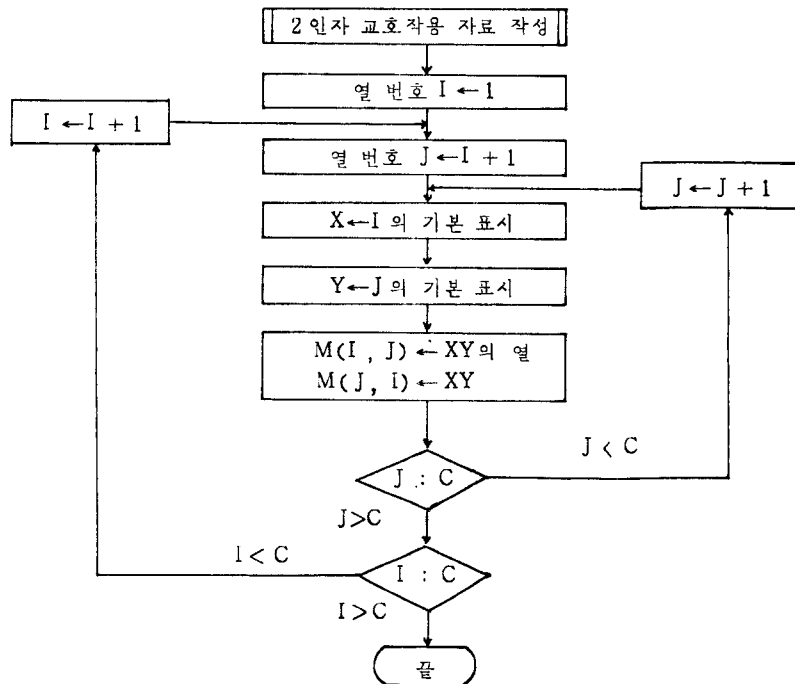


그림-2. 두 인자의 교호작용 열 계산과정 흐름도

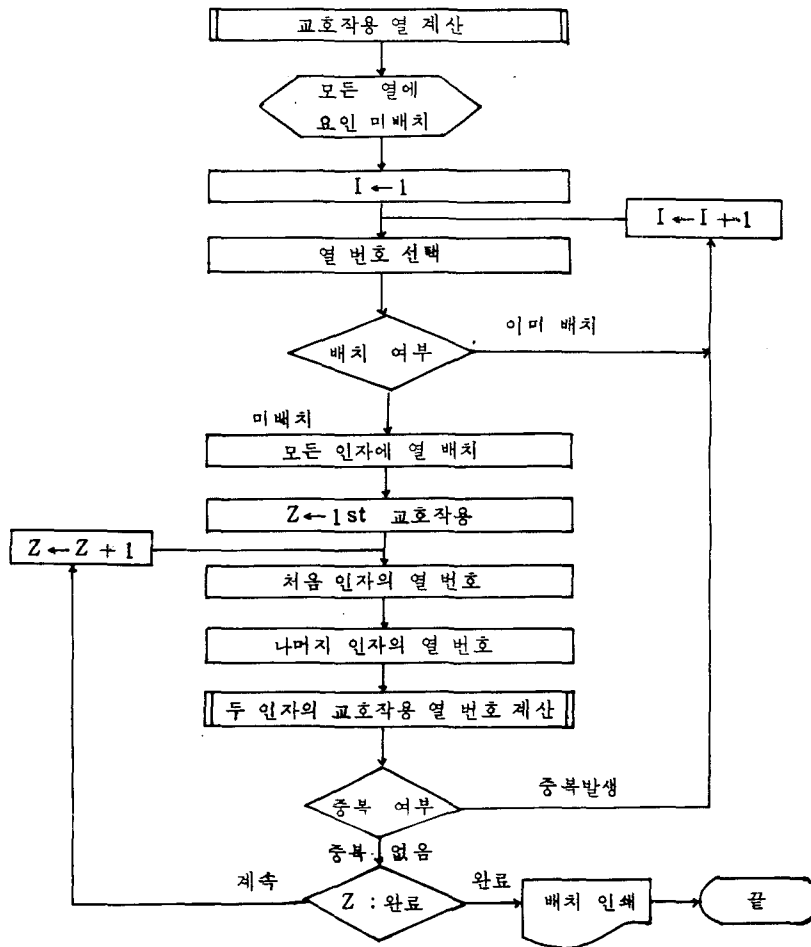


그림-3. 인자 및 교호작용의 열 배치 과정 흐름도

필요한 주효과 요인과 교호작용의 분석이 가능해야 하며, 이를 위해서는 본 연구의 방법을 적용하면 손으로 시행착오과정에서 불가능한 복잡한 배치도 능히 해결할 수가 있다. 앞의 예제에서 본 경우는 모든 열번호가 배치시켜야 할 인자의 갯수와 일치되는 극단적인 경우에 해당되며, 이 결과에 따른 실험배치는 실험비용 등의 경제성 뿐만 아니라 실험조건의 균등유지와 요구를 만족시켜 줄 수 있는 효과를 수반하는 것으로 판단된다.

• 변수 설명

- $F \phi$: 인자의 갯수
- $X \phi$: 교호작용의 갯수
- $W(x, 1)$: X번째 교호작용의 왼쪽에 있는 인자(첫 번째 인자)
- $W(x, 2)$: X번째 교호작용의 오른쪽에 있는 인자(두 번째 인자)

- M : 알파벳 순서를 표시함(예; A→1, B→2등)
- $R(M)$: 배치 요인 가운데서 M번째 알파벳 기호의 반복 출현 회수
- $Y\$(i)$: 일련번호를 나타낸 배치 요인
- $N \phi$: 모든 요인을 배치시킬 수 있는 최소의 실험회수
- $C \phi$: 직교배열표 열의 총수
- $U(M)$: M번째 알파벳 기호의 인자(예; $U(1)=D$, $U(2)=C$ 등)
- $V(F)$: 주 효과 가운데서 F번째 요인의 알파벳 순서(예; $V(1)=4$, $V(2)=3$ 등)
- $M(i, j)$: i열과 j열의 교호작용이 나타나는 열번호
- $J \phi$: 교호작용이 나타나는 주효과 요인의 갯수

부록 : 요인배치 프로그램

```

10 ' PMG1202
20 ' * * * ASSIGNMENT OF FACTORS AND INTERACTIONS * * *
30 DIM D(80),L(80),U(20),V(20),W(80,2),R(26)
40 DIM A(80,30),B(80,30),N(80),C(50)
50 DIM G(80),M(80,80),P(2,80)
60 DIM F$(80),X$(20),Y$(80)
70 FOR I = 1 TO 26:R(I) = 0:NEXT I
80 F=0:X=0
90 READ F$
100 IF F$ = "" GOTO 1030
110 IF F$ = " " GOTO 170
120 ON LEN(F$) GOTO 130,140,1020
130 F=F+1:F$(F)=F$:M=ASC(F$)-64:U(M)=F:V(F)=M:R(M)=R(M)+1:GOTO 90
140 X=X+1:X$(X)=F$
150 L$=LEFT$(F$,1):M=ASC(L$)-64:W(X,1)=M:R(M)=R(M)+1
160 R$=RIGHT$(F$,1):M=ASC(R$)-64:W(X,2)=M:R(M)=R(M)+1:GOTO 90
170 F0=F: ' Total Number of Factors
180 X0=X: ' Total Number of Interactions
190 FOR I = 1 TO F0:Y$(I)=F$(I):NEXT I
200 IF X0 = 0 GOTO 220
210 FOR I = 1 TO X0:I1 = I+F0:Y$(I1) = X$(I):NEXT I
220 C=F0+X0:K=INT(LOG(C+1)/LOG(2)*100)/100
230 IF K > INT(K) THEN K=K+1
240 K0=INT(K)
250 N0=INT(2^K0)
260 C0=N0-1
270 IF X0=0 GOTO 530
280 ' Generate Column Operational Relationship Between Two Columns
290 FOR I = 1 TO N0
300 C=I:E=K0:N=2
310 GOSUB 2000
320 FOR J = 1 TO K0:B(I,J)=N(J):NEXT J
330 NEXT I
340 ' Compute M(I,J),M(J,I)
350 FOR I = 1 TO C0
360 M(I,I)=0
370 FOR J = I+1 TO C0
380 ' Find Column Number of Interaction
390 B1=0
400 FOR L = 1 TO K
410 B=B(I,L)+B(J,L)
420 B=B-INT(B/2)*2
430 B1=B1+B*2^(L-1)
440 NEXT L
450 M(I,J)=B1:M(J,I)=B1
460 NEXT J:NEXT I
470 IF X0=0 GOTO 940
480 ' Number of Factors Having Interactions
490 L1=0:L2=0
500 FOR F = F0 TO 1 STEP -1
510 M1=V(F)
520 IF R(M1) = 1 THEN L1=L1+1:P(1,L1)=F:GOTO 540
530 L2=L2+1:P(2,L2)=F
540 NEXT F
550 J0=L2:E0=L1
560 ' -- Assign Column Number
570 ' G(T)=1 If Tth Column Is Assigned
580 N2=INT(C0^(J0-1))
590 FOR I = 1 TO N2
600 FOR L = 1 TO N0:G(L)=0:NEXT L
610 C=I:E=J0:N=C0
620 GOSUB 2000
630 FOR J = 1 TO J0:D(J)=N(J)+1:NEXT J
640 ' Confounding Check
650 FOR J = 1 TO J0-1:FOR J1 = J+1 TO J0
660 IF D(J) = D(J1) THEN 820
670 NEXT J1:NEXT J

```

```

680 ' J(J)=Assigned Number of Column of Jth Factor Having Interaction
690 FOR J = 1 TO JO:M=V(P(2,J)):C(M)=D(J):G(D(J))=1:NEXT J
700 FOR X = 1 TO XO
710 FOR M = 1 TO 2:C1(M)=C(W(X,M)):NEXT M
720 C2(X,1)=M(C1(1),C1(2)):C2(X,2)=M(C1(2),C1(1))
730 IF G(C2(X,1))+G(C2(X,2))>0 GOTO 820
740 G(C2(X,1))=1:G(C2(X,2))=1
750 NEXT X
760 IF EO = 0 GOTO 860
770 FOR E = 1 TO EO
780 FOR L = 1 TO CO:IF G(L)=0 THEN M=V(P(1,E)):C(M)=L:G(L)=1:GOTO 800
790 NEXT L
800 NEXT E
810 GOTO 860
820 NEXT I
830 ' Size of Experiments Should Be Increased
840 KO=KO+1
850 GOTO 250: ' Experimental Size be Increased
860 ' Assignments of Column Numbers
870 PRINT :PRINT :PRINT "ASSIENMENT OF MAIN FACTORS AND INTERACTION FA
CTORS"
880 PRINT "-----":PRINT
890 PRINT "Main and Interaction Factors Are As Follows":PRINT
900 FOR F = 1 TO FO:PRINT F$(F),:NEXT F:PRINT
910 IF XO=0 GOTO 940
920 FOR X = 1 TO XO:PRINT X$(X),:NEXT X:PRINT :PRINT
930 ' Assignments of Column Numbers
940 PRINT:PRINT"Assignments of Column Numbers Are As Follows :":PRINT
950 IF XO>0 GOTO 980
960 FOR F = 1 TO FO:C(F)=F:PRINT " Factor ";F$(F);" ="C(F);"th Column":NEXT F
970 GOTO 70
980 FOR F = 1 TO FO:PRINT " Factor ";F$(F);" ="C(V(F));"th Column":NEXT F
990 FOR X = 1 TO XO:PRINT " Interaction ";X$(X);" ="C2(X,1);"th Column":NEXT X
1000 PRINT :PRINT " Minimum Number of Experiments = ";NO
1010 PRINT " Column Size = ";CO:PRINT
1020 PRINT :PRINT :GOTO 70
1030 END
2000 ' * * * * * Conversion To n Digit * * * * *
2010 ' Input Variable - - - C , E , N
2020 C1=C
2030 FOR D = 1 TO E
2040 C2=INT(C1/N)
2050 N(D)=C1-C2*N
2060 C1=C2
2070 NEXT D
2080 RETURN
3000 ' = = = INPUT DATA OF FACTORS AND INTERACTIONS = = = =
3010 DATA "B","C","E","D","AB","AC","G","A"," "
3020 DATA "B","C","D","E","DE","EC","DC","A","BE","AE","DA","AC","BA","BC","BD",
" "
3030 DATA "A","B","C","D","E","AB","AC","AD","AE","BC","BD","BE","CD","CE","DE",
" "
3040 DATA "*"
Ok

```

RUN

ASSIENMENT OF MAIN FACTORS AND INTERACTION FACTORS

Main and Interaction Factors Are As Follows

B	C	E	D	G
A				
AB	AC			

Assignments of Column Numbers Are As Follows :

Factor B = 1 th Column

Factor C = 2 th Column
 Factor E = 8 th Column
 Factor D = 7 th Column
 Factor G = 3 th Column
 Factor A = 4 th Column
 Interaction AB = 5 th Column
 Interaction AC = 6 th Column

Minimum Number of Experiments = 16
 Column Size = 15

ASSIENMENT OF MAIN FACTORS AND INTERACTION FACTORS

Main and Interaction Factors Are As Follows

B	C	D	E	A
DE	EC	DC	BE	AE
DA	AC	BA	BC	BD

Assignments of Column Numbers Are As Follows :

Factor B = 1 th Column
 Factor C = 2 th Column
 Factor D = 4 th Column
 Factor E = 8 th Column
 Factor A = 15 th Column
 Interaction DE = 12 th Column
 Interaction EC = 10 th Column
 Interaction DC = 6 th Column
 Interaction BE = 9 th Column
 Interaction AE = 7 th Column
 Interaction DA = 11 th Column
 Interaction AC = 13 th Column
 Interaction BA = 14 th Column
 Interaction BC = 3 th Column
 Interaction BD = 5 th Column

Minimum Number of Experiments = 16
 Column Size = 15

ASSIENMENT OF MAIN FACTORS AND INTERACTION FACTORS

Main and Interaction Factors Are As Follows

A	B	C	D	E
AB	AC	AD	AE	BC
BD	BE	CD	CE	DE

Assignments of Column Numbers Are As Follows :

Factor A = 1 th Column
 Factor B = 2 th Column
 Factor C = 4 th Column
 Factor D = 8 th Column
 Factor E = 15 th Column

Interaction AB = 3 th Column
Interaction AC = 5 th Column
Interaction AD = 9 th Column
Interaction AE = 14 th Column
Interaction BC = 6 th Column
Interaction BD = 10 th Column
Interaction BE = 13 th Column
Interaction CD = 12 th Column
Interaction CE = 11 th Column
Interaction DE = 7 th Column

Minimum Number of Experiments = 16
Column Size = 15

Ok

참 고 문 헌

1. 박성현, 현대 실험계획법, pp. 416~499, 대영사.
2. 박성현·허문열, 전산통계, pp. 440~456, 경문사.
3. 황희강, 알기쉬운 마이크로 컴퓨터와 BASIC 입문, pp. 161~216, 교학사.
4. Peter W. M. John, *Statistical Design and Analysis of Experiments*, pp 148-176, Macmillan Co., New York, 1971.
5. LLOYD S. Nelson, Analysis of Two-Level Factorial Experiments, *JQT*, Vol. 14, No. 2, April 1982, 95-98.
6. J. STUART HUNTER, Statistical Design Applied to Product Design, Vol. 17, No. 4, *JQT*, October 1985, 210-221.