

여러 매개상수 특이섭동계에서의 여러 시간스케일 분리와 최적제어 문제

(Multi-Time Scale Separations and Optimal Control Problems of Multi-Parameter Singular Perturbation Systems)

金 三 洙*, 洪 再 根*, 金 秀 重*

(Sam-Soo Kim, Jae-Keun Hong and Soo-Joong Kim)

要 約

본 논문에서는 시불변 선형 여러 매개상수 특이섭동계를 완전히 독립적인 여러개의 부시스템으로 분리하는 방법으로 계층적 접근방법을 제안하였다. 제안된 방법으로 여러 시간스케일이 결합되어 있는 전체 시스템을 각각의 부시스템으로 변환하였으며, 분리된 각각의 부시스템이 가제어하면 원 시스템도 가제어함을 보였다.

또한 전체 시스템을 전형적인 최적제어 이론중의 하나인 최소 제어력 문제에 적용하였다. 그리고 전체 시스템을 시간스케일별로 주어진 시간구간을 나누어 제어하는 분산적 구조의 제어기를 구성함으로써, 준 최적제어이론을 제안하였다. 그 결과 시간스케일 분리방법이 특히, 준 최적제어 설계에 관해 유용함을 제시하였다.

Abstract

The hierarchical approach method is proposed to separate each different time scale subsystems from linear time invariant multi-parameter singular perturbation systems. By means of this proposal, the original multi-parameter singular perturbation systems is completely separated into independent subsystems with each different time scale. It is also investigated that the controllability of the system is invariant.

And this paper applies singular perturbation methods to the minimum control effort problem for linear time invariant systems with constrained controls. Also near-optimum control theory, which is based on dividing the total time interval with the time scales respectively, is proposed. As a result, the time scale separation method is shown to be particularly useful in a near optimum design which can be obtained through a decentralized control structure.

I. 서 론

여러가지 실제적인 문제들로 인하여 수학적인 시스템모델은 단지 물리적인 시스템을 간략히 표현한 것이다. 보통 물리적인 시스템은 무한차수의 편미분 방정식의 집합으로 나타내어지지만, 시스템의 모델을 정할

*正會員, 慶北大學校 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Kyung Pook National Univ.)
接受日字: 1986年 1月 30日

때는 간략하게 유한차수의 상미분방정식의 집합으로 표현한다. 만약 이렇게 정해진 모델의 차수가 고차이면, 시스템의 특정한 소자-시정수, 질량, 관성 모멘트, 인덕턴스, 커패시턴스등을 무시함으로써 시스템을 저차화하여 해석하는 방법이 초기단계의 특이섭동법(特異攝動法; Singular perturbation method)이다.

대부분의 대규모 시스템에서는 집중성(centrality)의 전제조건이 성립하지 않으므로, 분산제어법(decentralized control method)을 써서 제어함이 바람직 하다. 이러한 시스템의 분산적 결정과정(decentralized decision making)이나 계층적 제어(hierarchical control) 방법에는 집성(集性: aggregation) 법이나 섭동(perturbation)법 등이 있는데 모델의 간략화나 계층적 구조의 필터나 제어기를 얻는 데에는 섭동법이 아주 유용하다.¹¹

특이섭동법은 최적제어 문제를 푸는 한 방법으로써, 즉 작은 값의 매개상수를 사용하는 점근적 전개법(asymptotic expansion method) 등으로 많은 연구가 이루어졌으며,¹² 최근에는 시스템 이론에 적용되어 매우 빠르게 발전되었다.^{13,14} 시스템의 해석과 설계에 있어서 특이 섭동법의 주요 목적은 시스템의 저차화 뿐만 아니라 느린 동적상태(slow dynamic mode)와 빠른 동적상태의 상호작용으로 인한 나쁜 조건들을 완화시키는 것이다. 특히 특이섭동법은 우주 항공분야 및 전력발전소와 같이 외란(disturbance)이 존재하고, 많은 기계들이 결합되어 있는 대규모 시스템에 편리하게 적용시킬 수 있다.^{15,16}

이때까지의 특이섭동법에서는 시스템의 응답속도가 큰 상태와 작은 상태만으로 나누는 두개의 시간 스케일에 대해서 많은 연구가 진행되어 왔다. 먼저 Chang¹⁷이 시변계에 대해 근사 상사변환(approximate similarity transform)을 하여 두개의 부시스템(subsystem)으로 분리하여 표현하였다. 또한 Kokotovic¹⁸은 시불변계에 대해 약간의 제약조건을 가하여 특이섭동계가 아닌 시스템을 두개의 부시스템으로 분리할 수 있게 하였다.

대규모 시스템에 있어서는 매개상수들이 다양한 값을 가지므로 시스템을 두 개의 시간스케일만으로는 표현하기가 힘들거나, 두개의 시간스케일로 표현할 수 있다 하더라도 여러개의 시간스케일로 나누어 제어하면 편리할 경우가 많다.¹⁹ 이러한 이유로 인해 Ladde¹⁰는 여러 매개상수 특이섭동계에서 Chang의 방법으로 약간의 결합이 존재하는 계수행렬의 삼각형화를 이루었다.

한편 특이섭동계에 대하여 최적제어 이론을 적용시킨 분야에는 두 개의 시간스케일에 대해서만, 많은 연

구가 이루어졌다.¹¹⁻¹⁴⁾

본 논문에서는 시불변 선형 여러 매개상수 특이섭동계를 계층적 저차화(hierarchical order reduction)를 도입하여 완전히 독립적인 여러 개의 부시스템으로 분리하는 기본 단계로서, 세 시간스케일에 대하여 연구하고 각각의 부시스템의 가제어성으로 원시스템의 가제어성을 확인하였다. 또한 이렇게 분리된 시스템을 전형적인 최적제어 이론 중의 하나인 최소 제어력 문제(minimum control effort problem)에 적용하였다. 그리고 전체시스템을 시간스케일별로 주어진 전체시간구간을 나누어 제어하는 분산적 구조의 제어기를 구성함으로써, 계산량을 현저히 줄여 실시간 구현(real-time implementation)을 쉽게 할 수 있는 준최적제어 이론을 제시하였다.

II. 여러 시간스케일 분리와 가제어성

이 장에서는 여러 매개상수와 여러 시간스케일이 공유하고 있는 특이섭동계에 대해 시스템을 간단하게 변환하는 방법을 알아보기로 한다.¹⁵⁾

1. 계층적 저차화

시스템이 선형이고 시불변인 여러 매개상수 특이섭동계라면 이러한 시스템의 상태방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{cases} \dot{X}_1 \\ \epsilon \dot{X}_2 \\ \mu \dot{X}_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} U \quad (1)$$

여기서 X_1, X_2, X_3 와 U 는 각각 n, m, l 과 r 차의 벡터이다. 그리고 매개상수 ϵ, μ 는 매우 작은 양의 실수이다. 위 시스템의 차수 P 는 $P=n+m+l$ 이다. 이제 여러 시간스케일을 표현하기 위해 다음의 전제조건을 둔다.

전제조건 1. $\epsilon \rightarrow 0$ 일때 $\mu/\epsilon \rightarrow 0$ 이다. 그러면 식(1)의 시스템은 세 시간스케일이 되고 매개변수를 더 늘려 여러 시간스케일로 확장할 수 있다.

식(1)의 원 시스템에서 $\mu \rightarrow 0$ 로 하면,

$$\begin{cases} \dot{\bar{X}}_1 \\ \epsilon \dot{\bar{X}}_2 \\ 0 \end{cases} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \bar{U} \quad (2)$$

이 된다.

전제조건 2. A_{33}^{-1} 가 존재한다.

식(2)의 맨 마지막 행으로부터 \bar{X}_3 에 대해 정리하여 첫번째, 두번째행에 대입하여 정리하면,

$$\begin{cases} \dot{\bar{X}}_1 \\ \epsilon \dot{\bar{X}}_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} A_{011} & A_{012} \\ A_{021} & A_{022} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{01} \\ B_{02} \end{bmatrix} \bar{U} \quad (3)$$

$$\bar{X}_3 = -(A_{33}^{-1} A_{31} \bar{X}_1 + A_{33}^{-1} A_{32} \bar{X}_2 + A_{33}^{-1} B_3 \bar{U}) \quad (4)$$

이 된다. 여기서 계수행렬들은 다음과 같다.

$$\begin{cases} A_{011} = A_{11} - A_{13} A_{33}^{-1} A_{31} & \begin{cases} A_{021} = A_{21} - A_{23} A_{33}^{-1} A_{31} \\ A_{012} = A_{12} - A_{13} A_{33}^{-1} A_{32} & \begin{cases} A_{022} = A_{22} - A_{23} A_{33}^{-1} A_{32} \\ B_{01} = B_1 - A_{13} A_{33}^{-1} B_3 & \begin{cases} B_{02} = B_2 - A_{23} A_{33}^{-1} B_3 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

전제조건 3. A_{022}^{-1} 가 존재한다.

$\epsilon \rightarrow 0$ 로 하고 같은 방법으로 정리하면, 최종적으로 저차화된 시스템은,

$$\dot{\tilde{X}}_1 = A_0 \tilde{X}_1 + B_0 \tilde{U} \tag{5}$$

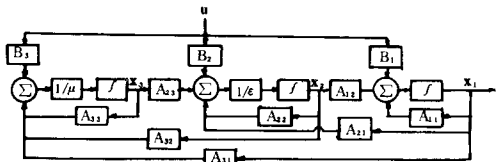
$$\tilde{X}_2 = -(A_{022}^{-1} A_{021} \tilde{X}_1 + A_{022}^{-1} B_{02} \tilde{U}) \tag{6}$$

이 되며, 여기서 A_0 와 B_0 는 다음과 같다.

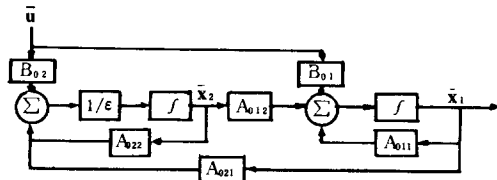
$$\begin{cases} A_0 = A_{011} - A_{012} A_{022}^{-1} A_{021} \\ B_0 = B_{01} - A_{012} A_{022}^{-1} B_{02} \end{cases}$$

이제까지 전개한 저차화를 단계별로 블럭선도로 나타내면 그림 1과 같다.

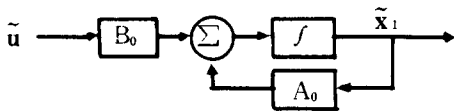
그림 1로 요약되는 계층적 저차화법은 여러 시간스케일이 결합되어 있는 여러 매개상수 특이섭동계에 대해



(a)



(b)



(c)

그림 1. 특이섭동계의 단계적 저차화

- (a) 원 시스템
- (b) 한 단계 줄인 시스템
- (c) 최종 시스템

Fig. 1. The hierarchical order reduction of singular perturbation system.

- (a) original system.
- (b) two-stage reduction system.
- (c) final system.

시간스케일을 분리할 수 있는 적당한 근거를 제시해 준다. 즉 시스템의 응답속도가 가장 느린 상태변수들인 X_1 의 상태방정식은 그림 1-(c)처럼 A_0 와 B_0 를 중심으로 근사적으로 기술되어야 한다. 마찬가지로 중간 정도의 응답속도를 갖는 상태들은 A_{022} 와 B_{02} 를 중심으로 기술될 수 있고, 응답속도가 빠른 상태들은 A_{33} 와 B_3 를 중심으로 기술되어야 한다. 이런 사실들은 원 시스템의 가제어성의 확인에도 이용된다.

2. 계수행렬의 대각화와 가제어성

이 절에서는 계수행렬의 대각화 방법으로 세 시간스케일들이 서로 결합되어 있는 시스템을 각 시간스케일 별로 완전히 독립적인 세개의 부시스템으로 분리한다.

식(4)에서 $U=0$ 이면 \bar{X}_3 는 X_3 의 느린 변화성분을 나타낸다. 빠른 천이상태 변수 X_3 로부터 \bar{X}_3 를 분리하기 위해 새로운 변수 y_3 를 $X_3 - \bar{X}_3 + (\text{보정항})$ 으로 표현하면,

$$\begin{aligned} y_3 &= X_3 + A_{33}^{-1} A_{31} X_1 + A_{33}^{-1} A_{32} X_2 + \mu(E_1 X_1 + E_2 X_2) \\ &= X_3 + L_1 X_1 + L_2 X_2 \end{aligned} \tag{7}$$

이다. 여기서

$$\begin{cases} L_1 = A_{33}^{-1} A_{31} + \mu E_1 \\ L_2 = A_{33}^{-1} A_{32} + \mu E_2 \end{cases}$$

이고, E_1, E_2 는 구해야 하는 보정항이다. 식(7)을 식(1)의 원 시스템에 대입하면,

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \epsilon \dot{X}_2 \\ \mu \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{011} - \mu A_{13} E_1 & A_{012} - \mu A_{13} E_2 & A_{13} \\ A_{021} - \mu A_{23} E_1 & A_{022} - \mu A_{23} E_2 & A_{23} \\ \mu F_1 & \mu F_2 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ b_3 \end{bmatrix} U \tag{8}$$

이 된다. 여기서 a_{33}, b_3 와 F_1, F_2 는 다음과 같다.

$$a_{33} = A_{33} + \mu(L_1 A_{13} + \epsilon^{-1} L_2 A_{23}) \tag{9}$$

$$b_3 = B_3 + \mu(L_1 B_1 + \epsilon^{-1} L_2 B_2) \tag{10}$$

$$\begin{aligned} F_1 &= [A_{33}^{-1}(A_{31} A_{011} + \epsilon^{-1} A_{32} A_{021}) - A_{33} E_1] \\ &\quad + \mu [E_1 A_{011} + \epsilon^{-1} E_2 A_{021} \\ &\quad - A_{33}^{-1}(A_{31} A_{13} + \epsilon^{-1} A_{32} A_{23}) E_1] \\ &\quad - \mu^2 (E_1 A_{13} + \epsilon^{-1} E_2 A_{23}) E_1] \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= [(\epsilon^{-1} A_{33}^{-1} A_{32} A_{022} - A_{33} E_2) + \epsilon A_{33} (E_1 - A_{33}^{-1} A_{31} A_{011}) \\ &\quad + \mu [E_2 (A_{021} + \epsilon^{-1} A_{022}) - A_{33}^{-1} A_{32} A_{23} (E_1 + \epsilon^{-1} E_2)] \\ &\quad - \mu^2 E_2 A_{23} (E_1 + \epsilon^{-1} E_2)] \end{aligned} \tag{12}$$

식(8)에서, 상태변수 y_3 와 상태변수 X_1, X_2 가 분리되도록 하기 위해서는 $F_1 = F_2 = 0$ 이어야 한다. 식(11), (12)에서 이와 같은 조건을 만족하는 E_1, E_2 를 구하면

$$\begin{cases} E_1 = A_{33}^{-2} (A_{31} A_{011} + \epsilon^{-1} A_{32} A_{021}) + O(\mu) \\ E_2 = \epsilon^{-1} A_{33}^{-2} A_{32} A_{022} + O(\epsilon) \end{cases}$$

이다. 여기서 $O(\mu)$ 는 임의의 상수 $c > 0, \mu^* > 0$ 가 존재하여, 모든 $\mu \in (0, \mu^*)$ 에 대해 $|O(\mu)| \leq c \mu$ 인 항이다. 같은 방법으로 X_2 로부터 \bar{X}_2 를 분리하기 위해 y_2

를 정의하면,

$$y_2 = X_2 + A_{022}^{-1} A_{021} X_1 + \epsilon E_3 X_1 = X_2 + L_3 X_1 \quad (13)$$

이고, 여기서 $L_3 = A_{022}^{-1} A_{021} + \epsilon E_3$ 이며 식 (13) 을 식 (8) 에 대입하여 정리하면,

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \epsilon \dot{y}_2 \\ \mu \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{012} - \mu A_{13} E_2 & A_{13} \\ \epsilon F_3 & a_{22} & A_{23} + \epsilon L_3 A_{13} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 + \epsilon L_3 B_1 \\ b_3 \end{bmatrix} U \quad (14)$$

이 된다. 여기서 a_{11} , a_{22} 와 F_3 는

$$a_{11} = A_0 - \mu A_{13} (E_1 - E_2 A_{022}^{-1} A_{021}) - \epsilon A_{012} E_3 \quad (15)$$

$$a_{22} = A_{022} - \mu A_{23} E_2 + \epsilon L_3 A_{012} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} F_3 = & [(A_{022} A_{021} A_0 - A_{022} E_3) - \epsilon E_3 A_{012} (A_{022}^{-1} A_{021} + \epsilon E_3) \\ & + \mu |A_{022}^{-1} A_{021} A_{13} (E_2 A_{022}^{-1} A_{021} - E_1) \\ & - A_{23} (E_1 - E_2 A_{022}^{-1} A_{021})| \\ & + \epsilon \mu | \mu^{-1} E_3 A_{011} + A_{022}^{-1} A_{021} A_{13} E_2 E_3 + E_3 A_{13} E_2 \\ & (A_{022}^{-1} A_{021} + \epsilon E_3) + E_3 A_{13} E_1 - A_{23} E_2 E_3 |] \quad (17) \end{aligned}$$

이다. 같은 이유로 $F_3 = 0$ 되는 E_3 를 구하면,

$$E_3 = A_{022}^{-2} A_{021} A_0 + O(\epsilon)$$

이다. $y_1 = X_1$ 으로 두고, 변수 변환식 및 변환된 시스템을 행렬형으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ L_3 & I_m & 0 \\ L_1 & L_2 & I_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \epsilon \dot{y}_2 \\ \mu \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} U \quad (19)$$

여기서 I_n , I_m 과 I_l 은 각각 n , m 과 l 차의 단위행렬이고,

$$\begin{cases} a_{12} = A_{012} - \mu A_{13} E_2 \\ a_{13} = A_{13} \\ a_{23} = A_{23} + \epsilon L_3 A_{13} \\ b_1 = B_1 \\ b_2 = B_2 + \epsilon L_3 B_1 \end{cases}$$

이다. 식 (19)를 살펴보면식 (1)의 원 시스템은 블록상삼각(block upper triangular) 형태로 바뀌었다.

이제 변환된 시스템의 계수행렬을 대각화 하기로 한다. 식 (19)를 다시 쓰면,

$$\dot{y}_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 + b_1 U \quad (20)$$

$$\epsilon \dot{y}_2 = a_{22} y_2 + a_{23} y_3 + b_2 U \quad (21)$$

$$\mu \dot{y}_3 = a_{33} y_3 + b_3 U \quad (22)$$

이다. 새로운 변수 Z_i 을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} Z_1 &= y_1 - \epsilon (a_{12} a_{22}^{-1} + \epsilon E_4) y_2 - \mu (a_{13} a_{33}^{-1} + \mu E_5) y_3 \\ &= y_1 - \epsilon L_4 y_2 - \mu L_5 y_3 \quad (23) \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{cases} L_4 = a_{12} a_{22}^{-1} + \epsilon E_4 \\ L_5 = a_{13} a_{33}^{-1} + \mu E_5 \end{cases}$$

이다. 식 (23)을 식 (20)에 대입하여 정리하면,

$$\dot{Z}_1 = a_{11} Z_1 + \epsilon S_1 y_2 - \mu S_2 y_3 + (b_1 - L_4 b_2 - L_5 b_3) U \quad (24)$$

이다. 여기서 S_1 과 S_2 는 다음과 같다.

$$S_1 = -E_4 a_{22} + a_{11} a_{12} a_{22}^{-1} + \epsilon a_{11} E_4 \quad (25)$$

$$S_2 = E_5 a_{33} + \mu^{-1} L_4 a_{23} - a_{11} a_{13} a_{33}^{-1} + \mu a_{11} E_5 \quad (26)$$

식 (24)에서 상태변수 Z_1 과 y_2, y_3 를 분리되도록 하려면 $S_1 = S_2 = 0$ 이어야 한다. 식 (25), (26)에서 이러한 E_4, E_5 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} E_4 = a_{11} a_{12} a_{22}^{-2} + O(\epsilon) \\ E_5 = a_{11} a_{13} a_{33}^{-2} - \mu^{-1} L_4 a_{23} a_{33}^{-1} + O(\mu) \end{cases}$$

식 (21), (22)에서 $U = 0$ 일때, $\epsilon \dot{y}_2 - \mu a_{23} a_{33}^{-1} \dot{y}_3 = a_{22} y_2$ 이므로 y_2 의 느린 항을 분리해 내고 계수행렬의 대각화를 이루기 위해 ϵZ_2 를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \epsilon Z_2 &= \epsilon y_2 - \mu (a_{23} a_{33}^{-1} + \mu E_5) y_3 \\ &= \epsilon y_2 - \mu L_6 y_3 \quad (27) \end{aligned}$$

여기서,

$$L_6 = a_{23} a_{33}^{-1} + \mu E_5$$

이다. 식 (23)의 Z_1 도 Z_2 와 같은 이유에서 정의되었으며, 또 다른 근거는 계층적 저차화에서 알 수 있듯이 응답속도가 가장 느린 상태인 Z_1 의 상태방정식은 A_0, B_0 를 중심으로 기술되어야 한다는 것이다. 이제 식 (27)을 식 (21)에 대입하여 정리하면,

$$\epsilon \dot{Z}_2 = a_{22} Z_2 + \mu S_3 y_3 + (b_2 - L_6 b_3) U \quad (28)$$

이다. 여기서 S_3 는,

$$S_3 = -E_6 a_{33} + \epsilon^{-1} a_{22} a_{23} a_{33}^{-1} + \mu \epsilon^{-1} a_{22} E_6 \quad (29)$$

이다. $S_3 = 0$ 되도록 E_6 를 정하면 다음과 같다.

$$E_6 = \epsilon^{-1} a_{22} a_{23} a_{33}^{-2} + O(\mu)$$

$Z_3 = y_3$ 로 두고, 식 (24), (28) 과 식 (22) 를 행렬형으로 표시하면,

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \epsilon \dot{Z}_2 \\ \mu \dot{Z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} U \quad (30)$$

이고, 여기서 β_1, β_2 와 β_3 는

$$\begin{cases} \beta_1 = b_1 - L_4 b_2 - L_5 b_3 \\ \beta_2 = b_2 - L_6 b_3 \\ \beta_3 = b_3 \end{cases} \quad (31)$$

이다. 결국 변환된 상태 Z 와 원 상태 X 의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n - \epsilon(L_4 L_3 + L_5 L_1) & -\epsilon(L_4 + L_5 L_2) & -\epsilon L_5 \\ L_3 - \epsilon^{-1} \mu L_4 L_1 & I_m - \epsilon^{-1} \mu L_6 L_2 & -\epsilon^{-1} \mu L_6 \\ L_1 & L_2 & I_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (32)$$

또한 식 (30)을 블록선도로 나타내면 그림 2와 같다.

그림 2에서 각각의 부시스템의 상태변수 Z_1, Z_2 와 Z_3

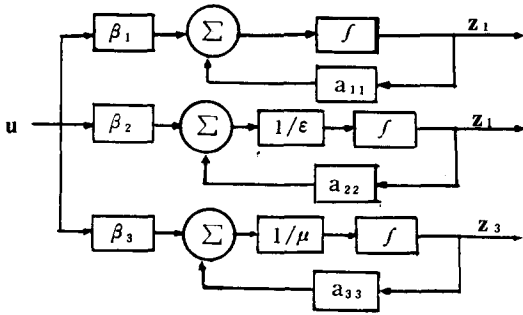


그림 2. 세 종류의 시간 스케일을 가진 세개의 부시스템

Fig. 2. The three subsystems with each time scales.

는 입력 U 와 연결되어 있을 뿐 상호간의 결합은 없다.

이제 변환된 시스템과 원 시스템의 가제어성에 대해 알아보자. 그림 2에서 각각의 부시스템이 가제어하면 변환된 전체 시스템은 가제어하다. 그러면 식 (32)에서 미소한 ϵ 과 μ 에 대해서는 상태변수 Z 와 X 의 가제어성은 같다. 그런데 변환된 시스템의 행렬들의 점근성질을 알아보면 $a_{11}|_{\epsilon \rightarrow 0} = A_0$, $a_{22}|_{\epsilon \rightarrow 0} = A_{022}$, $a_{33}|_{\epsilon \rightarrow 0} = A_{33}$ 이고, $\beta_1|_{\epsilon \rightarrow 0} = B_0$, $\beta_2|_{\epsilon \rightarrow 0} = B_{02}$, $\beta_3|_{\epsilon \rightarrow 0} = B_3$ 이다. 이상의 사실로부터 다음의 결과를 얻을 수 있다. 즉 전제조건 1, 2, 3이 성립하고,

$$\begin{aligned} \text{rank} [B_0, A_0 B_0, \dots, A_0^{n-1} B_0] &= n \\ \text{rank} [B_{02}, A_{022} B_{02}, \dots, A_{022}^{m-1} B_{02}] &= m \quad (33) \\ \text{rank} [B_3, A_{33} B_3, \dots, A_{33}^{l-1} B_3] &= l \end{aligned}$$

이면, 식 (1)의 원 시스템은 $\mu \in (0, \mu^*]$, $\epsilon \in (0, \epsilon^*]$ 구간에서 제어가능(controllable)하다.

III. 최적제어 문제

이 장에서는 여러 매개상수 특이성동계에서의 최소 제어력에 대해 알아본다.^[16,17]

1. 시스템 모델

앞 장에서 논의된 선형 시불변 여러 매개상수 특이성동계는

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \epsilon \dot{X}_2 \\ \mu \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} U \quad (1)$$

이며, 앞 장에서 제안된 시간스케일 분리 방법으로 변환된 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \epsilon \dot{Z}_2 \\ \mu \dot{Z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} U \quad (30)$$

그리고 원 시스템의 가제어성은 앞 장에서 살펴본 바와 같이 전제조건 1, 2, 3과 식 (33)을 만족하면 된다.

또한 식 (33)과

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{022} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} = n+m+l \quad (34)$$

이면, 구간 $(0, \mu^*]$ 와 $(0, \epsilon^*]$ 에서, 주어진 시스템의 최소 제어력 문제에 있어서 특이구간(singular interval)은 없다.^[16]

식 (1)의 원 시스템이 러버스트(robust) 시스템이기 위하여 다음의 전제조건을 첨가한다.^[16] 전제조건 4. A_{022} 와 A_{33} 는 점근안정하다.

2. 최적제어와 시간스케일별 준체적제어

최적제어이론에는 최소시간(minimum time) 문제, 최소 제어력문제, LQ(linear quadratic) 문제 등이 있다. 그런데 LQ문제는 선형 시스템에서의 특정한 문제로 국한되어 있고, 성능지수에서의 하중(weighting factor)도 일반적으로 임의로, 정해야 하므로 여기서는 선형, 비선형을 막론하고 적용할 수 있는 전형적인 최적제어 이론인 최소 제어력문제를 풀어 보기로 한다.

최소 제어력문제란, 한정된 다입력(multi-input) $|U_e| \leq 1$, $e=1, 2, \dots, r$ 를 제어입력으로써, 주어진 $0 \leq t \leq T$ 시간 구간에서, 식 (1)의 원 시스템의 X_1, X_2, X_3 상태들을 최소의 제어력을 인가하여 초기조건 X_1^0, X_2^0, X_3^0 를 영으로 옮기는 문제이다.

최소 제어력 문제에서의 성능지수는 다음과 같다.

$$J = \int_0^T \sum_{e=1}^r |U_e(t)| dt \quad (35)$$

변환된 시스템의 Hamiltonian은 각각,

$$H_1 = \sum_{e=1}^r |U_e| + p^T [a_{11} Z_1 + \beta_1 U] \quad (36)$$

$$H_2 = \sum_{e=1}^r |U_e| + q^T [a_{22} Z_2 + \beta_2 U] \quad (37)$$

$$H_3 = \sum_{e=1}^r |U_e| + r^T [a_{33} Z_3 + \beta_3 U] \quad (38)$$

이고, 여기서 p, q, r 은 각각 Z_1, Z_2, Z_3 상태변수에 대한 준상태(costate) 벡터이다. 최소화 되기 위한 필요 조건은,

$$\dot{p} = -\frac{\partial H_1}{\partial Z_1} = -a_{11}^T p \quad \text{에서}$$

$$p = k_1 \exp(-a_{11}^T t) = k_2 \exp[a_{11}^T (T-t)] \quad (39)$$

$$\epsilon \dot{q} = -\frac{\partial H_2}{\partial Z_2} = -a_{22}^T q \quad \text{에서}$$

$$q = k_3 \exp(-a_{22}^T t / \epsilon) = k_4 \exp[a_{22}^T (T-t) / \epsilon] \quad (40)$$

$$\mu \dot{r} = -\frac{\partial H_3}{\partial Z_3} = -a_{33}^T r \quad \text{에서}$$

$$r = k_5 \exp(-a_{33}t/\mu) = k_6 \exp[a_{33}(T-t)/\mu] \quad (41)$$

이고, 여기서 k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 와 k_6 는 적분상수이다. 또한 Pontryagin의 최소원리에서,

$$U_e^* + p^T \beta_{1e} U_e^* \leq |U_e| + p^T \beta_{1e} U_e \quad (42)$$

$$U_e^* + (q^T/\epsilon) \beta_{2e} U_e^* \leq |U_e| + (q^T/\epsilon) \beta_{2e} U_e \quad (43)$$

$$U_e^* + (r^T/\mu) \beta_{3e} U_e^* \leq |U_e| + (r^T/\mu) \beta_{3e} U_e \quad (44)$$

이 성립하여야 하며, 여기서 행렬 $\beta_{1e}, \beta_{2e}, \beta_{3e}$ 는

$$\beta_k = [\beta_{k1}, \beta_{k2}, \dots, \beta_{kr}], \quad k=1, 2, 3$$

로 나타나는 행렬의 e번째 열(column)을 나타낸다. 또한 * 표시는 최적임을 나타낸다. 식(30)의 전체 시스템의 최적제어의 e번째 성분은 다음과 같다.

$$U_e^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{Copt} < -3 \text{ 이면} \\ 0, & -3 < \text{Copt} < 3 \text{ 이면} \\ -1, & \text{Copt} > 3 \text{ 이면} \\ \text{Copt} = \pm 3 \text{ 일 때는 정할 수 없음} \end{cases} \quad (45)$$

여기서 $\text{Copt} = p^T \beta_{1e} + (q^T/\epsilon) \beta_{2e} + (r^T/\mu) \beta_{3e}$ 이다. 그러면 $Z(T) = 0$ 가 된다.

시스템의 차수가 큰 대규모 시스템을 현대 제어이론을 적용하여 제어하는 데 있어서 가장 큰 어려움은 계산량이 엄청나게 많은 것이다. 또한 대규모 시스템은 여러 시간스케일이 복잡하게 결합되어 있어 전체적인 시스템의 응답을 추론할 수 조차 없다. 이와같은 이유로 인해 제어시스템을 실시간 구현을 하기는 거의 불가능하므로 시스템을 저차화 하게 된다. 그러므로 여기부터 이 절 끝까지는 시스템을 최적제어 하는데 있어서 최대한 계산량을 줄이기 위한 방안으로서 각 시간스케일 별로 주어진 전체 시간구간을 나누어 분산제어 시스템을 구성하기로 한다.

시스템이 최적제어 되기 위해서는 최종시간 T가 정해지면 최적 궤적 위에서 계산된 Hamiltonian은 상수이어야 한다. 즉,

$$H[Z^*(t), U^*(t), P^*(t)] = C, \quad t \in [0, T] \quad (46)$$

이다. 따라서 식(45)에서 위의 새로운 조건에 따라, ϵ 과 μ 가 영으로 접근해도 (q^T/ϵ) 과 (r^T/μ) 는 유한한 값을 갖게 된다. 그리고 전제조건 4에서, Z_2 와 Z_3 상태 변수의 계수행렬의 대표값을 갖는 A_{022} 와 A_{33} 행렬의 고유치가 음의 실수부를 가지므로, 식(40), (41)로 나타내어지는 준상태 q, r은 최종시간 T 근처에서 큰 값을 갖는다. 먼저 상태 Z_3 의 정정시간(settling time) 크기의 차수로 t_2 를 정하면 t_2 시각 이 전의 시간 구간에서는 준상태 r의 값은 거의 영에 가깝다. 그리고 $t_2 \leq t \leq T$ 의 시간구간은 Z_3^0 를 영으로 옮기기에 충분하다. 같은 방법으로 상태 Z_2 에 대해서 t_1 을 정한다. 그러면 $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ 이다. 그러면 식(45)의 Copt에서 t_1 시간 이전에는 q, r의 값이 거의 영이 되어 준상태 p와 β_{1e} 의 항

으로만 상태 Z_1 의 제어를 구할 수 있다. 왜냐하면 상태 Z_1 의 시간스케일 상에서는 $t_1 \leq t \leq T$ 시간구간은 전체 시간구간에 비해 무시할 수 있기 때문이다. 같은 방법으로 Z_2, Z_3 에 대해서는 각각 q, β_{2e} 와 r, β_{3e} 만의 항으로 제어를 구성한다.

위의 시간구간 분할에 관한 논의를 간단히 하기 위해, 확장된 시간변수(stretched time variable) 개념을 도입하면 다음과 같다.

$$\tau_1 = (T-t)/\epsilon, \quad \tau_1^* = (T-t_1)/\epsilon \quad (47)$$

$$\tau_2 = (T-t)/\mu, \quad \tau_2^* = (T-t_2)/\mu \quad (48)$$

또한 최소 제어력 문제에 있어서, 전체 시스템이 특이구간을 포함하지 않으면 3 위치(bang-off-bang) 제어형태가 된다. 따라서 제어입력이 상수가 되므로 성능 지수는 제어입력이 인가될 때만 값이 커진다.

앞에서 살펴본 바와 같이, 여러 매개상수 특이섭동계에서의 준 최적 제어력 문제에서는 다음 각 부시스템 별로 시간구간을 나누어 조사하면 된다.

즉, Z_1 부시스템에 대해서는 시간구간 $0 \leq t < t_1$ 에서 최적인 U_1^* 를 계산하고, 그 다음 Z_2, Z_3 부시스템에 대해서는 각각 $t_1 \leq t < t_2$ 와 $t_2 \leq t < T$ 에서 U_2^*, U_3^* 를 구한다.

상태 Z_1 에 대한 최적제어 U_1^* 는 $0 \leq t < T - \epsilon \tau_1^*$ 구간에서 인가되어야 하고 이 제어입력은 원 시스템의 X_1^0 상태를 영의 근방 $0(\epsilon)$ 으로 보낸다. 여기서 t 시간스케일 상에서 $T - t_1 = 0(\epsilon)$ 이다. U_1^* 의 e번째 성분은 다음과 같다.

$$U_{1e}^* = \begin{cases} 1, & \text{Copt}_1 < -1 \text{ 이면} \\ 0, & -1 < \text{Copt}_1 < 1 \text{ 이면} \\ -1, & \text{Copt}_1 > 1 \text{ 이면} \\ \text{Copt}_1 = \pm 1 \text{ 이면 정할 수 없음} \end{cases} \quad (49)$$

여기서 $\text{Copt}_1 = p^T \beta_{1e}$ 이다. 상태 Z_2 에 대한 최적제어 U_2^* 는 $T - \epsilon \tau_1^* \leq t < T - \mu \tau_2^*$ 구간에서 원 시스템의 X_2^0 상태를 영의 근방 $0(\mu)$ 로 보낸다. 여기서 τ_1 시간스케일 상에서 $T - t_2 = 0(\mu)$ 이다. U_2^* 의 e번째 성분은 다음과 같다.

$$U_{2e}^* = \begin{cases} 1, & \text{Copt}_2 < -2 \text{ 이면} \\ 0, & -2 < \text{Copt}_2 < 2 \text{ 이면} \\ -1, & \text{Copt}_2 > 2 \text{ 이면} \\ \text{Copt}_2 = \pm 2 \text{ 이면 정할 수 없음} \end{cases} \quad (50)$$

여기서 $\text{Copt}_2 = p^T(t_1) \beta_{1e} + (q^T/\epsilon) \beta_{2e}$ 이며, $p^T(t_1)$ 은 시간 t_1 에서의 준상태 p의 값이다. 같은 근거로 U_3^* 의 e번째 성분은 다음과 같다.

$$U_{3e}^* = \begin{cases} 1, & \text{Copt}_3 < -3 \text{ 이면} \\ 0, & -3 < \text{Copt}_3 < 3 \text{ 이면} \\ -1, & \text{Copt}_3 > 3 \text{ 이면} \\ \text{Copt}_3 = \pm 3 \text{ 이면 정할 수 없음} \end{cases} \quad (51)$$

여기서 $Cop_3 = p^T(t_1)\beta_{1e} + [q^T(t_2)/\epsilon]\beta_{2e} + (r^T/\mu)\beta_{3e}$ 이다.

위의 결과로부터 식(1)의 원 시스템에 대한 준 최적 제어는 다음과 같다.

$$U^*(t) = U_1^*(t) + U_2^*(t) + U_3^*(t) \quad (52)$$

최적제어인 경우에는 식(55)에서와 같이 준상태 p, q, r 과 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 의 결합으로 제어기가 구성된다. 반면 준 최적제어인 경우에는 각각의 부시스템의 준상태에 대한 계산만으로 제어기가 구성된다. 결과적으로 식(52)와 같이 전체 시스템을 시간스케일 별로 시간구간을 나누어 제어하는 분산적 구조의 준 최적제어 이론은 계산량을 상당히 줄임으로써 실시간 구현을 쉽게 할 수 있는 좋은 설계 방안이 된다.

3. 예제

다음과 같은 세 종류의 시정수를 가진 동적 시스템에 대해 알아보자.

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ 0.1 \dot{X}_2 \\ 0.01 \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} U \quad (53)$$

식(53)의 시스템은 식(1)의 원 시스템에서 $\epsilon=0.1, \mu=0.01$ 일 때이다. 성능지수 J 는,

$$J = \int_0^5 |U(t)| dt \quad (54)$$

이며, 구간 $0 \leq t \leq 5$ 에서 위 시스템의 초기상태 $2, 1, 1$ 을 성능지수 J 를 최소화 하는 제어입력을 사용하여 영으로 보내야 한다. 여기서 $|U(t)| < 1$ 이다.

시간스케일 분리 방법으로 원 시스템을 식(30)의 분리된 시스템으로 표현하면,

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ 0.1 \dot{Z}_2 \\ 0.01 \dot{Z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.50 & 0 & 0 \\ 0 & -3.544 & 0 \\ 0 & 0 & -3.950 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.64 \\ 1.533 \\ 1.025 \end{bmatrix} U \quad (55)$$

이고, 여기서 $0(\epsilon)$ 이하의 항은 무시하였다. 식(53)의 원 시스템과 식(55)의 변환된 시스템에서 두 시스템 모두 가제어함을 알 수 있고, 특이구간도 생기지 않음을 알 수 있다. 원 시스템의 고유치는 각각 $-4.497, -35.559, -393.943$ 이며, 제안된 방법으로 변환된 시스템의 고유치는 $-4.50, -35.44, -395.0$ 이다. 이것은 변환된 시스템이 원 시스템에 매우 근사함을 보여준다.

최소화 하기 위한 필요조건에서, 준상태 p, q, r 은 다음과 같다.

$$p = 4 \exp[-4.50(5-t)] \quad (56)$$

$$q = 2 \exp[-35.44(5-t)] \quad (57)$$

$$r = 2 \exp[-395.0(5-t)] \quad (58)$$

여기서 Z_1 부시스템에 대한 하중을 Z_2 및 Z_3 부시스템보다

두 배로 하였다. 그러면 식(55)의 전체 시스템에 대한 최적제어는 식(45)로부터 다음과 같게 된다.

$$U^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 4.72 \text{이면} \\ -1, & 4.72 \leq t < 5 \text{이면} \end{cases} \quad (59)$$

식(49), (50), (51)로부터 각 부시스템 별로 분산적 제어방법으로 구한 준 최적제어는 다음과 같고, $t_1=4.7$ (sec)이며, $t_2=4.97$ (sec)이다.

$$U_1^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 4.48 \text{이면} \\ -1, & 4.48 \leq t < 4.70 \text{이면} \end{cases} \quad (60)$$

$$U_2^*(t) = -1, \quad 4.70 \leq t < 4.97 \text{이면} \quad (61)$$

$$U_3^*(t) = -1, \quad 4.97 \leq t \leq 5 \text{이면} \quad (62)$$

원 시스템과 변환된 시스템이 모두 안정하므로 최종 시간 가까운 시간구간에서 제어력이 인가된다. 이것은 시스템이 안정하면 제어력이 인가되지 않는다 할지라도 시스템의 초기 상태들은 영으로 천이하기 때문에, 제어기는 시스템이 어느 정도 영에 가까워진 후에 제어력을 발생시키기 때문이다. 또한 준 최적 제어기는 체적 제어기보다 계산량은 훨씬 줄게 되나 성능지수 J 는 더 커짐을 알 수 있다.

IV. 결 론

선형 시불변 여러 매개상수 특이성동계를 계층적 차화법을 도입하여, 각각의 서로 다른 시간 스케일에 따라서 여러개의 부시스템으로 분리하는 방법을 제안하였다. 제안된 방법으로 여러 시간스케일이 결합되어 있는 전체 시스템을 완전히 분리하여 각각의 부시스템으로 기술했다. 분리된 각각의 부시스템이 가제어하면 원 시스템도 가제어함을 보였다.

또한 전체 시스템을 최소 제어력문제에 적용하여 최적제어 입력을 구하였다. 그리고 전체 시스템을 시간스케일 별로 나누어 제어하는 분산적 구조의 제어기를 얻음으로써, 계산량을 상당히 줄여 실시간 구현을 쉽게 할 수 있는 준 체적제어 이론을 제안하였다. 그 결과 시간스케일 분리 방법이 특히, 준 체적제어 설계에 관해 유용함을 보였다.

參 考 文 獻

- [1] N.R. Sandell, Jr., P. Varaiya, M. Athans and M.G. Safonov, "Survey of decentralized control methods for large scale systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.* vol. 23, pp. 108-128, 1978.
- [2] N.N. Moiseev and F.L. Chernousko, "Asymptotic methods in the theory of optimal control", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 26, pp. 993-1000, 1981.

- [3] P.V. Kokotovic, R.E.O'Malley, Jr. and P. Sannuti, "Singular perturbations and order reduction in control theory-An overview", *Automatica*, vol. 12, pp. 123-132, 1976.
- [4] V.R. Saksena, J.O'Relly and P.V. Kokotovic, "Singular perturbations and time-scale method in control theory: Survey 1976-1983", *Automatica*, vol. 20, pp. 273-293, 1984.
- [5] G. Peponides, P.V. Kokotovic and J.H. Chow, "Singular perturbations and time scales in nonlinear model of power systems", *IEEE Trans. Circuits syst.*, CAS-29, pp. 758-767, 1982.
- [6] D. Teneketzis and N.R. Sandell, Jr., "Linear regulator design for stochastic systems by a multiple time-scale method". *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 22, pp. 615-624, 1977.
- [7] K.W. Chang, "Singular perturbations of a general boundary value problem", *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 3, pp. 520-526, 1972.
- [8] P.V. Kokotovic, "A riccati equation for block diagonalization of ill-conditioned systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 20, pp. 812, 1975.
- [9] B. Sridhar and N.K. Gupta, "Missile guidance Laws based on singular perturbation methodology", *J. Guidance and control*, vol. 3, pp. 158-165, 1980.
- [10] G.S. Ladde and D.D. Siljak, "Multiparameter singular perturbations of linear systems with multiple time scales", *Automatica*, vol. 19, pp. 385-394, 1983.
- [11] R.E. O'Malley, Jr., "The singularly perturbed linear state regulator problem", *SIAM J. Contr.*, vol. 10, pp. 399-413, 1972.
- [12] R.R. Wilde and P.V. Kokotovic, "Optimal open-and closed-loop control of singularly perturbed linear systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 18, pp. 616-625, 1973.
- [13] P.V. Kokotovic and A.H. Haddad, "Singular perturbations of a class of time-optimal controls", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 20, pp. 163-164, 1975.
- [14] K.V. Krikorian and C.T. Leondes, "Application of singular perturbations to optimal control", *Control and dynamic systems*, vol. 18, pp. 13-160, 1982.
- [15] 김삼수, 홍재근, 김수중, "특이섭동계에서의 여러 시간스케일 분리와 가제어성" 대한전자공학회 하계학술대회 논문집, vol. 8, pp. 341-344, 1985.
- [16] D.E. Kirk, *Optimal control theory-an introduction* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, pp. 184-325, 1970.
- [17] B.D.O. Anderson and J.B. Moore, *Linear Optimal Control*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, pp. 9-270, 1971.
- [18] C.T. Chen, *Linear system theory and design*. CBS College Publishing, Holt, Rinehart and Winston, pp. 488-503, 1984.