

흙의 構成式 解說(Ⅱ)

朴	炳	基*
鄭	鎮	燮**
李	汶	樹***

2.3 彈塑性體

1) 序 言

一般的으로 材料는 降伏과 동시에 硬化, 軟化 또는 이들의 境界狀態인 完全塑性狀態를 거쳐 分離破壞된다. 우리가 자주 쓰는 Coulomb 法則은 軟化의 極限狀態인 完全塑性狀態에서 發生하는 破壞를 대상으로 한 것이며 이때의 應力狀態를 단순한 直線關係가 있다고 본 것이다. 그러나 土質材料를 이와같이 어느 特定狀態에 단 국한하지 않고(위와 같은 상태는 限界荷重의 算出에는 의의가 있다) 變形의 全過程 즉 初期降伏狀態를 거쳐 硬化→軟化→破壞에 이르는 彈塑性變形의 全過程을 통해 地盤變動을 밝히지 않으면 土質力學의 理論的 體系化가 어렵다. 이와같은 研究의 실마리는 1950年代 中半부터 Drucker 등에 의해 시작되었다. 이들은 흙의 硬化 및 軟化에 대한 몇가지의 중요한 假說을 提案하여 彈塑性 構成式的 발전을 위한 길을 터놓았다. 이들은 塑性體積變形率硬化則(rule of plastic volumetric strain hardening)의 概念을 제창하여 흙의 硬化過程에는 半球形의 降伏面을, 軟化에 대해서는 圓錐形의 降伏面을 제안하고 두번째로 이들의 塑性變形率增分空間에 關聯流動則(AsSociate flow

rule)이 適用된다고 밝혔다. 이 假說은 그후 Cambridge 學派에 계승되어 이른바 Cam-clay 모델로 대표되는 彈塑性構成式의 제안으로 이어지고 이후 彈塑性構成式의 主流가 되어 많은 발전을 보게 되었다. 오늘날 흔히 彈塑性體 또는 彈塑性構成式이라고 한마디로 이야기하지만 그 내용을 살펴보면 어느 하나의 根本理論이 있는 것이 아니고 여러가지 概念아래 假說을 세워 多樣한 理論展開을 통해 構成式을 제안하고 있어 百家爭鳴의 감이 있다. 또한 그 내용도 쉽게 理解하기가 어려워 土質工學을 전공하는 사람으로서 많은 時間이 소요된다. 本文에서는 먼저 彈塑性理論의 基本개념과 그리고 提案되어 있는 彈塑性式의 分類를 살펴보고 그 다음으로 여기에 時間效果를 고려한 彈粘塑性體에 대해 언급한다.

2) 彈塑性體理論에 쓰이는 基本曲面¹⁾

主應力을 軸으로 하는 應力空間內에서 彈塑性體는 降伏曲面, 負荷曲面, 塑性포텐셜(potential) 曲面, 破壞曲面的 네가지曲면을 想定할 수 있으며 이를 二次元應力面으로 나타내면 다음과 같다.

① 降伏曲面, Fig 2.3(a)에서 처럼 應力空間의 原點 0를 포함하는 彈性域과 그 外部의 塑性域과를 구별하는 閉曲面을 말한다. 따라서 彈

* 正會員, 全南大學校 工科大學 教授

** 正會員, 圓光大學校 工科大學 副數授

*** 正會員, 全南大學校 農科大學 助數授

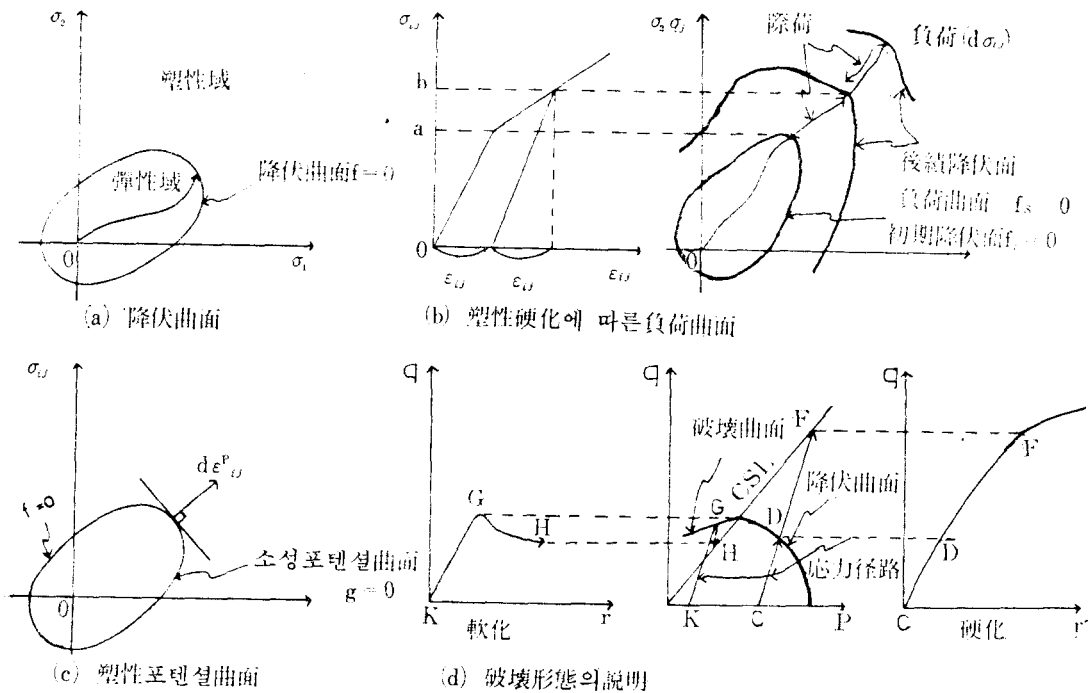


Fig 2.3. 基本曲面の説明

塑性體는 이 降伏曲面內에서는 負荷方面에 관계 없이 순수한 彈性舉動을 보인다.

② 負荷曲面, 彈性體가 계속적으로 塑性變形을 일으키는데 必要한 應力狀態를 規定하는 閉曲面이다(b圖). 따라서 負荷曲面은 어떤 값의 應力增分量에 의해 定해지며 이 負荷曲面을 境界로 內側은 除荷狀態, 外側은 應力增分量에 의한 負荷狀態를 의미한다. 따라서 ①의 降伏曲面의 變化과정의 하나로 볼 수 있으며 통상 구별하지 않고 이들 曲面을 表現하는 函數를 통틀어 Loading function, 특별히 구별해야할 경우는 ①을 Initial yield (loading) function ②를 Subsequent yield function 이라 부른다.

③ 塑性 Potential 曲面; 塑性變形率增分量의 方向을 규정하는 閉曲面을 말한다. 그림 (c)에서처럼 어느 負荷曲面上의 어느 應力點에서 外向의 法線方向으로 塑性變形率의 增分量의 方向이 결정될때의 曲面이다. 따라서 ②는 應力狀態의 표현이고 ③은 變形率狀態의 표현이다.

④ 破壞曲面; 彈塑性體의 破壞狀態의 應力點을 연결한 曲面이다. 破壞가 어떠한 狀態를 말

하는 것인가의 定義는 아직 確立되어 있지 않으나 抵抗(剪斷)이 增加하는 狀態에서 減少하는 變化過程을 指摘하고 外力에 抵抗하는데 最大의 剪斷應力이 動員되는 狀態를 破壞라고 본다. 그러나 흙의 경우 限界狀態에 이르기까지의 應力經路에는 그림 (D)에서와 같이 2종의 형태가 있다. 그 하나는 CDF처럼 硬化만 계속되다가 破壞狀態와 限界狀態가 일치하는 경우와 또하나 KGH처럼 G點에서 硬化過程을 통해 剪斷應力이 最大가 되었다가 다시 變形率軟化를 거쳐 H點에서 限界狀態에 이르는 형태이다. 이때 특히 G點의 狀態를 破斷狀態(rupture)라고 구별하기도 한다. 이는 限界狀態를 기준으로 본 것인데 定義한바와 같이 最大剪斷應力狀態는 破壞狀態에 해당되지만 限界狀態는 이것과 함께 應力이 一定하고 剪斷變形(r)만 계속되는 殘留應力狀態를 포함하는 硬化, 軟化過程을 모두 설명하는 規準(criterion)이 된다. 破斷狀態란 材料가 두 개 이상으로 分離되는 狀態를 말하는데 흙에 있어 서는 粒狀體이기 때문에 Dilatancy의 영향으로 體積變化가 일어날뿐 應力狀態가 계속되는 現象

을 보이며 이때는 軟化狀態에 있다. 이상의 各曲面을 數學的으로 表現한 스칼라函數가 各々 降伏, 負荷, 塑性포텐셜 函數라하고 破壞曲면에 대해서는 破壞規準이라고 한다. 破壞規準을 除外하고 나머지 3 曲面의 函數는 數學的展開를 위해서 Drucker의 다음과 같은 假說을 따르게 된다.

① 이들 曲面은 언제나 外側으로 凸面(Convex)이다. ② 이들 函數는 閉曲面의 內部에서(-), 外部에서(+)로 정의한다. ③ 이들 曲面이 連續일때 塑性增分벡터 $d\varepsilon^p$ 또는 成分 $d\varepsilon_{ij}^p$ 의 方向은 曲面과 直交한다(normality rule).

3) 構成式에 쓰이는 主要事項²⁾

① 負荷函數와 負荷基準; 塑性狀態에 있는 彈塑性體에 다시 負荷(載荷)를 계속하면 보통 硬化가 일어나고 塑性變化가 進行되며 새로운 塑性狀態로 移行된다. 이 말은 負荷曲面이 새로 載荷되는 應力에 의하여 應力空間內에서 擴大移動되는 것을 뜻한다. 따라서 負荷函數는 이와같은 負荷曲面의 移動, 擴大를 表現할 수 있어야 한다. 負荷曲面의 位置나 形狀은 硬化程度에 따라 變化되지만 보통 彈塑性體가 지금까지 받아들인 塑性負荷履歷에 의존한다고 본다. 이 負荷函數(또는 降伏函數는 應力 σ_{ij} 와 負荷履歷과 관계가 있는 媒介變數로서 塑性變形率 ε_{ij}^p , 硬化變數 k 로 이루어지며 다음과 같다.

$$f = f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) = 0 \dots \dots \dots (2.11)$$

硬化變數 k 는 硬化의 程度를 나타내는 負荷曲面의 크기에 관계되고 ε_{ij}^p 와 함께 變化한다. 따라서 h_{ij} 라는 常數를 이용하여 다음과 같이 표현한다.

$$d_k = h_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \dots \dots \dots (2.12)$$

만일 $h_{ij} = \sigma_{ij}$ 일 때 k 는 塑性일과 같고 이를 加工硬化變數(work hardening parameter)라하며 한편 h_{ij} 가 ε_{ij}^p 나 그 增分 $d\varepsilon_{ij}^p$ 로 놓을 때 k 를 變形率硬化變數(strain hardening para.)라고 부른다. 그러나 흙의 變形率硬化變數로서는 物理的 意味가 확실한 塑性體積變形率 v^p 를 써서

$$d_k = dv^p \dots \dots \dots (2.13)$$

로 표현한다. 彈塑性體가 어느 塑性狀態에 있고 應力點이 언제나 負荷曲面上에 있으면 (2.11)식은 0이 된다. 즉

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) = 0 \dots \dots \dots (2.14)$$

지금 위치와 같은 塑性狀態에 있는 要素에 應力增分 $d\sigma_{ij}$ 가 작용할때는 생각해 본다. (2.11)식의 全微分은 다음과 같다.

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial k} dk \quad (2.15)$$

이 식에서 어느 時點에서 $f=0$, $df < 0$ 의 상태를 생각하면 應力點은 負荷曲面의 內部로 移行한다. 이 과정을 除荷(Deloding)라 하고 이 때는 塑性變形이 생기지 않으므로 $d\varepsilon_{ij}^p = 0$ 따라서 (2.12)식은 0이 된다. 그래서 다음과 같은 負荷基準이 성립된다.

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0, f=0 \text{ (除 荷)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0, f=0 \text{ (中立負荷)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0, f=0 \text{ (負 荷)}$$

② 流動則(Flow rule): 흙의 構成式을 세우는데 그 基本假定이 되어 있는 流動則이란 塑性增分理論의 應力-變形關係를 지배하는 法則을 가정하는 개념을 말하는 것으로 塑性變形의 增加가 連續的으로 물흐르듯이 進行되어야 함을 상징한다. 流動則에는 다시 關聯流動則(Associate Flow rule)과 非關聯流動則(Non Associate F.r)으로 나누어지는데 數學的으로 負荷函數 f 와 塑性포텐셜函數 g 가 一致하는 경우는 前者이고 一致하지 않는 경우는 後者를 일컫는다. 지금 負荷函數가 單一의 경우 塑性增分の 應力-變形關係를 일반적인 非關聯流動則의 形式으로 나타내면 다음과 같다.

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \lambda > 0 \dots \dots \dots (2.16)$$

위 식은 塑性變形增分 $d\varepsilon_{ij}^p$ 가 函數 g 에 대한 應力 σ_{ij} 에 관한 미분형식으로 표현되는 것을 뜻하며 일반적으로 이와같이 벡터場(ε_{ij}^p)이 스칼라函數(g)의 勾配(미분)로 표현될 때 그 스칼라函數를 포텐셜函數라 하고 이때 g 는 塑性포텐셜函數이다. 이 식에서 應力과 變形이 동시에 한 식에 묶여져 있으므로 이들의 各各의 主軸은 一致하지 않으면 안된다. 一致하지 않을 경우는 매우 복잡한 數式表現을 빌려야 되고 構成式은 더욱 복잡해진다. λ 는 塑性負荷過程에 있는 어느 應力點은 언제나 負荷曲面上에 있다는 條件(co-

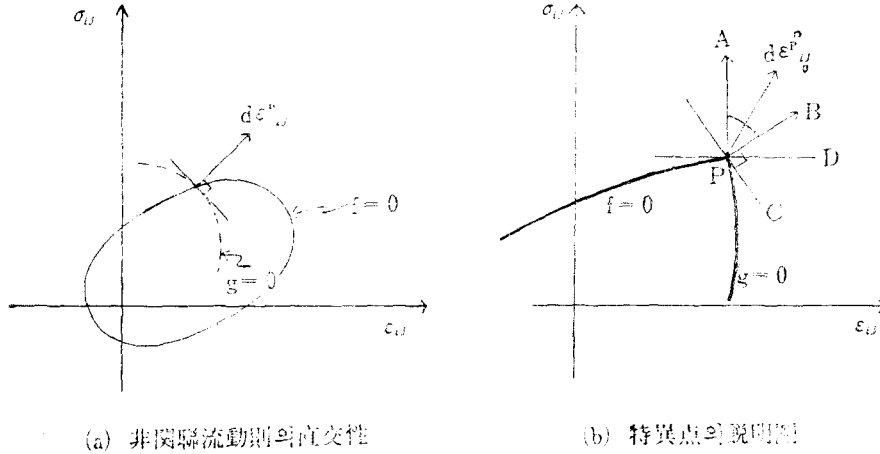


Fig 2.4

nsistency condition)으로부터 결정되는 常數로서 다음과 같다. 즉 (2.15)식을 0으로 놓고 $k=k(\epsilon_{ij}^p)$ 라 假定하여 $dk=k \cdot d\epsilon_{ij}^p$ 로 놓고 (2.15)식에 대입하여 (2.16)식과 關係해서 다음과 같이 구한다.

$$\lambda = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{kl}^p} + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \epsilon_{kl}^p} \right) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (2.17)$$

한편 (2.17)식을 다음과 같이 변형하여

$$\frac{1}{H} = - \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{kl}^p} + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \epsilon_{kl}^p} \right) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \quad (2.18)$$

(2.16)식에 대입하면 식(2.19)를 얻는다.

$$d\epsilon_{ij}^p = H \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \right) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \dots \dots \dots (2.19)$$

H는 硬化函數(Hardening function)라 부르며 應力增分 $d\sigma_{ij}$ 에 대하여 $\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right) d\sigma_{ij} > 0$ 가 됨으로 H는 (+)값이다.

이상 塑性變形에 대한 構成式은 式(2.16)식과 (2.17)식에 의해 구해지는데 여기서 關聯流動則이 적용될 경우는 負荷函數(또는 降伏函數) f는 塑性포텐셜函數 g와 一致하므로 $f=g$ 이고 결국 대상으로 하는 흙재료의 負荷函數 (2.14)식을 결정만 하면 構成式이 확정된다. 만일에 負荷函數가 塑性포텐셜函數와 一致하지 않고 負荷函數가 복수일 경우 즉 $f=0$ 와는 다른 또 하나의 $g=0$ 의 函數가 있을 경우는 塑性變形率增分벡터의 方向은 唯一하게 定義되지 않고 特異點이 된다.

그 한 예를 다음 Fig.2.4에 보인다.

흙의 力學的 舉動은 關聯流動則을 따르지 않으므로 非關聯流動則을 적용하여 構成式을 유도하는 경우도 많다. 따라서 이 때는 $f=0$ 및 $g=0$ 의 2개의 函數를 결정해야 한다. 따라서 (2.17)식에 의해 λ 가 구해지고 (2.19)식에 의해 $d\epsilon_{ij}^p$ 가 구해진다. 이때 塑性變形率增分의 方向은 그림 (b)에서 처럼 特異點에 負荷曲線에 그은 接線 C, D에 세운 直角方向의 \overline{PB} 및 \overline{PA} 의 內部 \overline{PAB} 內에 있다. 이 안에서는 $f=0, g=0$ 의 外側領域으로서 이 안에서의 應力增分은 負荷函數 f, g에 대해 負荷狀態가 된다. 이 以外의 領域에서는 除荷狀態이다. 複數의 負荷函數를 이용하는 構成式은 최근 많은 發展을 보이고 있으며 軟化狀態를 대상으로 하는 흙에서는 거의 關聯流動則을 부정하고 있고 硬化狀態를 대상으로 하는 경우도 모래에 대해서는 非關聯流動則에 의존하고 있다. 그 대표적인 것으로는 Lade, Poo-rooshab, 등이 있고 Cambridge model은 關聯流動則을 적용한 대표적 예이다.

③ 硬化則: 塑性變形率增分 $d\epsilon_{ij}^p$ 는 前述한 (2.19)식 등에 의해 塑性變形의 進展에 따라 負荷曲面이나 塑性포텐셜曲面의 變化를 규정하므로써 구해진다. 이와같이 曲面의 變化를 규정하는 식을 硬化則이라 하고 等方, 移動, 複合등의 硬化則이 있다. 硬化則은 흙의 舉動을 충분히 반영함과 동시에 그 표현은 구체적인 解析이 가능

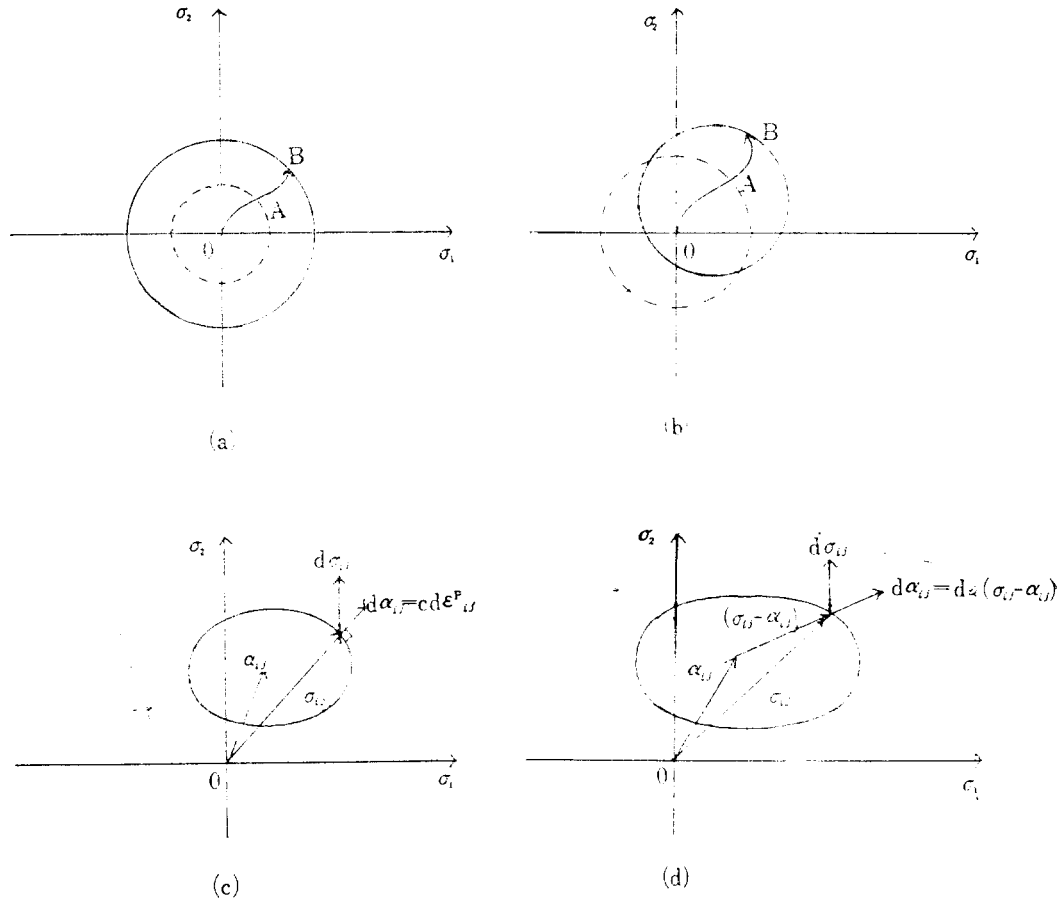


Fig 2.5. 硬化則의 설명

한 형태라야 한다. 이들을 그림을 중심으로 略述하면 다음과 같다.

① 等方硬化則: 이 硬化則은 그림 2.5(a)에서처럼 負荷曲面의 크기는 硬化에 따라 增大하지만 形狀이나 中心은 不變이다. 따라서 負荷函數(2.11)식은 塑性變形率 ϵ_{ij}^p 와는 獨立이 되고 다음식과 같다.

$$F = f(\sigma_{ij}) - K(k) = 0$$

$K(k)$ 는 硬化變數 (2.11식)의 函數로서 K 의 變化에 따라 負荷曲面의 크기가 定해진다. 이와 같은 等方硬化는 引張과 壓縮의 影響까지 고려할 수 있는 Bauginger 效果는 설명할 수 없는 단점이 있으나 限界狀態理論이나 Cap model 등에서처럼 等方硬化를 전체로한 構成式에서는 移動降伏面을 정의하는데 쓰인다.

② 移動硬化則(Kinematic hardening rule):

그림 (b)에서처럼 負荷曲面의 形狀과 크기는 硬化에 의해 不變이지만 그 中心이 移動한다. 負荷曲面의 中心을 α_{ij} 라 하면 負荷函數는 다음과 같은 형태이다.

$$F = f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - K = 0$$

이 硬化則은 Bauginger의 效果나 異方性을 고려할 수 있다. 負荷函數의 決定法은 $\alpha_{ij} = 0$ 일 때의 形狀과 α_{ij} 의 硬化에 따른 變化를 알아야 한다. 後者의 變化를 規定하는 方法에는 다음 두 가지의 方法으로 요약할 수 있다. (가) Prager's Kinematic hardening rule: 그림 (c)에서처럼 $d\alpha_{ij}$ 는 塑性變形率增分 $d\epsilon_{ij}^p$ 에 比例한다고 가정한다. 따라서 $d\alpha_{ij} = c d\epsilon_{ij}^p$, c 가 常數일 때는 線形硬化則 그렇지 않을때를 非線形硬化則으로 나누다. (나) Shield and Ziegler's rule(3): 그림 (d)에서처럼 中心의 移動은 中心 α_{ij} 와 負荷應

力 σ_{ij} 를 연결하는 방향으로 발생한다고 본다. 따라서 中心의 變化量 $d\alpha_{ij}$ 는 $d\alpha_{ij} = d\mu(\sigma_{ij} - \alpha_{ij})$ 로 표현되고 $d\mu$ 는 (+)의 스칼라량이다. (가)의 $d\alpha_{ij}$ (나)의 $d\alpha_{ij}$ 는 (가)의 경우 $d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{df}{\partial \sigma_{ij}}$ 에서 $d\lambda$ 를 구해 결정되고 (나)의 경우 $d\mu$ 를 구하므로써 계산되는데 그 값은 각각 다음과 같다

$$d\lambda = \frac{1}{c} \frac{(\partial f / \partial \sigma_{ij}) d\sigma_{ij}}{(\partial f / \partial \sigma_{km}) (\partial f / \partial \sigma_{km})}$$

$$d\mu = \frac{(\partial f / \partial \sigma_{ij}) d\sigma_{ij}}{(\sigma_{km} - \alpha_{km}) (\partial f / \partial \sigma_{km})}$$

(다) Combined hardening rule : 위 (가)(나)를 복합시킨 것으로 보통 負荷曲面的 等方的 擴大와 平行移動을 고려한 硬化則으로서 負荷函數는 $F = f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - K(k) = 0$ 의 형태이다. 이를 利用한 모델을 Nested Surfaces model⁽⁴⁾ 이라고 한다.

④ Drucker의 假說을 만족시키지 않는 彈塑性體 : 前述한바 있는 Drucker의 假說을 만족시키지 않는 彈塑性理論이란 降伏函數 f_y 와 塑性포텐셜函數 g 가 負荷函數 f 와 一致하지 않는 경우를 말한다. 一致하는 경우와 그렇지 않는 경우를 합쳐서 다음 네가지로 彈塑性理論을 分類한다.

I 群, $f_y = f, g = f$

II 群, $f_y = f, g \neq f$

III 群, $f_y \neq f, g = f$

IV 群, $f_y \neq f, g \neq f$

I 群은 Drucker의 假說이 그대로 適用되는 理論으로서 關聯流動則에 의한 이 理論의 構成式을 이용하면 變分原理나 彈塑性境界值問題에 대한 解의 唯一性은 보장된다. II 群은 負荷函數와 塑性포텐셜函數가 相異한 非關聯流動則에 의한 彈塑性理論으로서 實驗結果를 반영하는 경우에 널리 쓰인다. III, IV 群은 負荷曲面과 相異한 降伏曲面을 定義하여 彈性域을 規定하는 彈塑性理論이다. 이는 彈性域을 一點으로 縮小시켜 降伏函數를 고려하지 않고 바로 塑性變形이 發生한다고 보는 理論으로서 反轉負荷(壓縮에서 引張領域까지 고려하는 상태) 즉 反復荷重을 고려하는 경우에 쓰인다. 降伏曲面과 負荷曲面이 一致하지 않는 경우는 II, III, IV 群으로서 최근 彈塑性理論에서 彈性特性은 塑性變形의 履歷에 크게 의존한다는 Elastoplastic Coupling 理論등은 Drucker의 理論을 크게 縮小시키고 있다.

4) 彈塑性構成式의 概要

① 關聯流動則을 適用하고 있는 경우 : 이 모델은 Fig 2.6과 같이 主應力空間에서 圓錐形을 이루는 破壞曲面 또는 限界狀態曲面의 開放端에 Cap 形態의 降伏曲面을 假定한다. 이 降伏曲面은 體積降伏曲面이라고도 하는데 塑性體積變形率의 增加에 따라 靜水壓軸을 中心으로 相似形으로 擴大된다. 따라서 이 모델은 塑性體積變形率을 變形率硬化媒介變數로 하는 等方硬化모델이다.

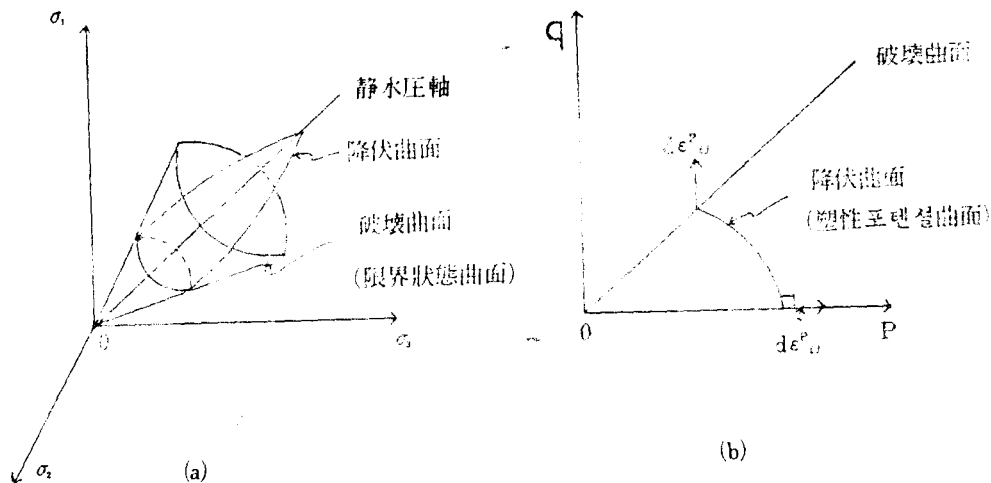


Fig 2.6

그림 (a)를 p, q 면으로 投影하면 그림 (b)와 같다. 關聯流動則이 적용되므로 降伏曲面과 塑性포텐셜曲面은 一致하고 있으며 이 曲面과 破壞曲面과의 交點에서 塑性變形率增分벡터의 方向은 q 軸과 平行이고 降伏曲面은 p 軸과 直交한다. 이상은 Drucker의 假定을 그대로 적용하고 있는 경우이지만 여러가지 이 형의 제안 모델들은 Cap형의 降伏曲面의 誘導方式에 따라 특징이 있다. Roscoe는 指數函數형의 降伏函數를 유도하여 Cam-clay 모델을 제안하여 粘土의 剪斷·壓密現象을 統一的으로 說明할 수 있는데 공헌하였다. 그 후 降伏曲面을 橢圓形으로 提案한 修正 Cam clay 모델, 이 모델을 모래에 적용한 Granta-gravel 모델, Dilatancy 모델 등이 있다.

② 非關聯流動則을 適用하고 있는 경우: 이 모델은 Fig 2.7에서 처럼 複數의 負荷曲面 또는 降伏曲面을 이용한다. 이는 흙의 降伏曲面을 剪斷降伏과 體積降伏曲面으로 分離하여 해석한다.

그림 (a)는 q 一定의 降伏曲面 f_1 과 橢圓形 또는 기타의 Cap形體積曲面 f_2 를 假定한 모델로서 Roscoe-Burland, Prevost-Höeg 모델 등이다. 그림 (b)는 降伏曲面 f_1 이 圓錐形이나 기타의 曲面으로 假定하고 Cap形體積降伏曲面과 交叉시키고 있다. 이 모델에는 Lade, Pender, Vermeer 모델등이 있다. 이외에도 여러가지 假定아래 많은 構成式理論과 그에 따른 모델이 제안되고 있다. 다음 표는 그 흐름과 모델을 年代別³⁾로 간추린 것이다.

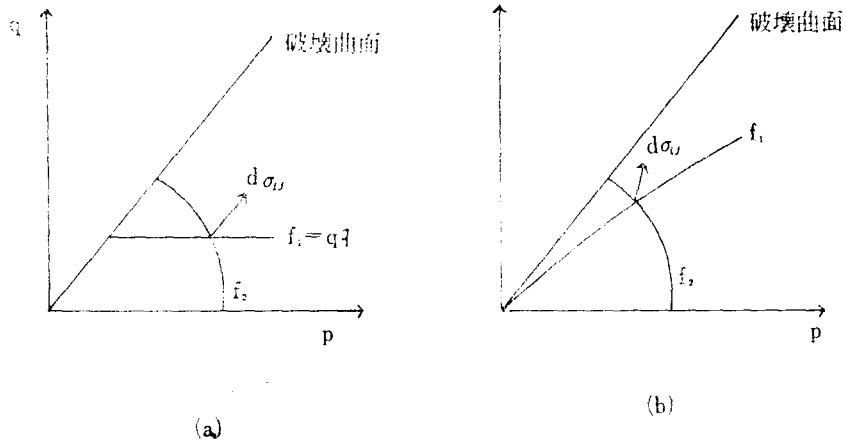


Fig 2.7 複數降伏曲面例

탄소성 구성식 이론의 흐름

탄소성 이론의 발달	제안 모델
항복곡면의 개념 { (Westergaard, 1920) (Haigh, 1920)	—1920—
소성 Potential 이론 (Von Mises, 1928)	
가공경화개념의 일반화 { (Melan, 1938) (Prager, 1939)	—1930—
Slip 이론 (Batdorf·Budianski, 1949)	
등방경화모델 (Hill, 1950)	—1950—
Drucker의 가설 (Drucker, 1951)	
복수의 항복곡면을 갖는 재료의 유동축 (Koiter, 1953)	
이동 경화 Model { (Ishilinskiy, 1954) (Prager, 1955)	

아탄성이론(Truesdell, 1955)		
복합(등방+이동)경화 Model(Hodge, 1956)		
수정 이동경화 Model{(Ziegler, Shield, 1958) {(Zigler, 1959)	-1960-	가공경화소성이론의 적용(Drucker, Gibson Henkel, 1957)
일반소성이론(Ilyushin, 1961)		Cam-clay Model (Roscoe, Schofield, Thurairajah, 1963)
부하곡면의 개념(Phillips, Sierakowski, 1964)		modified Cam-clay Model (Burland, 1965)
일반탄소성이론(Green, Naghdi, 1965)		모래의 비관련 유동축 Model (Porooshasb, Holbec, Sherborne, 1966)
Overlay Model의 일반화(ilwan, 1967)		Ohta Model (Hata, Ohta, Yoshitani, 1969)
가공경화계수장이론(Mroz, 1967)		
endochronic 이론(Valanis, 1971)	-1970-	microstructure Model (Calladine, 1971)
항복곡면과 부하곡면이 일치 않는 소성이론 (Eisenberg, Phillips, 1971)		과압밀점토의 탄소성 Model (Pender, 1973)
항복곡면 소성이론(Greenstreet Phillips, 1973)		Lade Model (Lade, Duncan, 1975)
경계곡면이 없는 소성이론{(Dafalias, Popov, 1975) {(Krieg, 1975)		西一江極 Model (1977)
		소성경화계수장이론의 적용 {(Prevost, 1977) {(Mroz, Norris, Zienkiewicz, 1976)
		경계곡면 Model {(Mroz, Norris, Zienkiewicz, 1979) {(Dafalias, 1979)
	-1980-	

參 考 文 獻

1. 日本土質工學會 “土と基礎” 講座’ 土의 構成式入門
5, 彈塑性體理論(1) No. 310, p. 97~100, 1983. 11.
2. 上同
3. Desai et al “Constitutive Laws for Engineering
Materials” p. 348, Prentice-Hall, 1984.
4. 上同, p. 349.
5. (1)과 同