흙의 構成式 解說(I)

朴 炳 基*
鄭 鎭 燮**
李 汶 樹***

1. 構成式의 役割

최근 土質力學에서는 이른바 Finite Element Method(FEM)로 대표되는 數値解析方法이 크게 이용되고 있다. 이 가운데서도 흙의 構成式을 적용한 境界値問題의 解析은 괄목할 만큼 발전되어 土質材料力學의 理論化에 크게 접근하고 있다. 한 예로서 室內에서의 要素試驗結果를 매우 精度높게 표현하는 構成式을 이용하여 盛土나 掘鑿地盤의 擧動과 斜面安定問題등, 事前에 이들의 變形擧動을 豫測하려는 Simulation 등이 그것이다. 따라서 이와같은 Simulation 結果가 實際擧動과 얼마만큼 接近하고 있는가는 사용하는 구성식이 얼마만큼 精巧한가에 달려있고 다음으로 이를 이용한 地盤의 Model 化나 解析方法이 얼마만큼 適切한가에 달려있다. 이와같은 結果의 確認을 위해서 상당수의 硏究用試驗盛土가 外國에서는 이루어지고 있다.[1)]

構成式이란 物質의 本質的인 特徵을 記述하는 方程式이다. 따라서 材質이 完全彈性體이면 Hook의 法則에서 應力과 變形率 및 彈性係數만 가지고도 構成式이 成立된다. 그러나 흙의 性質은 매우 複雜하므로 하나의 方程式으로 全部를 표현할 수는 없고 利用目的에 따라 特定의 力學的性質을 잘 표현할 수 있는 近似式으로 構成式을 삼는 경우가 많다. 따라서 많은 構成式이 제안되고 있다.

흙은 本質的으로 粒狀體이거나 不連續體이지만 실제로는 理想化하여 連續體로 보고 連續體力學의 기초위에서 應力이나 變形을 따지게 되며 構成式은 이같은 連續體力學에서 材料로서의 特性을 분명하게 해주는 역할을 한다. 連續體는 質量이 物體內에 連續的으로 分布되고 따라서 體積의 完全한 連續函數로서 표현되는 物體를 말한다. 이와같은 連續體力學은 어떤 物體가 外力을 받아 運動하는 것을 규정하는 支配方程式과 同一한 힘이 作用해도 構成物質의 차이에 따라 相異한 擧動을 보이는 것을 나타내는 構成式으로 이루어진다. 前者는 흔히 質量, 運動量, 角運動量의 平衡式으로서 알려진 物理法則에 따른 變形關係의 式으로서 物質의 差異와는 관계가 없는 一般法則이고 質量, 運動量, 에너지保存法則에 관계되고 우리가 흔히 이야기 하는 連續式, 運動方程式, 應力의 對稱性 문제등에 歸着한다. 이는 連續體의 反應을 표현하는데는 필요하지만 충분하지 못하고 對像으로 하는 物質에 따라 그 反應의 特性을 표현하는 構成式이 있어야 필요하고도 충분한 조건이 된다. 그러면 土質力學에 있어서 構成式은 어떠한 것인가에 대해서는 그

* 正會員 全南大學校 工科大學 敎授
** 正會員 圓光大學校 工科大學 副敎授
*** 正會員 全南大學校 農科大學 助敎授

發達이 흙은 彈性體, 또는 塑性體, 彈·塑性體로서 發展되어 왔기 때문에 이들에 대한 설명이 필요하지만(후술) 먼저 構成式의 原點이라고 할 수 있는 현재 우리가 이용하고 있는 몇가지 理論을 중심으로 構成式의 觀點에서 살펴 보기로 한다. 먼저 地中應力分布를 예로 들어본다. 地中應力分布는 彈性論을 利用하여 計算하는 典型이라 할수 있다. 가장 간단한 二次元平面變形問題를 생각해 보면 다음과 같은 適合條件式으로서 變形을 定義한다.

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\ \varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y \cdots\cdots(1\cdot1)$$

應力의 平衡式은,

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial_x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0 \cdots\cdots(1\cdot2)$$

위 두식은 어떠한 材料에서도 成立되는 一般的인 支配式이다. 따라서 어느 特定한 材料性質을 規定하는 構成式이 있어야만 이식은 解를 얻을 수 있다. 만일 이 材料가 線型彈性體라고 한다면 2個의 常數 λ 와 μ (Lame 常數)를 써서, $\sigma_x=\lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y)+2\mu\varepsilon_x$, $\sigma_y=\lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y)+2\mu\varepsilon_y$, $\tau_{xy}=2\mu\varepsilon_{xy}$ ······(1·3) 로 표현되고 簡便하게 Tensor 로 표현하면 다음과 같다.

$$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}\ (i,j=x,y,z)$$

(1·3)식을 (1·1)식에 代入하여 境界條件을 주어 풀면 解析解가 얻어진다. 만일 λ, μ가 一定하지 않고 흔히 應力水準에 따라 달라지면 構成式(1·3)은 의미가 없고 非線型問題가 되어 解析解를 얻기 어렵다. 그러나 變形問題일 경우는 近似的으로라도 線型彈性論으로 實用上 利用되는 경우가 많지만 破壞問題일 경우는 사정이 달라진다.

현재 破壞問題일 경우에는 材料를 剛塑性論에 의한 破壞로 보고 設計를 하는 경우가 많다. 이는 材料가 어느 應力水準에 이를 때까지는 變形이 없는 剛體로 보고 應力이 破壞條件을 滿足시키면 變形이 無限이 계속되어 破壞된다는 假定이다. 이 때문에 어느 時點에서 破壞를 규정할 것이냐에 대해 많은 破壞規準이 提案되고 있다. 이와같은 문제에서는 應力平衡式(1·2)과 最大主應力의 方向을 指定하는 角이나 方向餘弦이 定義된다. 2次元問題일 때는 周知하다시피 $\sigma=(\sigma_1+\sigma_2)/2$, $\tau=(\sigma_1-\sigma_2)/2$ 또는 여러가지 表現法이 있다. 여기까지는 어떠한 材料에서도 成立되는 支配式이다. 그러나 構成式으로서는 剛塑性體이기 때문에 變形을 갑자기, 그리고 無限이 一定하게 發生하므로 應力과 變形 關係가 1:1로 對應되지 않으므로 앞에서 처럼 材料의 특성을 간단히 定義할 수 없고 破壞條件式을 導入하게 된다. 이 條件式도 材料의 破壞限界를 나타내는 特性을 포함하고 있으므로 構成式의 하나라고 본다. 等方材料이면 破壞條件은 통상 $\tau=f(\sigma)$ (Mohr Coulomb Criterion)이므로 이를 應力平衡式에 代入하여 境界條件에 맞추어 풀면 一連의 應力特性線(slip line)을 얻을수 있다. 그외에 土壓, 支持力, 斜面安定問題 등에 있어서도 이와같이 破壞條件式을 利用하여 嚴密한 解析을 할수는 있으나 결코 쉽지 않으므로 構成式을 대신할 수 있는 간단한 直線, 對數라선, 圓孤등을 가정하여 복잡한 경계조건을 처리하는 實用的인 方法을 택하고 있다. 즉, 이와같은 安定解析의 分野에서는 變形理論에서는 볼수 없는 대담한 假定아래 重大한 力學問題를 무시하고 간편한 實用方法을 택해 온 것이다. 그 이유는 構成式의 硏究가 미흡한데다 變形보다는 破壞에 重點을 둔 在來의 관습을 經驗을 통해 實用化했기 때문이다. 그러나 어찌되었든간에 흙의 破壞條件도 構成式의 一種이고 理論的으로 破壞荷重을 算出하는데는 크나큰 역할을 다해온 것이다. 또하나의 흔히 쓰이는 예는 構成式의 성격여하에 따라 一次元壓密方程式이 어떻게 그 의미를 달리하는가를 보이는 예가 있다. 飽和粘土層에 均等한 表面載荷가 있고 全應力 σ가 발생한다면 周知한 바와 같은 다음 관계 식들을 얻는다.[2)]

$$\frac{\partial\sigma}{\partial z}=0,\ \sigma=\sigma'+u,\ \text{Darcy 法則은}$$

$$v=-\frac{k}{\gamma_w}\ \frac{\partial u}{\partial z} \cdots\cdots(1\cdot4)$$

흙의 一次元應力—變形 관계를 다음과 같이 定義한다.

$$\frac{d\sigma'}{d\varepsilon}=\frac{1}{m_v} \cdots\cdots(1\cdot5)$$

단 m_v는 一定값이라고 보지 않는다. 물의 連續

方程式은,

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad \cdots\cdots(1\cdot6)$$

(1·4) 식중 앞 두식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z}=\frac{\partial \sigma'}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z}=0, \text{ 즉, } \frac{\partial \sigma'}{\partial z}=-\frac{\partial u}{\partial z} \quad \cdots\cdots(1\cdot7)$$

(1·7) 식을 Darcy 식에 代入하면,

$$v=\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial \sigma'}{\partial z}=\frac{k}{\gamma_w}\frac{d\sigma'}{d\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \quad \cdots\cdots(1\cdot8)$$

(1·8)식에 (1·5)식을 대입하여,

$$v=\frac{k}{\gamma_w m_v}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \quad \cdots\cdots(1\cdot9)$$

이식을 (1·6)식에 代入하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k}{\gamma_w m_v}\cdot\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right) \quad \cdots\cdots(1\cdot10)$$

$$=C_v\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2}$$ (Mikasa's formula 以上의 유도는 文獻[2]에 의함).

(1·10)식을 음미해보면 k와 m_v의 比가 有效應力水準에 의존하지 않고 一定하다는 것을 의미하고 k와 m_v가 반드시 常數라야 한다는 것은 아니다. 즉, 粘土壓密의 物性을 대표하는 k와 m_v로서 構成式을 이루고 그속에 非線型의 뜻을 일부 내포하고 있다. 만일 構成式(1·5)에서 m_v가 상수라고 가정한다면 흙은 壓密全過程을 통해서 일정한 Spring 상수를 갖는 彈性 Spring으로 지반을 치환한 것과 같다. 이때는 (1·4), (1·5), (1·10)식에 의해 다음과 같다.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(C_v\frac{\partial u}{\partial z}\right) \quad \cdots\cdots(1\cdot11)$$

應力 σ가 一定하고 변동이 없을 때는,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(C_v\frac{\partial u}{\partial z}\right) \quad \cdots\cdots(1\cdot12)$$

(1·12)식은 Terzaghi의 一次元壓密式이 되고 만다. 다시 흙을 剛體라고 假定해 본다. 그러면 $m_v=0$이므로 $d\varepsilon=0$이 되어 (1·6)식에서 $\frac{\partial v}{\partial z}=0$ 이식에 의해 (1·4)식을 계산하면 $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k}{\gamma_w}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0$이 되고 k가 一定하므로 $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$이 얻어진다. 이는 다름아닌 壓密理論을 多孔質剛體에 適用하면 최종적으로 多孔質剛體內의 定常流浸透의 一次元 Laplace 方程式을 유도한 것과 같다. 그외에도 構成式을 여러가지 特性을 고려하여 위와같이 하면 특이한 의미를 갖게된 것을 알게 된다. 이상 構成式이 갖는 의미와 役割의 일부를 불충분하나마 설명해 왔는데 構成式에서 중요한 것은 材料의 特性을 잘 표현해 주는 土質媒介變數의 選定이다. 이 媒介變數는 거의 土質工學에서 쓰이는 우리가 흔히 말하는 土質常數는 모두 대상이 된다. 그러나 흙에 外力을 가할때 變形하는 力學擧動을 支配하는 眞實한 要素가 무엇인지는 不明하다. 그러나 힘과 變形의 관계를 構成式을 利用하면 近似的으로 표현할수 있다. 따라서 構成式에 의한 解析値와 實測値와의 차이가 최소가 되도록 構成式에 포함되는 媒介變數의 最適値를 決定하는 方法이 매우 중요하다. 이같은 方法중에서 가장 주목을 받고 있는 것이 自動制御分野에서 利用되는 同定法(identification)의 利用이다. 현재까지 提案된 構成式의 媒介變數는 각자 固有의 그리고 복잡한 實驗에서 구하여 選定되고 있지만 이 同定法에 의하면 實測應力과 變形曲線만 가지고 媒介變數의 決定이 可能해 진다.

따라서 이와같은 方法이 확립되면 合理的이고 客觀的인 媒介變數가 決定되고 나아가 構成式相互間의 優劣判定에도 利用되어 構成式의 利用이나 役割이 크게 擴大될 것으로 본다. 현재 가장 많은 媒介變數가 所要되는 構成式은 Cap-model로서 10개가 필요하며 이를 決定하기 위한 實驗은 直方體三軸試料를 포함하여 壓縮, 引張 등 각종 7가지의 試驗을 거쳐야만 되는 경우도 있다.[5]

2. 構成式의 成立

2.1. 基本事項

앞절에서 言及한바와 같이 連續體에서는 공통적으로 滿足되어야 하는 몇가지의 支配方程式 또는 Field Equation(場의 方程式)이 있다. 가장 간단한 예로서 熱과 溫度를 고려하지 않는 力學場에서는 첫째, x, y, z 座標系에서 周知하다시피 다음의 連續方程式이 있다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot1)$$

이 식의 未知數는 密度 ρ와 速度벡터 v_x, v_y, v_z의 4개이다. 둘째는 運動方程式으로서 x, y, z의 3方向으로 3개의 다음 方程式이다.

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{\partial v_x}{\partial t}&=\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial_z}+\rho f_x\\ \rho\frac{\partial v_y}{\partial t}&=\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}+\rho f_y\\ \rho\frac{\partial v_z}{\partial t}&=\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\rho f_z\end{aligned}\right\}\quad(2\cdot2)$$

物體力成分 f_i $(i=x, y, z)$를 알고 있으면 未知數는 ρ와 v_i의 4개에 應力成分 $\sigma_{xi}, \sigma_{yi}, \sigma_{zi}$의 9개 합 13개가 된다. 마지막으로 角運動量의 保存式(力學基本則 3, non polar state 즉, 物體力, 表面力外에는 偶力이 發生하지 않는 경우 어느 基準點에 관한 角運動量의 時間的變化率은 그점에 관한 전모우멘트와 같다. 따라서 應力의 對稱性이 증명됨)으로서 應力의 對稱性에 의해 $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}$, $\sigma_{yz}=\sigma_{zy}$, $\sigma_{zx}=\sigma_{xz}$이므로 3개의 식과 未知數가 있다. 이상의 力學場에서 連續體의 운동은 連續式 1, 運動方程式 3, 應力對稱式에서 3 合計 7개의 方程式에 의해 支配되고 未知數는 총 13개가 된다. 따라서 解를 구하기 위해서는 6개의 方程式이 必要하므로 構成式이 필요하게 되고 통상 위와같은 力學場에서 構成式은 應力과 變形率 또는 變形率速度와의 관계식으로 주어진다. 따라서 構成式은 物質의 特性을 規定하기 위해 필요한것 외에도 數學的關係를 滿足시키기 위해서도 必要하다는 점에 留意해야 한다. 이와같은 이유로 理想的인 材料를 想定한 여러가지 擧動을 고려하여 構成式을 세우는 경우도 많다. 어디까지나 이와같은 構成式은 眞實을 記述하는 支配方程式을 解析하는 目的으로 쓰이기 때문에 數值解析技法이 適合해야 되고 간단한 경우를 제외하고는 컴퓨터의 利用없이는 이루어지지 않는다. 따라서 F.E.M. 같은 技法은 不可避하다. 끝으로 構成式을 세우는데는 몇가지 制約條件이 있다. 그 주요 내용은 (1) 構成式은 質量, 運動量, 角運動量등 保存法則과 모순되어서는 안된다. (2) 構成式은 쓰는 座標系에 따라 變化되어서는 안된다. (3) 構成式을 適用하여 初期值와 境界值를 解析할 때 唯一解가 存在해야 한다. (4) 構成式은 客觀性이 있어야하며 地球上에서 어느 材料에 대해 記述되는 構成式이면 같은 재료일때 달나라에서도 成立되어야 한다. 現在의 構成式이 모두 이와같은 條件을 滿足시키는 것은 아니지만 이 原則에 의해 연구되고 있다. 材料力學에서의 構成式에는 運動學的, 力學的, 熱力學的 등등 여러 構成式이 있으나 土質構成式은 주로 力學的構成式에 해당되고 이는 다시 廣範圍하게 이용되는 構成式을 중심으로 살펴보면 4種의 理論에 근거를 두고 있다고 보는 學者도 있다.[3] (후술).

2.2. 彈性體

物體가 外力의 作用을 받아 순간적으로 變形하고 外力을 除去하면 순간적으로 원래의 상태로 되돌아가는 성질을 갖는 物體가 彈性的이고 이와같은 彈性的應答이 時間遲延없이 순간적으로 이루어지더라도 外力을 除去했을때 殘留變形이 있는 材料를 塑性體라 함은 잘알고 있는 사실이다. 또한 조금이라도 원래상태로 되돌아가려는 變形과 殘留하려는 變形이 함께 共存하는 材料는 彈·塑性體이다. 材料는 정도의 차이는 있지만 應答擧動에는 時間과 더불어 변형되거나 원상태로 돌아오는 時間依存性擧動을 하게된다. 이가운데서 本質的으로는 彈性變形이지만 時間依存性을 보이는 材料는 粘彈性體이고 똑같이 塑性變形이 時間에 의존할때는 粘塑性體이다. 彈性體의 擧動은 應力과 變形率이 각각 정확히 대응되지만 線型일 때와 非線型일 때가 있다. 한편 彈·塑性體에서는 除荷하면 殘留變形率 ε^p가 남게되고 應力과 變形率관계가 정확하게 對應되지 않는다. 應力과 變形率이 線型關係가 있는 彈性體의 構成式은 一般化된 Hook 法則이고 다음 식과 같다.

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}\ (i, j, k, l=1, 2, 3)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot3)$$

여기서, C_{ijkl}은 彈性係數이고 4次 Tensor이며 Strain ε이 無次元이므로 應力單位와 같다. 地盤은 깊이에 따라 物性이 달라지므로 C_{ijkl}도 달라지는 경우가 많다. 만일 C_{ijkl}가 깊이 z에 따라 달라지는 函數일때는 非等質地盤, 그렇지 않을 경우는 等方質(homogeneous)地盤이다. 한편 地盤의 堆積過程에서 鉛直方向과 水平方向의 物性 특히 C_{ijkl}, k등이 다를때는 異方性(anisotropic), 같을 때는 等方性地盤이다. 彈性係數 C_{ijkl} 는 (2·3)식에서 다음과 같다.[4)]

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{21}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{32}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \\ \\ \\ 9\times9=81\\ (C_{ijkl})\\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{21}\\ \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{31}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{32}\end{Bmatrix}$$

예를 들면 다음과 같다.

$$\sigma_{12}=C_{1211}\varepsilon_{11}+C_{1222}\varepsilon_{22}+C_{1233}\varepsilon_{33}+C_{1212}\varepsilon_{12}+ C_{1221}\varepsilon_{21}+C_{1213}\varepsilon_{13}+C_{1231}\varepsilon_{31}+C_{1223}\varepsilon_{23}+C_{1232}\varepsilon_{32}$$

應力 Tensor 의 對稱條件 즉, $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ 이므로 $C_{ijkl}=C_{jikl}$ 이다. 따라서 81개의 彈性係數는 36개로 줄어든다. 또한 $C_{ijkl}=C_{klij}$ 이므로 일반적인 異方向線型彈性材料에 대한 독립적인 탄성계수는 21개로 줄어든다. 즉, 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \tau_{12}\\ \tau_{13}\\ \tau_{23}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} & 21\text{개} \\ & \\ & \\ (C_{ijkl}) & \\ 6\times6=36 & \\ (\text{대칭}) & \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{12}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{23}\end{Bmatrix}$$

이 表現에서 $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ 은 剪斷應力, τ_{ij} 로 變形率 $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$ 은 剪斷變形率 γ_{ij} 로 나타낸 것이다. 이 형태가 보편성을 갖는 異方彈性體의 構成式이다. 等方彈性體일 때의 構成式은 잘 알다시피 理想彈性體로서 Lame의 상수 λ, μ 를 이용하여 表現하면 다음과 같다.

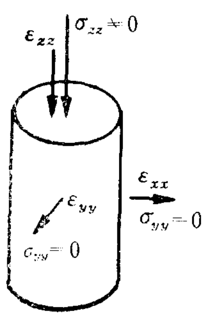

Fig. 2-1. 一軸壓縮條件

$$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij} \quad\cdots\cdots(2\cdot4)$$ [4)]

여기서 δ_{ij} 는 Kronecker의 delta로서 $i\neq j$ 일때 $\delta_{ij}=0$, $i=j$ 일때 $\delta_{ij}=1$ 이다. Lame 常數 λ, μ 는 一軸壓縮試驗에서 구할수 있다. 이때의 試驗條件은 Fig. 2·1과 같다. 즉, $\sigma_{zz}\neq0$, $\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{xy}=\sigma_{yz}=\sigma_{zx}=0$ 이므로 (2·4)식에서 다음 관계를 얻는다.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sigma_{zz}}{\varepsilon_{zz}}&=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}=E\\ -\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}}&=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}=\nu\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2\cdot5)$$

이 식으로부터 λ, μ 는 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned}\lambda&=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\\ \mu&=\frac{E}{2(1+\nu)}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2\cdot6)$$

여기서 E ; young 계수이며 ν ; poisson 비이다. 이와같은 理想彈性體의 構成式은 모든 構成式理論의 思考의 출발점이 된다. (2·4)식을 E, ν 를 써서 표현하면 다음과 같다.

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}-\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad\cdots\cdots(2\cdot7)$$

만약 $\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=p$ 인 等方壓力下에서는 $\sigma_{xy}=\sigma_{yz}=\sigma_{zx}=0$ 이므로 (2·7)式에서 다음 관계를 얻는다.

$$\frac{p}{v}=E/3(1-2\nu)=K \quad\cdots\cdots(2\cdot8)$$

v 는 體積變形率로서 $v\fallingdotseq\varepsilon_{ii}=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}$ 이고 K 는 體積彈性係數(bulk modulus)이며 等方應力아래서의 體積變化로부터 K 를 決定할 수 있다. 다음에 가장 중요한 剪斷應力과 剪斷變形率關係를 살펴본다. 單純剪斷變形狀態를 살펴보면 Fig.

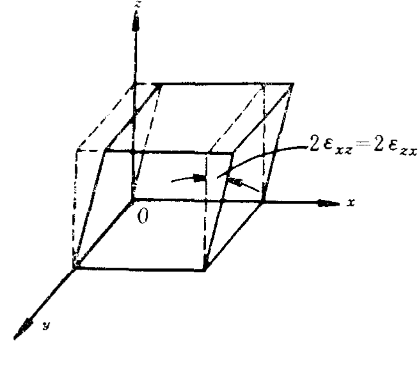

Fig. 2.2. 單純剪斷變形

2·2 와 같고 變形率成分은 $\varepsilon_{zz}=\varepsilon_{zz}$ 를 除外하고는 모두 없으므로 (2·4) 또는 (2·7)식에서 應力 $\sigma_{zz}=\sigma_{zz}$ 만이 작용하는 應力狀態를 말한다. 따라서 다음과 같이 표현된다.

$$\varepsilon_{zz}=\varepsilon_{zz}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{zz}=\frac{1}{2\mu}\sigma_{zz} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot 9)$$

剪斷彈性係數 $G=\sigma_{zz}/2\varepsilon_{zz}=\sigma_{zz}/\gamma_{zz}$ ($\gamma_{zz}=2\varepsilon_{zz}$)라고 定義하면 다음과 같이 쓸수 있다.

$$G=\frac{\sigma_{zz}}{\gamma_{zz}}=\frac{E}{2(1+\nu)}=\mu \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot 10)$$

(2·10)식은 理想彈性體에서는 剪斷應力만이 작용하면 剪斷變形만 發生하고 體積變化는 일어나지 않는다. 흔히 軟弱地盤의 急速한 破壞가 非排水狀態에서 일어날 경우 흡사 이와같은 剪斷變形에 의한 破壞와 같다고 보는 경우가 많다. 그러나 일반적인 흙은 剪斷應力이 作用하면 剪斷中에 體積變化를 일으키는 Dilatancy 現象이 있다. 따라서 理想彈性體와 흙과는 다음과 같은 차이가 있다는 것을 기억해 둘 필요가 있다.

理想彈性體에서는 平均應力 $\sigma_m=\sigma_{ii}/3$ 과 體積變形率, v 그리고 剪斷應力, τ_{ij} (σ_{ij}, 단 $i=j$)와 剪斷變形率 ε_{ij} ($i\neq j$)가 각각 1 : 1 로 대응하는 材料이다. 그러나 彈性體일지라도 非線型彈性體이거나 Dilatancy 特性을 갖는 材料일때는 剪斷應力만 작용하여도 體積變化를 동반하는 剪斷變形이 일어나고 거꾸로 剪斷變形을 일으키려면 剪斷應力뿐만 아니라 平均應力도 작용시키지 않으면 안되는 材料이다. 특히 후자의 설명은 實驗土質力學에서는 중요한 의미를 갖는다. 構成式에서도 이 의미는 實驗時의 應力水準이라는 表現으로서 반드시 檢討가 되는 사항이다.

1) 앞으로 數値表現은 Tensor 記號에 의하기 때문에 여기서 간단히 부기해 둔다. 간단한 경우로 原點 O 을 共有하는 2개의 直交座標系를 생각하고 x 軸으로 $O-x_k$ 와 $O-x_k'$ 軸이 있다면 이들간에 a_{kl} 이라는 角 또는 方向餘弦이 定義되고 이 a_{kl} 을 利用하여 任意點의 위치가 x_k 軸을 기본으로 그점의 위치가 $v_l'=a_{kl}v_k$ 로 定義되면 v_k 는 1次 Tensor 또는 Vector 라 하고 2種以上의 方向餘弦으로 定義되면 예컨데 $v_{jl}'=a_{ij}a_{kl}v_{ik}$ 가 成立될때 2次 Tensor 가 되며 더 많아지면 3次 등등 高次의 Tensor 로 표현된다. 直交座標系에서 Tensor 의 表示는그 간편성을 活用하면 매우 편리하다. 3次元空間에서 記號 i, j 는 座標軸 x, y, z 의 어느 하나를 가리킨다. 同一項內에서 $\sigma_{ij}\sigma_j$ 의 j 처럼 2회 반복되면 加法을 의미한다. 지금 $i=x, y, z$, $j=x, y, z$, σ_{ji} 에서 먼저 $\sigma_{jx}\sigma_j$ 는 다음과 같은 식을 의미한다.

$\sigma_{jx}\sigma_j=\sigma_{xx}\sigma_x+\sigma_{yx}\sigma_y+\sigma_{zx}\sigma_z (j=x, y, z)$

또, $\sigma_{jy}\sigma_j=\sigma_{xy}\sigma_x+\sigma_{yy}\sigma_y+\sigma_{zy}\sigma_z$

$\sigma_{jz}\sigma_j=\sigma_{xz}\sigma_x+\sigma_{yz}\sigma_y+\sigma_{zz}\sigma_z$, 즉, i 는 成分, x, y, z 의 어느하나를 가르키고 j 는 同一項에서 두번 반복되므로 加法을 의미한다. σ_{ii} 는 $\sigma_{ii}=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}$ 가 된다.

2) 앞으로 본 강좌는 다음과 같은 내용으로 진행할 예정입니다.

1. 構成式의 意味와 役割 } (1回)
2. 構成式의 成立
   - 2·1 基本事項
   - 2·2 彈性體
   - 2·3 彈・塑性體 } (2回)
   - 2·4 破壞規準
3. 代表的인 土質構成式의 解說 (3回)
4. 計算例 (4回)

워낙 非才이므로 얼마만큼 목적을 달성하고 또 誤謬은 없을런지 걱정스럽읍니다 마는 諸賢의 지적과 도움을 얻어 최선을 다하겠읍니다. 집필은 全南大 朴炳基, 圓光大 鄭鎭燮, 全南大 李汶樹 기타 여러분의 도움으로 진행하겠읍니다.

參 考 文 獻

1. 예컨데, ① Y.C.E. Chang, "Long Term Consolidation beneath the Test Fill Väsby", Swedish Geotechnical Institute, 1981.
   ② G. Gudehus, "Finite Elements in Geomechanics", John Wiley & Sons, 1977.
   ③ J.P. Magnan, P. Belkeziz & A. Mouratidis, "Finite Element Analysis of Soil Consolidation with Special Reference to the case of Strain Hardening Elastoplastic Stress-strain Models," Numer. Methods Geomech., Edmonton, p. 327~336.
2. Mikasa, "軟弱粘土의 壓密理論", 鹿島出版, 1963.
3. H.Y.KO, "State of the arts: Data Reduction and Application for Analytical Modeling-Laboratory Shear Strength of Soil.", American Society for Testing and Materials, 1980, p. 332.