

〈論 文〉

河川 流出量 算定을 위한 GIUH 모델

—GIUH Model for River Runoff Estimation—

이 순 탁* 박 종 권**
Lee, Soon Tak Park, Jong Kwon

Abstract

This study aims at the decision of geomorphologic instantaneous unit hydrograph(GIUH) model parameter for the ungaged or the data deficient basin, to analyze rainfall-runoff relation in river basin by applying queueing theory with geomorphologic factors.

The concept of GIUH model is based upon the principle of queueing theory of rain drops which may follow many possible routes during rainfall period within watershed system to its outlet. Overland flow and stream flow can be simulated, respectively, by linear reservoir and liner channel conceptual models. Basically, the model is a non-linear and time variant hydrologic system model. The techniques of applying are adopted sub-area method and mean-value method, the watershed is divided according to its stream number and order.

To prove it to be applicable, the GIUH model is applied to the Wi-Stream basin of Nak-Dong River(Basin area; 472.53km²), southern part of Korea. The simulated and the observed direct runoff hydrographs are compared with the peak discharge, times to peak and coefficients of efficiency, respectively, and the results show quite satisfactory. Therefore, the GIUH model can be extensively applied for the runoff analysis in the ungaged and the data deficient basin.

要 旨

본 연구는 유역의 지형인자를 대기행렬이론(Queueing theory)에 적용하여 하천유역의 강우-유출 관계를 해석하고, 미 측정 유역이나 자료가 결핍된 유역에 적용할 수 있는 GIUH(Geomorphologic Instantaneous Unit Hydrograph) 모델의 매개변수를 결정하는 데 그 목적을 두었다.

GIUH 모델의 개념은 유역 시스템내의 강우의 지속기간동안 유역의 출구에서 가능한 많은 경로를 추적 할 수 있을 것이라는 강우-대기행렬이론의 원리에 기초를 두었으며, 적용 기법은 분할법(Sub-area method)과 평균치법(Mean-value method)을 적용하였다.

GIUH 모델의 적용성을 증명하기 위해서, 낙동강 위천유역(유역면적 472.53km²)에 적용하였으며, 분할법과 평균치법은 유역의 분할을 위해서 채택하였다. 계산된 직접 유출 수

* 嶺南大學校 工科學 教授, 工博

** 嶺南大學校 大學院 土木工學科 (水資源工學專攻)

문곡선과 관측 직접 유출 수문곡선을 비교한 결과는 침투 유출량, 도달시간, 효율계수가 매우 근접한 결과를 나타내고 있었다. 따라서, GIUH 모델은 미 계측 유역이나 자료가 결핍된 유역의 유출량 산정에 광범위하게 적용할 수 있음을 알 수 있었다.

1. 序 論

하천 유출 현상은 지형인자와 기후인자의 영향을 주로 받으므로 이들의 관계, 즉 강우와 유출량의 상호관계를 수립하는 것은 하천의 수공구조물 설계와 축조 및 수문 해석에 대단히 중요하다.

일반적으로 수문학적 모델은 변수를 추정하고 적용성을 증명하기 위해서 강우량과 유출량에 의존한다. 그러나 미 계측 유역이나 자료가 결핍된 유역에서 유출 해석을 하는데 어려움이 있었으므로, 근래에 와서 미 계측 유역의 유출 해석을 위하여 유역의 지형인자를 이용한 확률론적 모델이 소개됨으로서 강우-유출의 해석에 있어서 지형인자를 이용하여 매개변수들을 설명하게 되었다.

1970년대 전반에 Boyd, Betson Roger, Walling, Gregory 등은 유출 해석의 과정을 지형인자를 사용하여 설명하였고, Clark, Nash, Chow, Singh 등이 확립한 순간단위도의 이론을 기초로 Gupta and Waymire and Wang, Cheng 등은 유역의 지형인자를 이용하여 확률론적 수문학의 접근방법으로 순간단위도를 유도 하였다.

본 연구는 지형도에서 직접측정할 수 있는 배수유역의 지역인자, 즉 유역면적, 경사, 하천수, 하천길이 등을 측정하여 유출모델을 개발코저 하며, 지형인자를 이용한 순간단위도(Geomorphologic Instantaneous Unit Hydrograph; GIUH)를 유도하였다. GIUH의 개념은 유역의 출구에서 강우의 지속기간동안 가능한 많은 강우의 유출경로를 추적할 수 있을 것이라는 강우 대기행렬이론(Queueing theory)으로서 순출생-사멸과정(Pure Birth-Death Process)의 M/M/1(N)형, 즉 Poisson 분포 도착이며 지수분포 서비스이고 복수창구의 대기행렬이론을 응용하고, 지표 유출과 하천 유출은 각각 선형 저수지와 선형 수로의 개념적 모델에 의함으로서 근본적

으로 비선형 시변 수문학적 시스템 모델을 개발코저 함이다.

그 적용 기법으로서는 1) 대기행렬이론 시스템 모델 적용의 편리를 위해서 유역을 여러개의 작은 면적으로 분할하는 분할법(Sub-area method)과 2) 유역의 복잡한 분할을 피하기 위해서 유역을 하천 차수에 따라서 간단하게 분할하는 평균치법(Mean-value method)을 사용토록 하였으며, 분석유역은 위천 유역으로 하고, 연구 범위는 지형인자를 이용하여 유출량 산정을 위한 매개변수의 알고리즘을 개발하여 미 계측 유역이나 자료가 결핍된 유역에 적용할 수 있는 종합적 유출 해석을 하고자 한다.

2. GIUH 모델의 基本理論

2.1 GIUH 모델의 유도

2.1.1 GIUH 시스템 모델

본 연구는 하천 유출의 해석에 있어서 대기행렬이론을 적용한 대기행렬 시스템 모델(Queueing System Model)로서, 강우가 유역을 유하하는 경로의 수문학적 과정을 지형인자를 사용하여 설명하고자 한다. 유역을 대기행렬이론의 각 단계로 분할하는 데 편리하고자 한다. 유역을 대기행렬이론의 각 단계로 분할하는 데 편리하게 하기 위해서 Horton의 하천 차수법칙으로 유역의 형태를 설정하고, 회선적분의 해를 구하기 위해서는 Laplace 변환으로 한다.

GIUH 시스템 모델은 단위 유효강우가 $t=0$ 일 때 유역에 균일하게 내리며 (즉 순간적으로), 이 단위 강우는 N 개 각각 독립이며 상호작용을 하지 않는다고 가정하고, 하천에 직접 내리는 강우의 양은 극히 미소량이므로 무시 할 수 있다. 위의 가정에 의하여 전 유역에 내린 강우의 유출 과정은 대기행렬 시스템처럼 설명할 수 있다.

M 차의 유역은 $X_{i1}, X_{i2}, i=1, 2, \dots, M$ 처럼 대기행렬 시스템에서 여러개의 단계로 분할할 수

있으며, 여기서 X_{i1} 은 i 차 하천의 지표면 유출 지역이고 X_{i2} 는 i 차 하천의 하천 수로이다. 도착률은 각 단위시간당의 강우량이며 서비스 시간은 각 단계의 도달시간이다. 그러므로 대기규약은 이 모델에서 중요시하지 않는다.

지표면 유출 지역에 내린 강우는 $X_{i2} \rightarrow X_{j2}$ 로 연속적으로 흘러서 유역의 출구에 도달할 것이다. 이때 $j > i$ 이다. 그리고 $X_{i1} \rightarrow X_{i2} \rightarrow \dots \rightarrow X_{j2} \rightarrow \dots \rightarrow X_{M2}$ 와 같이 강우가 유역의 출구에 도달하는 경로를 r 이라고 하면 강우가 이 경로를 통과할 확률 $P(r)$ 는 다음식 (2.1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$P(r) = P_{A_{i1}} \cdot P_{i1, i2} \cdot \prod_{U=i, V=i+1}^{U=M-1, V=M} P_{U2, V2} \dots \dots \dots (2.1)$$

$P_{A_{i1}}$; 지표면 유출 지역면적/유역 총면적

$P_{i1, i2}$; 강우가 X_{i1} 에서 X_{i2} 로 흐를 확률

$P_{U2, V2}$; 강우가 X_{U2} 에서 X_{V2} 로 흐를 확률

도달시간을 Γ_r 이라고 하면 강우가 각 단계 X_{ak} 을 흐르는 데 걸리는 도달시간 T_{ak} 의 총합과 같게 될 것이다. 여기서 $a=1, 2, \dots, M$ 이고, $K=1$ 은 지표면 유출 지역이고, $K=2$ 는 하천 수로이다. 이와 같이해서 도달시간 Γ_r 는 식 (2.2)와 같이 쓸 수 있다.

$$\Gamma_r = T_{i1} + T_{i2} + \dots + T_{j2} + \dots + T_{M2} \dots \dots \dots (2.2)$$

강우가 시간 t 에서 경로 r 를 통해 흐르는 확률을 $P(\Gamma_r \leq t)$ 이라고 하고, 무작위 시간 T 의 확률을 $P(T \leq t)$ 이라고 하면 다음식이 성립한다.

$$P(T \leq t) = \sum_{r \in R} P(\Gamma_r \leq t) \cdot P(r) \dots \dots \dots (2.3)$$

식에서 R 는 강우가 유역을 흐르는 모든 가능한 경로 합이다. $t > 0$ 일 때, 강우의 도달시간 T_{ak} 의 확률밀도함수를 $f_{T_{ak}}$ 라고 하면, 각 경로에서의 확률밀도함수는 완전 독립이므로 추계학적으로 추정할 수 있으므로, 식 (2.2)에서 주어진 경로는

$$f_{r_r}(t) = f_{T_{i1}}(t) * f_{T_{i2}}(t) * \dots * f_{T_{j2}}(t) * \dots * f_{T_{M2}}(t) \dots \dots \dots (2.4)$$

이 되고, 식에서 * : 회선적분(Convolution Integral)이고,

$$P(\Gamma_r \leq t) = \int_0^t f_{r_r}(t') dt' \dots \dots \dots (2.5)$$

이 된다. 식 (2.4)를 식 (2.5)에 대입하면

$$P(\Gamma_r \leq t) = \int_0^t f_{T_{i1}}(t') * f_{T_{i2}}(t') * \dots * f_{T_{j2}}(t') * \dots * f_{T_{M2}}(t') dt' \dots \dots \dots (2.6)$$

$$f_{T_{M2}}(t') dt' \dots \dots \dots (2.6)$$

이 되고, 식 (2.6)을 식 (2.3)에 대입하면

$$P(T \leq t) = \sum_{r \in R} \left\{ \left[\int_0^t f_{T_{i1}}(t') * f_{T_{i2}}(t') * \dots * f_{T_{j2}}(t') * \dots * f_{T_{M2}}(t') dt' \right]_r \cdot P(r) \right\} \dots \dots \dots (2.7)$$

을 얻는다. 하나의 단위 강우에 대해서, 시간 t 일때의 유역의 저유량 $S(t)$ 는 강우가 유역의 출구까지 도달하는 시간 T 일때의 강우수와 같거나, 시간 t 일때의 강우의 총수보다 크기 때문에

$$S(t) = (\text{강우수}, T > t) \frac{(\text{강우 총체적})}{(\text{총 강우수 } N)} \dots \dots \dots (2.8)$$

을 얻는다. 식 (2.8)에 대수법칙(Law of large numbers)을 적용하면, $N \rightarrow \infty$ 이므로

$$S(t) = (\text{강우 총체적}) P(T > t) \dots \dots \dots (2.9)$$

이 된다. 연속 방정식(Equation of Continuty)에 의하여

$$ds(t)/dt = I(t) - Q(t) \dots \dots \dots (2.10)$$

이 된다. $t=0$ 이면 $I=1$ 이고, $t > 0$ 이면 $I=0$ 이다. 하나의 단위 유효 강우에 대해 $Q(t) = U(t)$ 이므로

$$S(t) = 1 \cdot P(T > t) = 1 - P(T \leq t) \dots \dots \dots (2.11)$$

이 되고, 식 (2.7)을 식 (2.11)에 대입하면

$$S(t) = 1 - \sum_{r \in R} \left\{ \left[\int_0^t f_{T_{i1}}(t') * f_{T_{i2}}(t') * \dots * f_{T_{j2}}(t') * \dots * f_{T_{M2}}(t') dt' \right]_r \cdot P(r) \right\} \dots \dots \dots (2.12)$$

을 얻는다. 식 (2.12)를 t 에 대해서 미분하면

$$ds(t)/dt = \sum_{r \in R} \{ [f_{T_{i1}}(t') * f_{T_{i2}}(t') * \dots * f_{T_{j2}}(t') * \dots * f_{T_{M2}}(t') dt']_r \cdot P(r) \} \dots \dots \dots (2.13)$$

이 된다. 식 (2.10)과 식 (2.13)으로 부터, $t > 0$ 이면 $I(t) = 0$ 이고 $Q(t) = U(t)$ 이므로

$$U(t) = \sum_{r \in R} \{ [f_{T_{i1}}(t') * f_{T_{i2}}(t') * \dots * f_{T_{j2}}(t') * \dots * f_{T_{M2}}(t')]_r \cdot P(r) \} \dots \dots \dots (2.14)$$

이 된다. 식 (2.14)가 GIUH 모델의 기본 방정식이다.

2.1.2 평균 유출 속도

하천에 있어서 유속의 일반식은

$$V = C' \cdot S^{1/2} \dots \dots \dots (2.15)$$

이며, C' ; 통수능 계수(Conveyance factor), S ; 경사도(slope)이다. 이와 같이 i 차하천의 지표면 유출과 하천 유출의 평균 유출 속도는

$$V_{i1} = C_0 \cdot S_{i1}^{1/2} \dots\dots\dots(2.16)$$

$$V_{i2} = C_s \cdot S_{i2}^{1/2} \dots\dots\dots(2.17)$$

이고, C_0 ; 지표면 유출 통수능계수, C_s ; 하천 유출 통수능계수, S_{i1} ; i 차 지표면 평균 경사도, S_{i2} ; i 차 하천 평균 경사도이다. 식 (2.15)를 Manning 식과 비교해보면

$$C' = 1/n \cdot R^{2/3} = 1/n \cdot (A/P)^{2/3} \dots\dots\dots(2.18)$$

이며, n ; 조도 계수(Roughness Coefficient), R ; 수리반경(Hydraulic Radius), A ; 통수 단면적(Water Section), P ; 윤변(Wetted Perimeter)이다. 동일한 유역내에서 하천 차수가 증가함에 따라서 조도계수는 점점 감소하고, 수리반경은 점점 증가함으로 통수능계수는 증가 경향이 있다.

2.1.3 평균 유출 도달시간

Gupta(1980)는 강우가 유역내에서 이동하는데 필요한 시간의 확률밀도함수에 대해서 다음 두 가지 가정을 하였다.

(1) 확률밀도함수가 지수분포가 된다고 가정하면 유역은 직렬 또는 병렬로 형성된 선형지수지처럼 수학적으로 표현할 수 있다.

$$U_{LR}(t) = 1/K \cdot e^{-t/k} \dots\dots\dots(2.19)$$

식에서 K ; 저류상수, U_{LR} ; 시간 t 일 때 지수형 분포를 나타내는 선형 저수지의 단위 유출 수문곡선이다.

(2) 확률밀도함수가 균일분포이고 유역내에서 강우가 같은 속도로 이동한다고 가정하면 유역은 직렬 또는 병렬의 선형수로 개념으로 생각할 수 있다.

위 이론에 기초를 두고 대기행렬이론을 적용하면 단위 강우가 순간적으로 유역에 균일하게 내려서 유역의 출구로 흐른다면 이것은 서비스 시간의 확률밀도함수가 지수분포인 순사멸 대기행렬 모델처럼 설명할 수 있으므로

$$f_{T_i}(t) = 1/u_i \cdot e^{-t/u_i}, \forall t \dots\dots\dots(2.20)$$

이 되고, u_i ; i 차 하천 평균 유출 도달시간이다.

Dooge(1959)의 이론에 의하면 유역을 개념적으로 지표면 유출지역과 하천지역 두 부분으로 나누었다. 지표면 유출 지역의 도달시간은 선형저수지의 배열을 통해서 추적할 수 있는 지수형적인 분포가 된다고 가정했고, 하도부분은 저류

효과와 이동효과가 있으므로 도달시간의 확률밀도함수는 지수분포(저류부분)와 균일분포(이동부분)으로 구분하였다. 이렇게해서 수문학적 모델은 직렬 및 병렬로 구성된 선형저수지와 수로의 결합으로 이루어지며 이 이론을 본 연구에서 채택한다.

지표면 유출 지역을 두 경사면이 구성하는 V형의 경사면으로 가정한다면 평균 유출 도달시간 u_{i1} 은

$$u_{i1} = \frac{P_{A_{i1}} \cdot A}{2 \cdot L_i \cdot V_{i1}}, \quad i=1, 2, \dots, M \dots\dots\dots(2.21)$$

이고, A ; 유역 총면적, L_i ; i 차 하천길이, V_{i1} ; i 차 지표면 평균 유출 속도이다. 하천부에서 평균 유출 도달시간 u_{i2} 는

$$u_{i2} = L_i / V_{i2}, \quad i=1, 2, \dots, M \dots\dots\dots(2.22)$$

이고, V_{i2} ; i 차 하천 평균 유출 속도이다.

지표면 유출 지역의 경사는 구하기 어렵기 때문에 식 (2.16)의 S_{i1} 은 식 (2.17)의 S_{i2} 를 쓴다.

2.1.4 GIUH 모델 유도

Dooge의 이론에 의해서 유역은 지표면 유출 지역과 하천 지역의 두 부분으로 구분하고, 선형저수지와 수로의 개념으로 나누어 계산한다. 각 하천은 저류부분과 이동부분으로 분리되며 이 두 부분의 도달시간비 C_r 는

$$C_r = u_{ei} / u_{ri} \dots\dots\dots(2.23)$$

이 되고, u_{ei} ; i 차 하천 이동부분 도달시간, u_{ri} ; i 차 하천 저류부분 도달시간이다.

C_r 는 유역의 특성변수가 되어야 함으로 동일한 유역에서는 상수로 볼 수 있고, 주로 하천의 평균경사에 의해서 결정된다. 그러므로, 식 (2.23)에서 u_{i2} 는

$$u_{i2} = u_{ri} + u_{ei} \dots\dots\dots(2.24)$$

이 된다. 식 (2.24)를 식 (2.14)에 대입하면

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_{r \in R} [f_{T_{i_1}}(t') * f_{T_{i_2}}(t') * \dots * f_{T_{i_j}}(t') * \dots * \\ &\quad f_{T_{M_s}}(t')]_r \cdot P(r) \\ &= \sum_{r \in R} [f_{T_{i_1}}(t') * (f_{T_{r_1}}(t') * f_{T_{c_1}}(t')) * \dots * \\ &\quad (f_{T_{r_j}}(t') * f_{T_{c_j}}(t')) * \dots * (f_{T_{r_M}}(t') * \\ &\quad f_{T_{c_M}}(t'))]_r \cdot P(r) \\ &= \sum_{r \in R} [f_{T_{i_1}}(t') * (f_{T_{r_1}}(t') * \dots * f_{T_{r_j}}(t') * \dots * \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdots * f_{T_{rM}}(t') * (f_{T_{ci}}(t') * \cdots * f_{T_{cj}}(t') \\ & \cdots * f_{T_{cM}}(t'))]_r * P(r) \} \dots\dots (2.25) \end{aligned}$$

을 얻는다. 만일 강우의 도달시간이 i 차 하천에 있어서 지표면 유출 지역 X_{i1} 의 평균 u_{i1} 과 저류부분의 u_{ri} 는 지수분포가 된다고 가정하면 도달시간의 확률밀도함수는 Laplace 변환에 의해서

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}[f_{T_{i1}}(t) * f_{T_{ri}}(t) * \cdots * f_{T_{rj}}(t) * \cdots * f_{T_{rM}}(t)] \\ & = \mathcal{L}[f_{T_{i1}}(t)] \cdot \mathcal{L}[f_{T_{ri}}(t)] \cdots \mathcal{L}[f_{T_{rj}}(t)] \cdot \\ & \cdots \mathcal{L}[f_{T_{rM}}(t)] \\ & = [u_{i1} * u_{ri} \cdots u_{rj} \cdots u_{rM}]^{-1} \times [(S+1/u_{i1}) \cdot \\ & (S+1/u_{ri}) \cdots (S+1/u_{rj}) \cdots \\ & (S+1/u_{rM})]^{-1} \dots\dots (2.26) \end{aligned}$$

이 되고, 같은 방법으로 이동부분 도달시간은 i 차 하천에 있어서 평균 u_{ci} 로 $[0, 2 u_{ci}]$ 범위내에서 균일분포가 된다고 가정하면 도달시간의 확률밀도함수는 Laplace 변환에 의해서

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}[f_{T_{ci}}(t) * \cdots * f_{T_{cj}}(t) * \cdots * f_{T_{cM}}(t)] \\ & = \mathcal{L}[f_{T_{ci}}(t)] \cdots \mathcal{L}[f_{T_{cj}}(t)] \cdots \mathcal{L}[f_{T_{cM}}(t)] \\ & = \frac{1}{(2 \cdot u_{ci}) \cdots (2 \cdot u_{cj}) \cdots (2 \cdot u_{cM})} \\ & \times \frac{(1 - e^{-2S u_{ci}}) \cdots (1 - e^{-2S u_{cj}}) \cdots (1 - e^{-2S u_{cM}})}{S \cdots S \cdots S} \\ & \dots\dots (2.27) \end{aligned}$$

이 된다. 식 (2.26)과 식 (2.27)를 종합하면

$$\begin{aligned} & \mathcal{L} \{ [f_{T_{i1}}(t) * f_{T_{ri}}(t) * \cdots * f_{T_{rj}}(t) * \cdots * f_{T_{rM}}(t) * \\ & [f_{T_{ci}}(t) * \cdots * f_{T_{cj}}(t) * \cdots * f_{T_{cM}}(t)]] \} \\ & = \frac{1}{(u_{i1} * u_{ri} \cdots u_{rj} \cdots u_{rM}) (2u_{ci}) \cdots (2u_{cj})} \\ & \cdots (2u_{cM}) \times \frac{1}{(S+1/u_{i1})(S+1/u_{ri}) \cdots} \\ & \frac{(S+1/u_{rj}) \cdots (S+1/u_{rM})}{S \cdots S} \times \frac{(1 - e^{-2S u_{ci}}) \cdot}{S \cdots S} \\ & \cdots (1 - e^{-2S u_{cj}}) \cdots (1 - e^{-2S u_{cM}}) \\ & = m \left[1 + \sum_{k=1}^{nr} (-1)^k \cdot e^{-2S u_{\theta k}} \right] \\ & \cdot \left[\frac{1}{[S^{nr} \cdot (S+1/u_{i1})(S+1/u_{ri}) \cdots (S+1/u_{rj}) \cdots \right.} \\ & \left. \cdots (S+1/u_{rM})] \right] \dots\dots (2.28) \end{aligned}$$

이 된다. 윗식에서 nr 는 경로 r 에서 다른 차수 하천의 총수이므로

$$\begin{aligned} \theta k & = [d_1, d_2, \dots, d_k] [d_1, d_2, \dots, d_{nr}] \\ & = [C_i, C_j, \dots, C_M] \end{aligned}$$

$$\theta k = \sum_{\nu=1}^k u_{d\nu} \dots\dots (2.29)$$

$$\begin{aligned} m & = [u_{i1} * u_{ri} \cdots u_{rj} \cdots u_{rM} \cdot (2u_{ci}) \cdots (2u_{cj}) \cdot \\ & \cdots (2u_{cM})]^{-1} \dots\dots (2.30) \end{aligned}$$

이 된다. 식 (2.28)에서 마지막항을 부분분수식으로 나타내면

$$\begin{aligned} & [S^{nr} \cdot (S+1/u_{i1})(S+1/u_{ri}) \cdots (S+1/u_{cj}) \cdots \\ & \cdot (S+1/u_{cM})]^{-1} \\ & = \frac{a_1}{S} + \frac{a_2}{S^2} + \cdots + \frac{a_{nr}}{S^{nr}} + \frac{b_{i1}}{S+1/u_{i1}} \\ & \cdots + \frac{c_j}{S+1/u_{ri}} + \cdots + \frac{c_j}{S+1/u_{rj}} \\ & \cdots + \frac{c_M}{S+1/u_{rM}} \dots\dots (2.31) \end{aligned}$$

이 되며 ‘윗식에서 $a_1, a_2, \dots, a_{nr}, c_i, \dots, c_j, \dots, c_M$ 는 모두 계수이므로,

$$\begin{aligned} 1 & = a_1 \cdot S^{nr-1} \cdot (S+1/u_{i1})(S+1/u_{ri}) \cdots (S+1/u_{rj}) \cdots \\ & (S+1/u_{rM}) + a_2 \cdot S^{nr-2} \cdot (S+1/u_{i1})(S+1/u_{ri}) \cdots \\ & (S+1/u_{rj}) \cdots (S+1/u_{rM}) + \cdots + a_{nr} \cdot S^{nr-nr} \\ & \cdot (S+1/u_{i1}) \\ & (S+1/u_{ri}) \cdots (S+1/u_{rj}) \cdots (S+1/u_{rM}) \\ & + b_{i1} \cdot S^{nr} \cdot 1 \cdot (S+1/u_{ri}) \cdots (S+1/u_{rj}) \cdots \\ & (S+1/u_{rM}) \\ & + c_i \cdot S^{nr} \cdot (S+1/u_{i1}) \cdot 1 \cdots (S+1/u_{rj}) \\ & \cdots (S+1/u_{rM}) + \cdots \\ & + c_j \cdot S^{nr} \cdot (S+1/u_{i1})(S+1/u_{ri}) \cdots 1 \cdot \\ & \cdots (S+1/u_{rM}) + \cdots \\ & + c_M \cdot S^{nr} \cdot (S+1/u_{i1})(S+1/u_{ri}) \cdots (S+1/u_{rj}) \\ & \cdots 1 \dots\dots (2.32) \end{aligned}$$

이 되고, 식 (2.32)에서 $b_{i1}, c_i, \dots, c_j, \dots, c_M$ 의 계수는

$$\begin{aligned} S & = -1/u_{i1} \cdot -1/u_{ri} \cdots -1/u_{rj} \cdots -1/u_{rM} \\ & \text{를 대입해서 구하면} \\ b_{i1} & = [(-1/u_{i1})^{nr} \cdot 1 \cdot (-1/u_{i1} + 1/u_{ri}) \cdots \\ & \cdot (-1/u_{i1} + 1/u_{rj}) \cdots \cdots (-1/u_{i1} + 1/u_{rM})]^{-1} \\ c_i & = [(-1/u_{ri})^{nr} \cdot (-1/u_{ri} + 1/u_{i1}) \cdot 1 \cdots \\ & \cdots (-1/u_{ri} + 1/u_{rj}) \cdots \cdots (-1/u_{ri} + 1/u_{rM})]^{-1} \\ & \vdots \\ c_j & = [(-1/u_{rj})^{nr} \cdot (-1/u_{rj} + 1/u_{i1}) \cdot (-1/u_{rj} \\ & + 1/u_{ri}) \cdots \cdots 1 \cdots \cdots (-1/u_{rj} + 1/u_{rM})]^{-1} \\ & \vdots \\ c_M & = [(-1/u_{rM})^{nr} \cdot (-1/u_{rM} + 1/u_{i1}) \cdot (-1/u_{rM} \\ & + 1/u_{ri}) \cdots \cdots (-1/u_{rM} + 1/u_{rj}) \cdots \cdots 1]^{-1} \\ & \dots\dots (2.33) \end{aligned}$$

이 된다.

계수 a_n 는 $S=0$ 을 식 (2.32)에 대입하면

$$a_n = u_{i1} \cdot u_{r1} \cdots u_{rj} \cdots u_{rM} \cdots (2.34)$$

이 되고, 비교계수법으로 S^{2nr} , S^{2nr-1} , ..., S^{2nr+2} 등
 항의 계수를 비교하면서 a_1, a_2, \dots, a_{n-1} 을 풀면

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 + b_{i1} + c_i + \dots + c_j + \dots + c_M \\ 0 &= a_1(1/u_{i1} + 1/u_{r1} + \dots + 1/u_{rj} + \dots + 1/u_{rM}) \\ &+ a_2 + b_{i1}(u-1/u_{i1}) + c_i(u-1/u_{r1}) + \dots \\ &+ c_j(u-1/u_{rj}) + \dots + c_M(u-1/u_{rM}) \cdots (2.35) \end{aligned}$$

이 된다. 윗식에서 u 는

$$u = 1/u_{i1} + 1/u_{r1} + \dots + 1/u_{rj} + \dots + 1/u_{rM} \cdots (2.36)$$

이므로, 식 (2.28)과 식 (2.36)에서

$$\begin{aligned} &f_{T_{i1}}(t) * f_{T_{i2}}(t) * \dots * f_{T_{j2}}(t) * \dots * f_{T_{M2}}(t) \\ &= m \cdot [G(t) + \sum_{k=1}^{nr} (-1)^k \cdot U 2\mu_{\theta k}(t) \cdot G(t - 2\mu_{\theta k})] \\ &\dots \dots \dots (2.37) \end{aligned}$$

이 되고, 윗식에서 $U(t)$ 는 단위 단계함수(Unit step function)이므로, $t \geq c$ 이면 $U_c(t) = 1$ 이고, $t < c$ 이면 $U_c(t) = 0$ 이다.

그러므로, $G(t)$ 는

$$\begin{aligned} G(t) &= a_1 + a_2 + \dots + 1/(n-1)! \cdot a_n \cdot t^{n-1} \\ &+ b_{i1} \cdot e^{-t/u_{i1}} + c_i \cdot e^{-t/u_{r1}} + \dots + c_j \cdot e^{-t/u_{rj}} \\ &+ \dots + c_M \cdot e^{-t/u_{rM}} \dots \dots \dots (2.38) \end{aligned}$$

식 (2.14)와 식 (2.37) 에서

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_{r \in R} \{ [m(G(t) + \sum_{k=1}^{nr} (-1)^k \cdot U 2\mu_{\theta k}(t) \\ &\cdot G(t - 2\mu_{\theta k}))]_r \cdot P(r) \} \dots \dots \dots (2.39) \end{aligned}$$

을 얻는다.

식 (2.39)가 GIUH 모델의 유도식이다.

2.2 GIUH 모델 適用技法

지형인자를 측정하기 위해서는 일반적으로 1 ; 50,000의 지형도를 이용하는 것이 편리하다. 적용기법은 분할법(Sub-area method)과 평균치법(Mean-value method)이 있다.

2.2.1 분할법

대기행렬이론모델 적용의 편리를 위해서 유역을 여러개의 소구역으로 분할하는 방법이다. Fig. 1의 예를 보면 10개의 절점과 9개의 하천으로 된 유역이므로 유역은 9개의 소구역으로 분할되며 유출의 각 경로를 나타낸다. 유출의 경로는 강우가 내리는 위치가 각각 다르기 때문

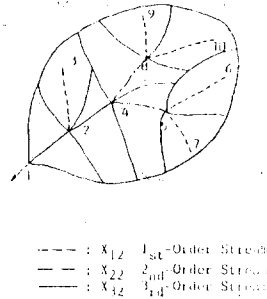


Fig. 1. Map of Sub-area Method

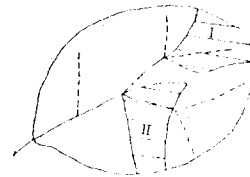


Fig. 2. Runoff Path Diagram

에 모두 같지 않다.

Fig. 2의 사선부분(I)에 내린 강우가 유역의 출구에 도달하는 경로는

$$X_{11} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{32} \dots \dots \dots (2.40)$$

이 되고, 사선부분(II)에 내린 강우가 유역의 출구에 도달하는 경로는

$$X_{21} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{32} \dots \dots \dots (2.41)$$

이 된다.

Fig. 1에서 알 수 있듯이 모든 소구역은 하나의 독립된 유출 경로를 나타내므로 $P_{u2,v2} = 1$ 이 되기 때문에 식 (2.1)은

$$P(r) = P_{A_{i1}} \cdot 1 = P_{A_{i1}} \dots \dots \dots (2.42)$$

이 된다. GIUH 모델의 계산에 의해서 각 경로의 순간 단위도를 누적하면 마지막으로 유역의 순간단위도가 된다.

2.2.2 평균치법

유역내의 복잡한 분할을 피하기 위해서 유역을 하천 차수에 따라서 분할하는 방법으로, Fig. 3처럼 3차 하천의 유출 경로는

$$\left. \begin{array}{l} X_{11} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{32} \\ X_{11} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{32} \\ X_{21} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{32} \\ X_{31} \rightarrow X_{32} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(2.43)$$

이 되며, 4차 하천 유역에서 유출 경로를 살펴 보면

$$\left. \begin{array}{l} X_{11} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{42} \\ X_{11} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{42} \\ X_{11} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{42} \\ X_{11} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{42} \\ X_{21} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{42} \\ X_{21} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{42} \\ X_{31} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{42} \\ X_{41} \rightarrow X_{42} \end{array} \right\} \dots\dots(2.44)$$

이 된다.

평균치법에서 지표면 지역 X_{i1} 의 도달시간은 $u_{i1} = P_{Ai1} \cdot A / 2N_i \cdot \bar{L}_i \cdot V_{i1}, i=1, 2, \dots, M \dots\dots(2.45)$

이고, N_i ; i 차 하천의 총수, \bar{L}_i ; i 차 하천의 평균길이이다. 하천 X_{i2} 의 도달시간은

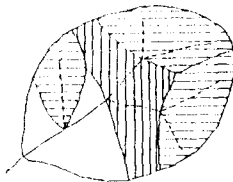
$$u_{i2} = \bar{L}_i / V_{i2}, i=1, 2, \dots, M \dots\dots\dots(2.46)$$

이다. 식 (2.45)와 식 (2.46)에서 u_{i1}, u_{i2} 를 구하고 GIUH 모델식에 대입해서 계산하면 유역 출구에서 순간단위도를 얻는다.

3. GIUH 모델 分析 및 考察

3.1 모델 분석

지형인자를 고려한 강우-유출 모델인 GIUH 모델의 비교 분석을 위하여 선정된 지점은 비교적 정밀한 계측 시설이 설치되어있고, 정확한 관측



- : X_{12} 1st Order Stream
- : X_{22} 2nd Order Stream
- : X_{32} 3rd Order Stream
- : X_{11} 1st Order Stream Region
- : X_{21} 2nd Order Stream Region
- : X_{31} 3rd Order Stream Region

Fig. 3. Map of Mean Value Method

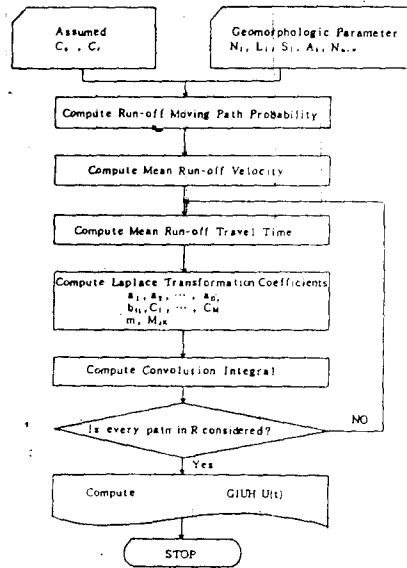


Fig. 4. Flow Chart for Calculation of GIUH Model

자료를 획득할 수 있는 지점이야 함으로, 분석 대상 유역은 낙동강 위천 유역의 동곡교(33.63 km²), 고노교(109.73km²), 미성교(171.25km²), 효령교(151.05km²) 지점을 택하였으며, 분석 유역에는 자기 우량계가 11개소, 수위 관측소가 6개소에 설치 되어있고, 분석에 사용된 자료는 1985년~1986년의 주요 호우이다.

강우 자료에 있어서 4개 소유역에 대한 유역 평균 강우량 산정은 11개 관측소의 강우량 관측자료를 사용하여 Thiessen 면적 가중법에 의하여 구하였으며, 유효우량은 일정비 손실 우량법을 택하였다. 직접 유출과 기저 유출의 분리는 주 지하수 감수 곡선법으로 분리 하였다.

GIUH 모델 적용기법에는 분할법과 평균치법이 있으며, 유역의 지형적 특성에 의해서 추정되는 통수능계수(C_s) 값과 도달시간비(C_r) 값을 결정해야 하며, GIUH 모델 계산 과정의 Flow chart Fig. 4와 같다.

GIUH 모델의 평균 유출속도 계산에서 통수능계수(C_s) 값은 하천 차수가 높아짐에 따라서 증가하며, 유효 강우량이 커질 수록 C_s 값은 증가하는 것으로 나타났으며, 분석 지점별로 계산된 값은 Table. 1과 같다.

Table 1. Comparison of C_s, C_r (86.06.24)

Watershed		Dong-Kok	Go-Ro	Mi-Seong	Hyo-Ryeong
C_s, C_r					
GIUH	Sub-area	C_s 21.00	55.00	88.00	40.00
		C_r 0.30	0.25	0.10	0.20
Mean-value	C_s	17.70	64.00	165.00	58.00
	C_r	0.20	0.30	0.20	0.20
T. R(mm)		116.50	119.91	113.17	125.95
E. R(mm)		50.54	52.97	56.79	59.25

Table 2. Calculation of Braching Ratio

Watershed	P_{u_2, v_2}					
	$P_{1,2}$	$P_{1,3}$	$P_{1,4}$	$P_{2,3}$	$P_{2,4}$	$P_{3,4}$
Dong-Kok	0.7778	0.1481	0.0741	0.7143	0.2857	1.0000
Go-Ro	0.7364	0.1364	0.1273	0.7826	0.2174	1.0000
Mi-Seong	0.7630	0.1280	0.1090	0.6667	0.3333	1.0000
HyoORyeong	0.8219	0.1164	0.0616	0.7619	0.2831	1.0000

Table 3. Results Comparison of Each Model (86.06.24)

Watershed	Items	Observed	Dimensionless U.H	GIUH		Remarks
				Sub-area	Mean-value	
Dong-Kok	Q_p	55.94	63.89	58.33	57.80	Q_p (m ³ /sec)
	T_p	9	9	10	10	T_p (hr)
	CE*	*	0.877	0.814	0.764	CE(%)
	EQ_p **	*	14.210	4.278	3.319	EQ_p (%)
	ET_p ***	*	0	1	1	ET_p (hr)
Go-Ro	Q_p	190.53	175.46	205.73	181.10	
	T_p	9	10	9	9	
	CE	*	0.879	0.931	0.914	
	EQ_p	*	-7.611	7.797	-4.951	
	ET_p	*	1	0	0	
Mi-Seong	Q_p	299.63	238.07	292.25	292.29	
	T_p	7	9	7	7	
	CE	*	0.740	0.842	0.856	
	EQ_p	*	-20.554	-2.472	-1.458	
	ET_p	*	2	0	0	
Hyo-Ryeong	Q_p	225.73	278.72	226.20	225.47	
	T_p	9	9	10	9	
	CE	*	0.915	0.830	0.916	
	EQ_p	*	10.183	0.210	-0.115	
	ET_p	*	0	1	0	

* $CE=1-\frac{(Q_{obs}-Q_{est})^2}{(Q_{obs}-Q_{obs})^2}$ ** $EQ_p=\frac{Q_{p.est}-Q_{p.ose}}{Q_{p.obs}}$ *** $ET_p=T_{p.est}-T_{p.obs}$

* est=estimation, obs=observed

유역의 형태를 대표하는 인자인 도달시간은 크게 지표면 흐름에서의 소요시간과 하천에서의 소요시간으로 나눌 수 있으며 지표부분은 SCS에서 작성한 도표를 이용하여 구하고, 하천부분의 도달시간은 Kirpich 공식으로 구한다. 또한 일본의 Mutsumi Kadoya는 지표면 도달시간은 같은 길이의 하천 도달시간의 3~5배가 된다고 하였으나 위천 유역에서는 계산결과 1~5배가 되었다. 도달시간비(C_r) 값은 유역의 특성변수가 되어야 함으로, 주로 하천의 평균 경사에 의해서 결정되며, 각 분석 지점별 계산된 값은 Table. 1과 같다.

평균치법에서 하천 분기비, P_{u_2, v_2} 는

$$P_{u_2, v_2} = N_{u, v} / N_u$$

$N_{u, v}$; v 차 하천에 연결되는 u 차 하천의 총수

N_u ; u 차 하천의 총수이고, 각 분석 지점별

로 계산한 분기비는 Table 2와 같다.

Table 4. Sensitivity Analysis of C_s, C_r (1986.06.24)

Watershed	Items	Observed	C_s		C_r		Remarks
			C_s^{-*}	C_s^{+*}	C_r^{-**}	C_r^{+**}	
Dong-Kok	Q_p	55.94	48.14	64.24	57.26	58.19	Q_p (m ³ /sec)
	T_p	9	11	10	10	10	T_p (hr)
	EQ_p	*	-13.948	14.841	2.354	4.021	EQ_p (%)
	ET_p	*	2	1	1	1	ET_p (hr)
Go-Ro	Q_p	190.53	157.39	195.39	177.60	181.77	
	T_p	9	10	9	9	9	
	EQ_p	*	-11.12	2.467	-6.784	-4.600	
	ET_p	*	1	0	0	0	
Mi-Seong	Q_p	299.66	259.21	339.39	291.11	304.97	
	T_p	7	7	6	7	6	
	EQ_p	*	-13.499	13.260	-2.852	1.773	
	ET_p	*	0	-1	0	-1	
Hyo-Ryeong	Q_p	225.73	190.36	252.39	211.56	218.91	
	T_p	9	9	8	9	9	
	EQ_p	*	-15.667	11.811	-6.278	-3.023	
	ET_p	*	0	-1	0	0	

* $C_s^{\pm} = C_s \cdot (1 \pm 0.25)$ ** $C_r^{\pm} = C_r \cdot (1 \pm 0.25)$

3.2 모델 검정

GIUH 모델의 정확성을 객관적으로 평가할 수 있도록 하기 위해서 효율계수(CE), 첨두 유출량 오차 백분율(EQ_p), 첨두 유출량 도달시간 오차(ET_p)와 유역의 지형특성에 의해서 결정된 통수능계수(C_s) 값 및 도달시간비(C_r) 값을 각각 25%씩 증감시켜 민감도 분석을 하여 관측치와 비교한다.

GIUH 모델의 분석 지점별 계산 결과는 Table

3과 같으며, CE는 0.75 이상이고, EQ_p는 ±5% 정도이고, ET_p는 1시간 이하이다.

미계측 유역 및 자료가 결핍된 유역에 적용할 수 있는지의 여부를 검토하기 위하여 C_s 값과 C_r 값에 대한 민감도 분석 계산 결과는 Table 4와 같으며, EQ_p는 ±10% 정도이고, ET_p는 ±2시간 이내이므로 충분히 적용할 수 있음을 알 수 있었다.

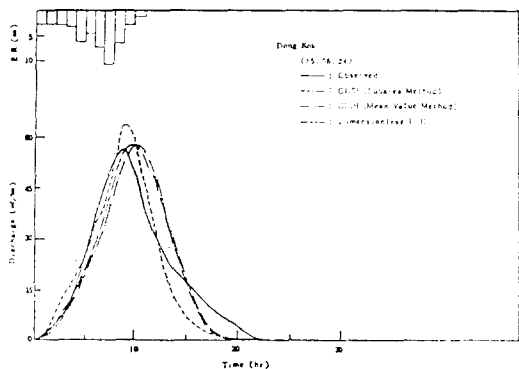


Fig. 5. Direct Run-off Hydrograph

Fig. 5. Direct Run-off Hydrograph

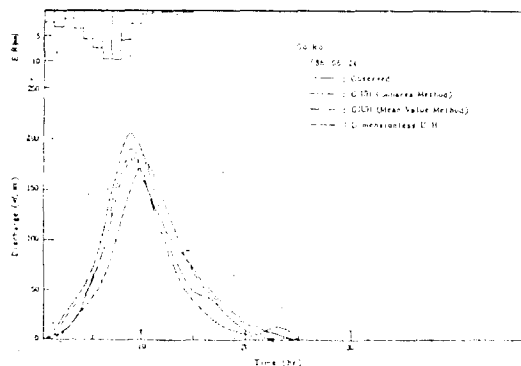


Fig. 6. Direct Run-off Hydrograph

Fig. 6. Direct Run-off Hydrograph

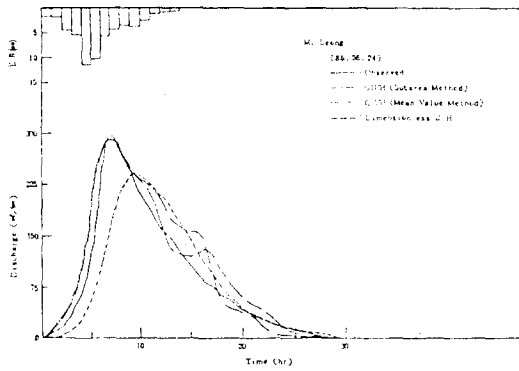


Fig. 7. Direct Run-off Hydrograph

Fig. 7. Direct Run-off Hydrograph

3.3 분석 결과의 비교 및 검토

각 분석 지점별로 GIUH 모델과 합성단위도인 무차원 단위도에 의한 유출량 계산 결과를 비교한 것은 Table.3 과 같으며, GIUH 모델 계산결과 CE 는 0.75 이상이고, EQ_p 는 $\pm 5\%$ 정도이며, ET_p 는 1시간 이하이다. 무차원단위도에 의한 계산결과 CE 는 0.70 이상이고, EQ_p 는 $\pm 20\%$ 정도이며, ET_p 는 2시간이내이므로 GIUH 모델이 무차원단위도에 의한 계산 결과보다 관측치에 접근함을 알 수 있었고, 미계측 및 자료가 결핍된 유역에 적용할 수 있음을 알 수 있었다.

3.4 결과의 고찰

본 연구에서 유출량 해석을 하기 위해서 GIUH 모델의 분할법과 평균치법 및 무차원단위도에 의한 분석 결과는 다음과 같다.

분석 유역에 적용하여 유출 해석을 한 직접유출 수문곡선과 실측 직접유출 수문곡선과 비교한 결과 Fig.5~Fig.8과 같으며, GIUH 모델이 무차원단위도에 의한 수문곡선보다 관측치에 접근함을 알 수 있었다.

하천 차수 법칙에 의해서 위천 유역을 분할하면 하천 차수가 증가함에 따라서 각 하천의 평균길이 및 배수면적이 증가하며 하천수는 상대적으로 감소함을 알 수 있었다. 분석 유역 중 동곡교 지점을 택하여 반대수지에 도시한 것이 Fig.9이고, 하천의 평균 배수면적 및 하천수는 하천차수에 대하여 선형관계가 있음을 알 수 있고, 통수능계수(C_c) 값에 대한 평균 직접 유출량 및 평균 강우강도를 도시하면 비례적인 상호

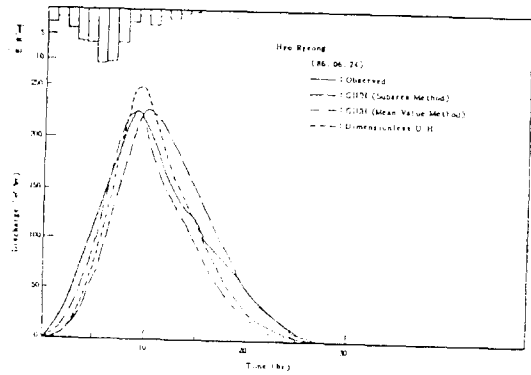


Fig. 8. Direct Run-off Hydrograph

Fig. 8. Direct Run-off Hydrograph

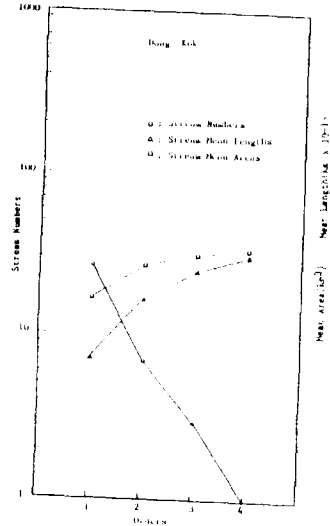


Fig. 9. Relation of Mean Area, Mean Length, Number vs. Order

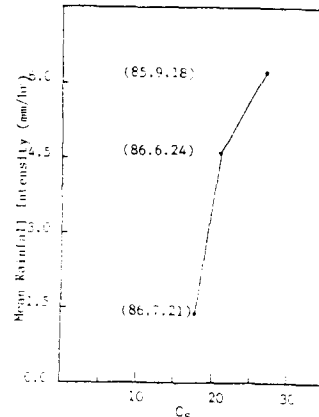


Fig. 10. Variation of Discharge vs. C_c values (Dong Kok)

관련성이 있음이 명백하며, 동곡교 지점을 택하

산오차가 누적됨으로 평균치법이 분할법보다 계산이 편리하고 정확함을 알았다.

4. 結 論

지형인자를 이용하여 미계측 유역이나 수문자료가 충분하지 못한 유역에 대한 강우-유출 관계를 해석한 모델중에서 대기 행렬이론을 적용한 비선형 시변인 GIUH 모델로 유출해석을 한 결과는 다음과 같다.

1. 순간단위도에 의한 GIUH 모델을 확립하였으며, 비교한 결과 정확도가 높은 우수한 결과를 얻을 수 있다.
2. GIUH 모델은 분석 유역의 지형도로 부터 측정된 지형자료, 즉 배수면적, 하천수, 길이, 경사등을 구하여 유출량을 계산할 수 있으므로 미계측 유역이나 자료가 결핍된 유역에 광범위하게 적용할 수 있음을 알 수 있었다.
3. 통수능계수(C_s) 값은 유출속도에 따라 변화하는 변수이고, C_s 값은 민감도 분석결과 침투 유출량과 도달시간에 큰 영향을 줌을 알 수 있었다.
4. 도달시간비(C_r) 값은 유역의 지형 특성변수이고, 유역 경사로 추정할 수 있으며, C_r 값은 민감도 분석결과 침투 유출량과 도달시간에는 큰 영향을 주지않음을 알 수 있었다.
5. GIUH 모델의 분할법은 계산과정의 반복단계에서 계산오차가 누적됨으로 평균치법이 분할법보다 계산이 간편하고 실용성이 있음을 알 수 있었다.

參 考 文 獻

- 1) Body, M.J., "A Storage-routing Model Relating Drainage Basin Hydrology and Geomorphology". Water Resources Research, Vol. 14, No.5, pp. 921~928, 1978.
- 2) Body, M.J., D.H. Pilgrim, and I. Cordery, "A Storage Routing Model Based on Catechment Geomorphology", J. of Hydrology, Vol. 42, pp. 209~230, 1979.
- 3) Betson, Roger P., "A Geomorphic model for use in Streamflow Routing". Water Resources Rese-

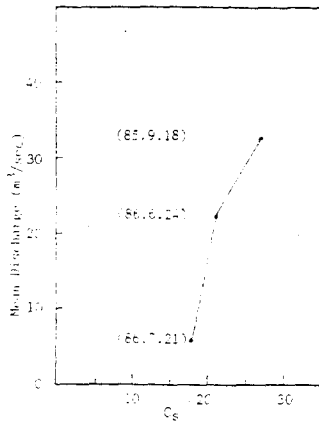


Fig.10. Variation of Discharge vs.

Fig. 11. Variation of Rainfall Intensity vs. C_s values (Dong Kok)

여 이들의 관계를 도시한 것이 Fig.10 과 Fig.11 이다. 계측 유역의 이러한 관계곡선은 인근 미계측 유역에 참고로 하여 타당한 통수능계수 값을 추정하는 데 이용할 수 있다.

통수능계수(C_s) 값은 평균 유출속도의 변수이며, 비교적 큰 C_s 값은 침투 유출량이 크게 계산되며 도달시간은 짧아지고, 작은 C_s 값은 침투 유출량이 작게 계산되고 도달시간은 길어진다. 민감도 분석 결과 EQ_p 는 $\pm 10\%$ 정도이고, ET_p 는 2시간이하이므로 침투 유출량과 도달시간에는 영향을 줌을 알 수 있었다.

도달시간비(C_r) 값은 유역의 지형 특성변수이며 유역의 평균 경사와 상관성을 이룬다. 비교적 큰 C_r 값은 비교적 큰 침투 유출량이 계산되고, 작은 C_r 값은 침투 유출량이 작게 계산되지만, 민감도 분석 결과 EQ_p 는 $\pm 5\%$ 정도이고, ET_p 는 1시간 이하이므로 침투 유출량과 도달시간에는 큰 영향을 주지 않음을 알 수 있었다.

이상에서와 같이 분할법은 유역을 각 하천별 소구역으로 분할하여 계산하므로 계산시간이 평균치법보다 많이 걸리고, 하천수의 증가에 따라 계산시간이 길어지며, 지형도상에서 소배수 구역으로 분할하는 것도 매우 복잡하다. 반면 평균치법은 계산이 비교적 간편하고 신속한 방법이며, 유역내 지형지물등의 물리적 특성에 따른 국부적 현상에 대해서 큰 영향을 받지 않는다.

따라서 분할법은 계산과정의 반복단계에서 계

- arch. Vol. 15, No.1, pp.95~101, 1979.
- 4) Chow, V.T. and Kulandaisvany, V.C., "The IUH of General Hydrologic System Model", J. of Hydraulics, ASCE. July, 1982.
 - 5) Gupta, V.K., E. Waymire, and C.T. Wang., "A Representation of and Instantaneous unit Hydrograph from Geomorphology". Water Resources Research. Vol. 16, No.5, pp.862~885, 1980.
 - 6) Wang, C.T., V.K. Gupta, and E. Waymire, "A Geomorphologic Synthesis of Nonlinearity in Surface Runoff". Water Resources Research, Vol. 17, No.3, pp.545~554, 1981.
 - 7) Cheng, B.L., "A Study of Geomorphologic Instantaneous Unit Hydrograph", Ph. D. Thesis, U. of Illinois, 1982.
 - 8) Rodriguez-Iturbe, I., and J.B. Valdes, "The Geomorphologic Structure of Hydrologic Response". Water Resources Research, Vol. 15, No.6, pp.1409~1420, 1979.
 - 9) Rodriguez-Iturbe, I., and Gonzalez-Sanabria, M., "A Geomorphoclimatic Theory of the Instantaneous Unit Hydrograph". Water Resources Research, Vol. 17, No.4, pp.877~886, 1982.
 - 10) Valdes, J. B., Y. Fiallo, and I. Rodriguez-Iturbe, "A Rainfall-Run off Analysis of the Geomorphologic IUH". Water Resources Research, Vol. 15, No.6, pp.1421~1434, 1979.
 - 11) Mutsumi Kadoya, "Concentration Time of Flood Runoff in Smaller River Basin", Kyoto University, Japan.
 - 12) Ru-YIH WANG, "Study on the Geomorphologic Instantaneous Unit Hydrograph and Its Applications". 5th Congress IAHR pp.163~181, 1986.
 - 13) Chow, V.T., Open-Channel Hydraulics, 1959.
 - 14) Dooge, J.C.I., Linear Theory of Hydrologic System, USDA, 1973.
 - 15) Taha, H. A., Operation Research: An Introduction, 1976.
 - 16) Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications, 1968.
 - 17) 李舜鐸, 水文學河川工學 1. 螢雪出版社, 1975.
 - 18) 王如意, 應用水文學 上·下冊. 國立編譯出版社, 民國 68年 10月.