

## PID 制御器의 最適設計에 관한 研究(Ⅱ)

梁 注 鎬\* · 河 注 植\*\*

## A Study on the Optimal Design of a PID Controller(Ⅱ)

J. H. Yang, J. S. Ha

## Abstract

The PID controller is one of the most popular devices for control systems and the adjustment of its parameters has been generally accomplished by semi-empirical rules and has been considered only in the view of improvement of the control performance.

But in modern control theory, a quadratic form ( $J = \int_0^{t_1} (x^T Q x + u^T R u) dt$ ) is introduced as a criterion function which considers not only to improve quality of control but also to save energy required for the control.

In this paper, authors propose a method of the parameter adjustment of the PID controller by means of maximum principle minimizing the quadratic criterion function and establish a link between the conventional parameter adjustment method and the technique of the modern optimal control theory in the design of a PID controller.

## 1. 序 論

PID 制御器는 現在 産業現場에서 가장 널리 사용되고 있는 제어기이다. 그런데 이 PID 制御器는 比例帶, 積分時間, 微分時間 등의 퍼라미터 값에 따라 그 特性이 상당히 달라지기 때문에 PID 제어기의 퍼라미터의 값을 調整하는 것은 매우 重要的 問題이다. PID 制御器의 調整法으로는 過渡應答法<sup>1)</sup>, Ziegler-Nichols의 限界感度法<sup>2)</sup>, 수정된 Ziegler-Nichols法<sup>3)</sup> 등이 오래전부터 사용되어 오고 있다. 그러나 이 方法들은 正確한 理論的인 計算의 根據에서 보다는 經驗的

인 事實에 의한 것인 데다가 단지 制御의 質만을 고려하여 制御器를 設計하는 方法들이다. 따라서 이 경우에는 制御에 큰 에너지를 소모하게 되어 에너지 節約의 側面에서는 바람직하지 못하다.

한편, 現代制御理論에서는 制御의 質과 에너지 節約의 두가지 側面을 모두 고려한 評價函數를 도입하고 이 評價函數를 最小로 하는 最適制御入力を 求함으로써 制御의 質의 向上과 에너지 節約의 兩面을 企圖하고 있다.

本 研究에서는 一般的인 피드백 制御系統에 대하여 二次形式(quadratic form)의 評價函數를

\* 正會員, 慶南專門大學

\*\* 正會員, 韓國海洋大學

도입하고 Pontrygin의 最大原理<sup>4-6)</sup>(Maximum Principle)를 利用하여 이 評價函數를 最小로 하는 最適制御入力を 구하고, 이것으로 부터 PID 制御器의 퍼래미터를 選定하는 새로운 方法을 提案함과 同時에 PID制御器에 의한 피이드백 制御理論과 現代制御理論에서의 最適制御理論과의 關係를 明確히 함과 아울러 二次系統에 대한 디지털 시뮬레이션을 通하여 本方法과 수정된 Ziegler-Nichols 方法과의 結果를 比較해 봄으로써 本方法의 妥當性을 檢討하고, 三次 以上の 제어대상에 대한 應答 시뮬레이션을 通하여 高次系의 最適制御를 爲하여서는 PID制御器와 觀測器(observer)를 통한 狀態피이드백이 필요하다는 것을 알아 본다.

**2. 最適制御理論을 이용한 PID 制御器의 퍼래미터 선정**

式(1-1)과 같이 주어지는 n次 시스템에 대해 생각하자.

$$\frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{b}{S^n + a_1 S^{n-1} + a_2 S^{n-2} + \dots + a_n} \quad (1.1)$$

또는,

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -a_n & -a_{n-1} \cdots -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{pmatrix} u \\ y &= [100 \cdots 0] [\xi_1 \ \xi_2 \ \cdots \ \xi_n]^T \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

$y^0 = \text{reference value}$

$$\left. \begin{aligned} \text{또는, } \dot{\xi} &= A_0 \xi + B_0 u \\ y &= C_0 \xi \end{aligned} \right\} \quad (1.2)'$$

에서 다음과 같은 상태(state)를 定義하면

$$\left. \begin{aligned} \int (y^0 - y) dt - x_1 &\triangleq X_1 \\ \dot{X}_1 &= y^0 - y \triangleq X_2 \\ \vdots \\ \dot{X}_{n+1} &= -a_n X_2 - a_{n-1} X_3 - \cdots - a_1 X_{n+1} + b \bar{u} \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

(단,  $\bar{u} = u_s - u$ ;  $x_1, u_s$ ;  $y^0$ 에 대응하는  $X_1$  및  $u$ 의 定常值)

으로 되어 오그먼트 상태방정식은 다음과 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \vdots \\ \dot{X}_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -a_n & -a_{n-1} \cdots -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{pmatrix} \bar{u} \\ y &= [0, -1, 0 \cdots 0] [X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_{n+1}]^T + y^0 \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

또는,

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= AX + B\bar{u} \\ y &= CX + y^0 \end{aligned} \right\} \quad (1.4)'$$

二次形式의 評價函數를

$$J = \int_0^\infty (X^T Q X + r \bar{u}^2) dt \quad (1.6)$$

(단,  $Q$ ; symmetric positive semidefinite,  $r > 0$ )

으로 定義하고, 이를 最小로 하는 最適制御入力を Pontryagin의 最大原理(Maximum principle)를 利用하여 구하면 식(1.7)과 같이 된다.<sup>7-9)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}^0(t) &= -\frac{1}{r} B^T \Pi X(t) \\ &= -\frac{b}{r} (\Pi_{n+1,1} X_1 + \Pi_{n+1,2} X_2 + \cdots \\ &\quad \cdots + \Pi_{n+1,n+1} X_{n+1}) \\ &= -(f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3 \\ &\quad - (f_4 X_4 + f_5 X_5 + \cdots + f_{n+1} X_{n+1})) \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

식(1.7)의 마지막 식의 첫번째 괄호부분은 PID動作으로 되고, 끝의 괄호부분은 狀態피이드백으로 됨을 意味한다.

그리고 식(1.7)을 利用하여 制御器를 構成하면 Fig.1과 같이 되고, Fig.1에서 狀態  $X_1$ ,

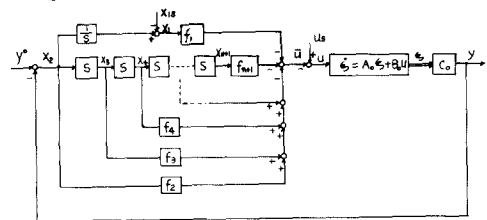


Fig. 1 Block diagram of n-th order controlled system with optimal gains

$X_2, X_3$ 의 피이드백은  $y^0 - y$ 의 PID動作으로 可能하나, 狀態  $X_4 \sim X_{n+1}$ 의 피이드백을 爲하여는 狀態  $X_4 \sim X_{n+1}$ 를 觀測器로서 추정하여야 하므로 Fig.2와 같은 블록線圖로 된다. 또 식(1.7)中的

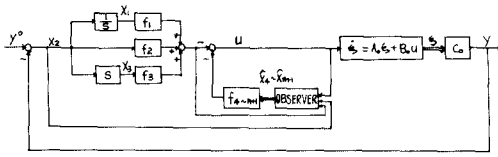


Fig. 2 Equivalent block diagram of Fig. 1 with observer for state  $x_4-x_{n+1}$

行列  $\Pi$ 는 다음 Riccati 方程式의 解行列<sup>10-14)</sup>이다.

$$A^T \Pi + \Pi A - \Pi B r^{-1} B^T \Pi + Q = 0 \quad (1.8)$$

(단,  $\Pi$ ;  $n \times n$  symmetric positive definite)

i) 一次 시스템의 適用

앞의 最適制御理論을 다음의 一次系에 적용하자.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= -a\xi + bu \\ y &= \xi \\ y^0 &= \text{reference value} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

식(1.4)의 2그멘트 상태방정식은

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \bar{u} \quad \text{or, } \dot{X} = AX + B\bar{u} \quad (2.2)$$

으로 되고 最適制御入力は 다음과 같다.

$$\bar{u}^0(t) = -\frac{1}{r} B^T \Pi X(t) = -\frac{b}{r} (\Pi_{12} X_1 + \Pi_{22} X_2); \text{ (PI動作)} \quad (2.3)$$

식(2.3) 中の  $\Pi$ 는 다음식에서  $\Pi$ 가 positive definite가 되도록  $\Pi_{11}$ ,  $\Pi_{12}$ ,  $\Pi_{13}$ 를 선정한다.

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{12} &= \pm \sqrt{r \cdot q_1} / b \\ \Pi_{11} &= \sqrt{q_1(a^2 r / b^2 + q_2 \pm 2\sqrt{r q_1} / b)} \\ \Pi_{22} &= -ar / b^2 \pm \sqrt{r(a^2 r / b^2 + q_2 \pm 2\sqrt{r q_1} / b)} / b \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

ii) 二次 시스템에의 適用

二次 시스템(식(3.1))에 대해 적용하자.

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}^T \\ y^0 &= \text{reference value} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

오그멘트 상태방정식은

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \bar{u} \quad (3.2)$$

으로 되고 最適制御入力は 다음식과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{u}^0(t) &= -\frac{1}{r} B^T \Pi X(t) \\ &= -\frac{b}{r} (\Pi_{13} X_1 + \Pi_{23} X_2 + \Pi_{33} X_3) \\ &= -(f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3); \text{ (PID動作)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

여기서 행렬  $\Pi$  및  $Q$ 를 식(3.4), (3.5)와 같이 定義하고 식(1.8)에 代入하면 식(3.6)~식(3.11)과 같은 6개의 연립방정식을 얻을 수 있고, 이들로 부터  $\Pi_{33}$ 에 관한 四次 方程式을 얻을 수 있다.

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} \\ \Pi_{12} & \Pi_{22} & \Pi_{23} \\ \Pi_{13} & \Pi_{23} & \Pi_{33} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$-b^2 \Pi_{13}^2 / r + q_1 = 0 \quad (3.6)$$

$$\Pi_{11} - a_2 \Pi_{13} - b^2 \Pi_{13} \Pi_{23} / r = 0 \quad (3.7)$$

$$\Pi_{12} - a_1 \Pi_{13} - b^2 \Pi_{13} \Pi_{33} / r = 0 \quad (3.8)$$

$$2(\Pi_{12} - a_2 \Pi_{23}) - b^2 \Pi_{23}^2 / r + q_2 = 0 \quad (3.9)$$

$$\Pi_{22} - a_1 \Pi_{23} + \Pi_{13} - a_2 \Pi_{33} - b^2 \Pi_{23} \Pi_{33} / r = 0 \quad (3.10)$$

$$2(\Pi_{23} - a_1 \Pi_{33}) - b^2 \Pi_{33}^2 / r + q_3 = 0 \quad (3.11)$$

$$\Pi_{33}^4 + A_3 \Pi_{33}^3 + A_2 \Pi_{33}^2 + A_1 \Pi_{33} + A_0 = 0 \quad (3.12)$$

$$\text{단, } \begin{cases} A_3 = 4a_1 r / b^2 \\ A_2 = 4r^2(a_1^2 + a_2 - q_3 b^2 / 2r) b^4 \\ A_1 = 4r^3(2a_1 a_2 - a_1 q_3 b^2 / r \mp 2b\sqrt{r q_1} / r) / b^8 \\ A_0 = 4r^3(q_3^2 b^2 / 4r - a_2 q_3 - q_2 \mp 2a_1 \sqrt{r q_1} / b) / b^8 \end{cases}$$

그리고 식(3.3)과 같이 구하여진 最適制御入력을 利用하여 二次系에 대한 制御器를 構成하면

Fig. 3과 같이 된다.

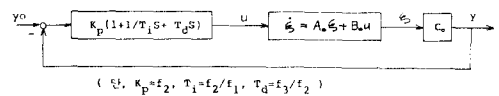


Fig. 3 Block diagram of 2nd order controlled system with optimal gains

iii) 三次 시스템에의 適用

식(4.1)로 주어지는 三次 시스템에 대해 확장 적용하자.

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} u \quad (4.1)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3]^T$$

$y^0$  = reference value

식(4.1)의 시스템에 대해 식(1.3)과 같은 상태를 定義하면 모멘트 상태방정식은

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \bar{u} \quad (4.2)$$

으로 되고 最適制御入力は 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \bar{u}^0(t) &= -\frac{1}{r} B^T \Pi X(t) \\ &= -\frac{b}{r} (\Pi_{14} X_1 + \Pi_{24} X_2 + \Pi_{34} X_3 \\ &\quad + \Pi_{44} X_4) \\ &= -(f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3 + f_4 X_4) \\ &= -K_P (X_2 + \frac{1}{T_i} \int X_2 dt + T_D \dot{X}_2) - f_4 X_4 \end{aligned} \quad (4.3)$$

(단,  $K_P = f_2$ ,  $T_i = f_2/f_1$ ,  $T_D = f_3/f_2$ )

식(4.3)에서 우변의 첫 항은 PID動作을 意味하고 있으며, 끝 항은 상태  $X_4$ 의 피드백을 意味하고 있다. 여기서 상태  $X_4$ 를 피드백 시키기 爲해서는 一般적으로 觀測器(observer)가 必要하다. 또 식(4.3)속의 解行列  $\Pi$ 는 1차 및 2차의 경우와 같이 解析적으로 求할 수 없고 디지털 計算機에 의한 매트릭스 연산에 의해 求할 수 밖에 없다.

그리고 식(4.3)과 같이 求하여진 最適制御入력을 利用하여 3차계에 대한 制御器를 구성하면 Fig.4와 같이 되고, Fig. 4에서의 상태  $X_4$ 는 앞에서 말한 바와 같이 一般적으로 觀測器에 의해 얻어질 수 있다.

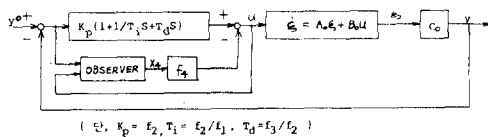


Fig.4 Block diagram of 3rd order controlled-system with optimal gains

### 3. 數值計算 및 시뮬레이션

식(1.8)의 Riccati방정식의 解行列  $\Pi$ 는 1차, 2차 시스템에 대해서는 식(2.4), 식(3.6)~식(3.12)에서 해석적으로 구할 수 있으나 3차 이상의 시스템에 대해서는 그렇지 못하다. 本 研究에서 利用한 Riccati 방정식의 해법은 Bryson과 Ho에 의한 sweep method<sup>12)</sup>이다. 이 방법에 의해 定常상태의  $\Pi$ 값을 구하고 이들로 부터 최적계인을 求하였다. 수치계산 플로우 차트는 Fig.5와 같다.

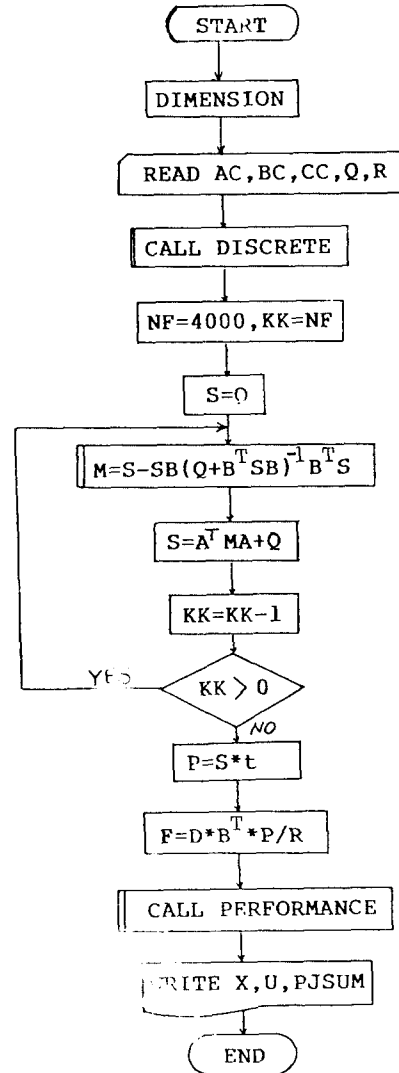


Fig.5 Flow chart

例題로서 2次系에 대해서는 식(3.1)에서  $a_1 = -3.0$ ,  $a_2 = 2.0$ 인 不安全的 시스템(假稱: system 1)과  $a_1 = 0.2$ ,  $a_2 = 1.0$ 인 시스템(假稱: system 2) 및  $a_1 = 0.5$ ,  $a_2 = 0.0$ 인 시스템(假稱: system 3)에 대해 制御器를 設計하고, 3次系에 대해서는 식(4.1)에서  $a_1 = 2.2$ ,  $a_2 = 1.4$ ,  $a_3 = 2.0$ 인 시스템(假稱: system 4)에 대해 制御器를 設計하도록 한다.

3-1. 最適게인 및 評價函數

例로 든 시스템 1, 2, 3,에 대해 荷重係數  $r$ 을 0.1로 하고,  $q_1, q_2, q_3$  變化時的 最適게인과 그 때의 評價函數 값을 計算한 것은 Table 1~Table 3과 같다. Table 4는 시스템 2에 대해서 수정

된 Ziegler-Nichols 方法에 의해 制御器를 設計한 경우의 各 퍼래미터, 誤差二乘面積 및 評價函數의 값을 表示하고 있다. 이 設計法에서 筆者들은 1, 2단계는 그대로 따랐으나 3단계의  $K_P$ 의 再調整에서는 1/4 decay ratio에 의한 調整法을 따르지 않고 誤差二乘面積을 最小로 하는  $K_P$ 를 選定하였다.

그리고 시스템 4에 대해 荷重係數  $r$ 을 0.1로 하고  $q_1(=Q_{11}), q_2(=Q_{22}), q_3(=Q_{33}), q_4(=Q_{44})$ 를 變化했을 때의 最適게인 및 그 때의 評價函數의 값을 Table 5.와 같다. 최적게인  $f_1 \sim f_4$  中에서  $f_4$ 를 0으로 했을 때( $X_4$ 를 피이드백 시키지 않은 경우)의 평가함수는 Table 6.에 표시하고 있다.

Table 1. Values of optimal gain  $f_1, f_2, f_3$  and cost function  $J$  of system 1

| system 1; $a_1 = -3, a_2 = 2., r = 0.1, unstable$ |       |       |       |       |       |        |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $q_1$   | $q_2$ | $q_3$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $J$    |
| 1.0   | 1.0   | 1.0   | 3.16  | 4.93  | 8.37  | 3.987  |
| 1.0   | 0.0   | 0.0   | 3.16  | 3.40  | 6.97  | 2.423  |
| 1.0   | 10.0  | 1.0   | 3.16  | 9.98  | 9.24  | 7.662  |
| 1.0   | 1.0   | 10.0  | 3.16  | 7.18  | 14.11 | 10.449 |

Table 2. Values of optimal gain  $f_1, f_2, f_3$  and cost function  $J$  of system 2

| system 2; $a_1 = 0.2, a_2 = 1.0, r = 0.1, stable$ |       |       |       |       |       |       |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $q_1$   | $q_2$ | $q_3$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $J$   |
| 1.0   | 1.0   | 1.0   | 3.16  | 5.30  | 4.34  | 2.509 |
| 1.0   | 0.0   | 0.0   | 3.16  | 3.10  | 2.30  | 0.682 |
| 1.0   | 10.0  | 1.0   | 3.16  | 10.68 | 5.40  | 6.103 |
| 1.0   | 1.0   | 10.0  | 3.16  | 7.92  | 10.57 | 9.198 |

Table 3. Values of optimal gain  $f_1, f_2, f_3$  and cost function  $J$  of system 3

| system 3; $a_1 = 0.5, a_2 = 0.0, r = 0.1, servo$ |       |       |       |       |       |       |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $q_1$  | $q_2$ | $q_3$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $J$   |
| 1.0  | 1.0   | 1.0   | 3.16  | 6.35  | 4.29  | 2.700 |
| 1.0  | 0.0   | 0.0   | 3.16  | 4.35  | 2.49  | 0.976 |
| 1.0  | 10.0  | 1.0   | 3.16  | 11.69 | 5.30  | 6.346 |
| 1.0  | 1.0   | 10.0  | 3.16  | 8.88  | 10.36 | 9.277 |

**Table 4. Comparison with modified method of Ziegler-Nichols**

| system 2; $r=0.1, q_1=1.0, q_2=10.0, q_3=1.0$ |       |       |       |       |       |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| method  | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $x_2$ | J     |
| method proposed this paper                    | 3.16  | 10.68 | 5.40  | 0.350 | 6.103 |
| modified method Ziegler-Nichols               | 0.075 | 0.69  | 1.591 | 0.830 | 19.85 |

**Table 5. Values of optimal gain  $f_1, f_2, f_3, f_4$  and cost function J of system 4**

| system 4; $a_1=2.2, a_2=1.4, a_3=2.0, r=0.1$ |       |       |       |       |       |       |       |        |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $q_1$  | $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | J      |
| 1.0  | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 3.16  | 6.68  | 8.31  | 3.43  | 6.389  |
| 1.0  | 1.0   | 1.0   | 0.0   | 3.16  | 6.09  | 6.72  | 2.08  | 4.948  |
| 1.0  | 10.0  | 1.0   | 0.0   | 3.16  | 11.26 | 9.94  | 2.77  | 13.242 |
| 1.0  | 1.0   | 10.0  | 0.0   | 3.16  | 8.15  | 12.69 | 3.30  | 12.305 |

**Table 6. Values of cost function J of system 4 when the gain  $f_1, f_2$  and  $f_3$  are optimal gains and the  $f_4$  is zero**

| system 4; $a_1=2.2, a_2=1.4, a_3=2.2, r=0.1$ |       |       |       |       |       |       |       |        |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $q_1$  | $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | J      |
| 1.0  | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 3.16  | 6.68  | 8.31  | 0.0   | 10.538 |
| 1.0  | 1.0   | 1.0   | 0.0   | 3.16  | 6.09  | 6.72  | 0.0   | 6.807  |
| 1.0  | 10.0  | 1.0   | 0.0   | 3.16  | 11.26 | 9.94  | 0.0   | 19.709 |
| 1.0  | 1.0   | 10.0  | 0.0   | 3.16  | 8.15  | 12.69 | 0.0   | 15.264 |

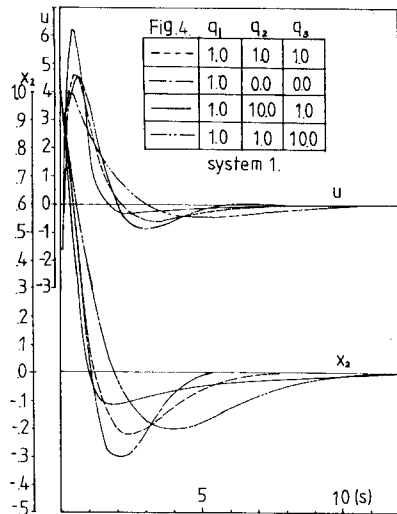
**3-2 시뮬레이션**

앞절에서 數值計算된 最適제인에 의한 最適制御入力  $u^0(t)$  및 狀態  $X_2(t)$ 의 2次系에 대한 曲線은 Fig. 6. ~ Fig. 8. 과 같으며 수정된 Ziegler-Nichols Method에 의한 應答은 Fig. 9. 와 같다. 또, 3次系에 대한 曲線들은 Fig. 10. 과 같다.

Fig. 11. 은 3次系の 制御對象에 대해 最適制御理論을 適用하여 구하여진 最適제인을 PID 動作단으로 制御했을 경우 최적제어와의 相異點을 알아보기 위해 최적제인 中에서  $f_4$ 를 0으로 했을 때의 應答 및 制御入力  $u(t)$ 를 나타낸 曲線이다.

**4. 檢 討**

本 研究에서 提案한 方法으로 1次系 및 2次系



**Fig. 6** Curves of state  $x_2(t)$  and optimal control input  $u^0(t)$  of system 1

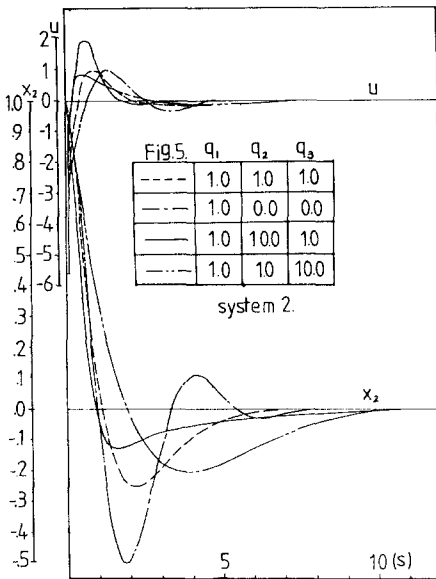


Fig. 7 Curves of state  $x_2(t)$  and optimal control input  $\bar{u}^0(t)$  of system 2

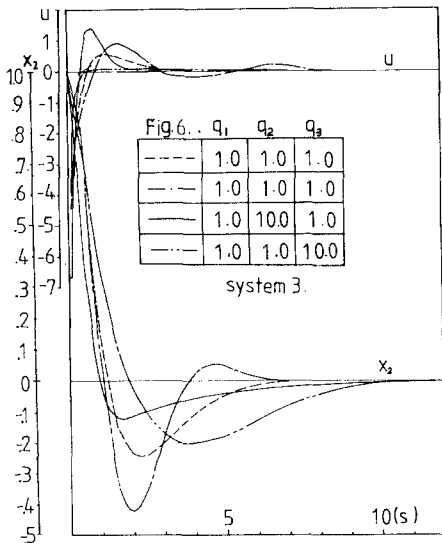


Fig. 8 Curves of state  $x_2(t)$  and optimal control input  $\bar{u}^0(t)$  of system 3

에 대해 制御器를 設計하면 식(2.3) 및 식(3.3)에서 알 수 있는 바와 같이 1次系는 PI制御器가 되고, 2次系는 PID制御器가 된다. 3次系 以上에 대해서는 식(4.3)에서와 같이 PID動作 外에 狀態 피이드백 御制 動作이 있음을 알 수 있다.

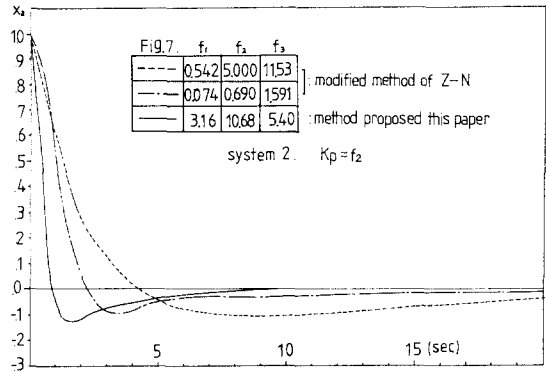


Fig. 9 Curves of state  $x_2(t)$  controlled by modified method of Z-N and method proposed this paper

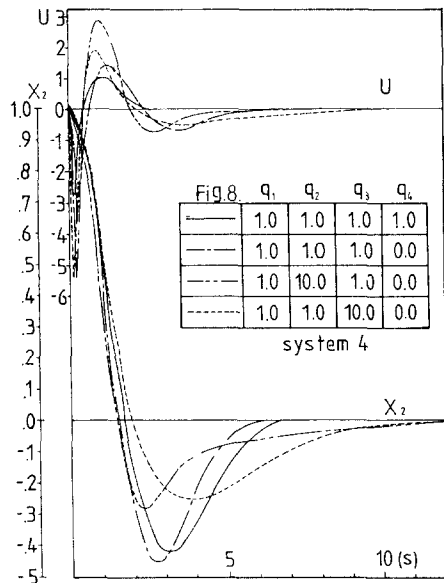


Fig. 10 Curves of state  $x_2(t)$  and optimal control input  $\bar{u}^0(t)$  of system 4

또, 오그먼트 상태  $X_1$ 에 대한 荷重係數  $q_1$ 을 0으로 하면  $I$ 動作은 存在하지 않는다.

Table 1, 2, 3에서 보는 바와 같이 荷重係數  $q_1$ 이 크게 됨에 따라 狀態  $X_1$ 의 최적제인  $f_1$ 이 相對的으로 크게 되고,  $q_2$ 가 커지면  $f_2$ 가,  $q_3$ 가 커지면  $f_3$ 가 各各 크게 됨을 알 수 있다. 이는 荷重係數  $q_1, q_2, q_3$ 가 狀態  $X_1, X_2, X_3$ 의 荷重(weight)이기 때문이다.

Fig. 6은 制御對象이 不安定한 경우에도 本 研究에서 提案한 方法에 의해 求하여진 最適제인 으로 制御器를 構成했을 경우 그 應答이 安定

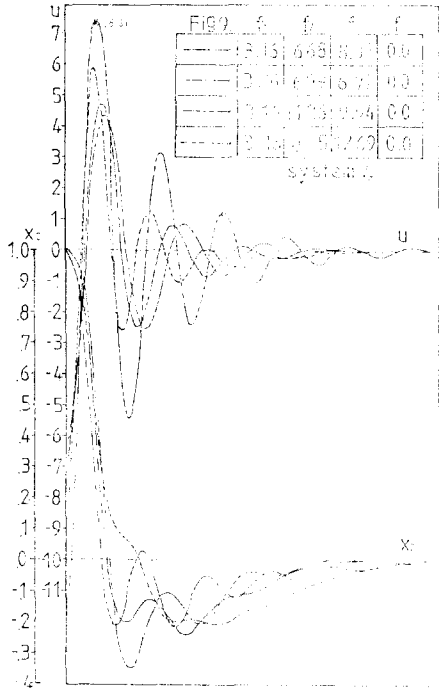


Fig. 11 Curves of state  $x_2(t)$  and control input  $\bar{u}^0(t)$  of system 4 when the gain  $f_1$ ,  $f_2$  and  $f_3$  are optimal

하게 됨을 表示하고 있다. 또한 Fig. 6의 狀態  $X_2$ 의 應答를 觀察해 보면, 荷重係數  $q_2$ 가 큰 경우(실선으로 表示된 曲線)가 다른 세가지의 경우보다 應答速度도 빠르면서 오버슈트도 크게 일어나지 않음을 나타내고 있는 데, 이는 狀態  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ 中에서  $X_2$ 의 荷重을 크게 두어 狀態  $X_2$ 를 重視한 것으로 부터 비롯된 것으로 볼 수 있으며, 이 때 最適制御入力は 다른 경우보다 크게 되는 것도 아울러 알 수 있다. 또 Fig. 7, Fig. 8에서 보는 바와 같이 安定한 系 및 서어보스에 대해서도 비슷한 樣相을 나타내고 있다.

Fig. 9의 點線과 一點鎖線으로 表示된 曲線은 시스템 2를 制御對象으로 하고 그 계인을 수정된 Ziegler-Nichols 方法에 의해 구한 것으로 점선의 경우는  $K_P$ (비례 동작)의 재조정을 임의의 값으로 한 경우의 一例를 나타내고 있으며, 일점쇄선의 경우는  $K_P$ 의 再調整을 誤差二乘面

積이 最小가 되도록 조정할 수 있다. 그리고 실선의 경우는 本 研究에의 提案을 方法으로 구한 最適제어인으로 制御器를 構成한 경우의 應答로서 이 두 경우를 比較해 보면 本 方法이 월등히 優秀함을 알 수 있다. 또한 이를 數值的인 값으로 比較해 보기 위해 評價函數  $J$  값 및 誤差二乘面積을 구해본 結果, Table 4에서 보는 바와 같이 本 方法에 의해 設計된 경우가 작은 것을 알 수 있다.

Fig. 10은 3次系에 대한 狀態  $X_2$ 의 應答 및 最適制御入력  $\bar{u}^0(t)$ 의 曲線으로 2次系의 경우와 매우 비슷한 樣相을 보이고 있다.

Fig. 11은 制御對象이 3次系인 경우의 最適제어인 中에서  $f_4$ 를 0으로 했을 때(PID動作만을 행한 경우)의 狀態  $X_2$  및 制御入력  $u$ 의 曲線으로서, 그 應答이 바람직 하지 못할 뿐만 아니라 제어입력도 과대하게 됨을 보이고 있다. 또 Table 5와 Table 6의 數值的인 比較에서도 評價函數의 값이 커져 바람직 하지 못함을 알 수 있다. 그러므로 本 方法에 의해 最適제어인을 구한 경우 이 모두를 고려해야 한다는 것을 알 수 있으며 이를 위해서 제어대상이 3次 以上인 高次系의 경우에는 觀測器가 必要하다는 것을 알 수 있다.

### 5. 結 論

以上의 檢討로 부터 다음과 같은 結論을 얻게 되었다.

制御對象이 一次인 시스템은 PI制御器가 되고, 二次인 시스템은 PID制御器가 되며, 三次 以上인 시스템은 PID制御器 및 狀態 피드백 動作이 必要하다. 또 오그먼트 상태  $X_1$ 에 대한 荷重係數가 0이면  $I$ (적분)動作은 存在하지 않는다.

荷重係數  $q_1, q_2, q_3, q_4$ 가 커지면 그것에 對應하는 최적제어인  $f_1, f_2, f_3, f_4$ 가 相對的으로 各各 크게 된다.

3次系 以上의 制御對象에 대해서는 狀態 피드백을 위해 觀測器가 必要하다.

本 方法에 의해 설계된 制御器의 優秀성이 應答시뮬레이션 등을 통하여 입증 되었다.



## 參 考 文 獻

- 1) 河注植, “自動制御工學”, 海峯圖書出版部, pp. 251~262, 1983.
- 2) Ziegler and Nichols, ASME Trans., 64, pp. 759~768.
- 3) YEN-PING SHIH and CHIN-JIAN CHEN, “On the weighting factors of the quadratic criterion in optimal control”, INT. J. CONTROL, vol. 19, No. 5, pp. 947~955, 1974.
- 4) 宇野利雄, 葛池曹彦, “最大原理入門”, 共立全書, pp. 25~98, 1968.
- 5) 坂本字, “最適制御の數學的方法”, 總合圖書, pp. 165~191, 1974.
- 6) David Burghes and Alexander Graham, “Introduction to control theory including optimal control”, Ellis Horwood Ltd, pp. 307~309, 1980.
- 7) Andrew P. Sage and Chelsea C. White, “Optimum systems control”. 2nd edition, McGraw-Hill, Inc., pp. 266~276, 1980.
- 8) Michael Athans and peter L. Falb, “Optimal control, An introduction to the theory and its applications”, McGraw-Hill, Inc., pp. 756~787, 1982.
- 9) Huibert Kwakernaak and Raphael Sivan, “Linear Optimal control systems”, WILEY-INTERSCIENCE, pp. 220~247, 1972.
- 10) Brain D.O. Anderson, John B. Moore, “Linear optimal control”, PRENTICE-HALL, Inc., pp. 343~373, 1971.
- 11) Huibert Kwakernaak and Raphael sivan, “Linear optimal control systems”, WILEY-INTERSCIENCE, pp. 248~252, 1972.
- 12) Gene F. Franklin and J. David Powell, “Digital control of dynamic systems”, Addison-wesley Publishing Company, Inc., pp. 251~256, 1980.
- 13) Thrasyvoulos Pappas, et al., “On the Numerical solution of the Discrete Time Algebraic Riccati Equation IEEE TRANS. on Automatic control, vol. Ac-25, No. 4, pp. 631~641, 1980.
- 14) Charles H. Schley and Imsong Lee, “Optimal Control Computation by the Newton-Raphson Method and Riccati Transformation”, IEEE Trans. on Automatic control, vol. AC-12, No. 2, pp. 139~144, 1967.