分割最適化 技法에 의한 트러스 構造物의 形狀最適化에 관한 硏究

A Study on the Geometric Optimization of Truss Structures by Decomposition Method

金 成 完*· 李 奎 遠**
Kim, Seong Wan · Lee, Gyu Won

Summary

Formulation of the geometric optimization for truss structures based on the elasticity theory turn out to be the nonlinear programming problem which has to deal with the cross-sectional area of the member and the coordinates of its nodes simultaneously.

A few techniques have been proposed and adopted for the analysis of this nonlinear programming problem for the time being.

These techniques, however, bear some limitations on truss shapes, loading conditions and design criteria for the practical application to real structures.

A generalized algorithm for the geometric optimization of the truss structures, which can eliminate the above mentioned limitations, is developed in this study.

The algorithm proposed utilizes the two-levels technique. In the first level which consists of two phases, the cross-sectional area of the truss member is optimized by transforming the nonlinear problem into SUMT, and solving SUMT utilizing the modified Newton Raphson method.

In the second level, which also consists of two phases the geometric shape is optimized utillzing the unindirectional search technique of the Powell method which make it possible to minimize only the objective functlon.

The algorithm proposed in this study is numerically tested for several truss structures with various shapes, loading conditions and design criteria, and compared with the results of the other algorithms to examine its applicability and stability. The numerical comparisons show that the two-levels algorithm proposed in this study is safely applicable to any design criteria, and the convergency rate is relatively fast and stable compared with other iteration methods for the geometric optimization of truss structures.

It was found for the result of the shape optimization in this study to be decreased greatly in the weight of truss structures in comparison with the shape optimization of the truss utilizing the algorithm proposed with the other area optimum method.

* · 忠南大學校 農科大學
** · 全北大學校 工科大學

1. 序 論

數學的 計劃法에 의한 構造物의 最適設計가 工學者들에게 많은 관심의 대상이 되어온 이래 지금까지 大部分의 最適設計는 幾何學的 形狀이 固定된 構造物의 最適化에 集中되어왔다.

그러나 幾何學的 形狀을 考慮한 最適化는 構造物의 重量, 體積, 經費를 相當히 減少시킬 수 있음을 알 수 있다. 따라서 形狀最適化가 절실히 要請되고 있다. 그러나 形狀이 固定된 最適化보다 形狀最適化는 設計變數 및 制約條件式이 增加하므로써 最適化過程도 複雜해질 뿐만 아니라 컴퓨터 容量이 커야 하고, 計算時間도 더 많이 所要된다.

이러한 어려움을 극복하기 위하여 많은 硏究를 해온 바 Dantzig-wolfe[1]는 最適化問題를 分割처리함으로써 設計變數 및 制約條件式을 縮小할 수 있는 原理를 소개하였다. 그러나 이 方法은 線形計劃問題에만 適用할 수 있는 局限된 方法이었다. Vander plants[2] 立體트러스를 two-phases斷面과 形狀으로 分離하여 分割 最適化함으로써 分割되지 않은 最適化에서 所要된 時間의 절반 정도만 所要됨을 발견하였다.

Uri Kirsch[3]는 連續보 및 交叉보(beam grid)의 最適化問題를 two-phases 最適化問題로 分割하여 各 phase에 必要한 設計變數 및 制約條件式만을 考慮한 最適化를 試圖함으로써 大形構造物의 最適化도 가능케 한 바 있다.

本 硏究에서는 文獻[2]의 理論을 트러스 構造의 形狀最適化에 適用코자 形狀이 固定된 트러스를 two-phases로 分割하여 各 phase에 必要한 設計變數 및 制約條件式만을 考慮하여 斷面 最適化를 遂行하며 이 첫 段階를 level-1이라고 한다. level-2에서는 形狀의 最適化를 위해 節點座標를 設計變數로 하여 形狀最適化를 遂行함으로써 보다 效率的으로 大型트러스構造物의 形狀最適化를 하고자 한다.

本 硏究에서 適用된 最適化過程은 文獻[3]의 理論과 Vander plants의 理論[2]을 結合한 three-phases 및 four-phases의 形狀最適化라 할 수 있겠다.

따라서 本 硏究에서는 大型트러스構造物의 形狀最適化를 위하여 three-phases 最適化技法 및 four-phases 最適化技法을 利用하여 트러스의 形態, 載荷條件, 制約條件 등의 制限을 받지않는 效率的인 大型트러스構造物의 形狀最適化 알고리즘을 提示하는데 그 目的을 두고 있다.

2. 關係文獻의 考察

構造物의 最適設計에 많은 硏究者들이 關心을 가져온 이래 수많은 硏究結果가 發表되었다.

本 硏究와 關連된 形狀最適化에 關한 內容을 要約하면 다음과 같다.

1962年 Schmit, L. A.와 Kicher, T. P.[4]는 簡單한 3部材트러스構造物의 最適形狀 및 最適材料를 Gradient Method로 誘導하였다.

1964年 Dorn, Gomory와 Greenbery[5]는 線形計劃法을 適用하여 ground structure로부터 reduced optimal structure를 誘導하였다.

1969年 Dobbs와 Felton[6]은 文獻[5]의 理論을 擴張하여 多載荷條件, 應用 및 挫拙을 實際制約條件으로 包含한 最適化型式에 Gradient Method의 技法을 適用하여 文獻[5]의 硏究結果와의 差異點에 대하여 考察하였다.

以上의 硏究中 Schmit의 理論을 除外하고 文獻[5,6]은 空間上에 節點位置를 設定하고 이 節點에 部材를 結連한 트러스構造物을 最適化하여 部材力이 零인 部材를 除去하는 方法이므로 엄밀한 意味의 形狀最適化라고는 할 수 없다.

1972, 1973年 Pedersen[7,8]은 移動限界(move-limit)를 갖는 Gradient Method에 依해 平面 및 立體트러스의 形狀最適化를 誘導하였다.

1972年 Vander plaats와 Moses[9]는 設計空間을 2部分으로 分割하여 斷面最適化와 形狀最適化를 分離하는 方法이었다.

이 硏究는 最初의 two-phases의 形狀最適化로서 phase-one에서는 stress-ratio 및 Zoutendijk의 feasible direction method를 修正한 알고리즘으로 斷面最適化한 後, phase-two에서 steepest descent method의 技法에 의해 形狀最適化問題를 다루었다.

이와같이 形狀最適化를 試圖함으로써 最適化에 必要한 計算時間을 절반정도 減少시킬 수 있음을 보여준바 있으며, 本 方法은 效率的인 最適化技法으로 思料된다.

1975年 Spillers[10]는 Friedland[11]의 硏究와 똑같은 最適化모델에 Kuhn Tucker 條件을 利用한 트러스 構造物의 形狀最適化理論을 發表하였으나 이 硏究結果로는 多載荷條件, 挫拙應力 및 變位制約을 考慮한 形狀最適化를 할 수 없기 때

문에 1980年 上記의 研究를 擴張하여 AISC示方書의 規定을 만족하는 最適解를 誘導하였다.[12]

1980年 Saka[13]는 逐次線形計劃法(SLP)의 適用으로 最適形狀을 誘導하였다.

1981年 Kanji Imai 및 Schmit, L. A.[14]는 近似法과 數學的 計劃法을 調和한 乘數法(multiplier method or primal and dual method)에 의해서 斷面 및 形狀을 同時에 最適化하였다.

1983年 Topping B. H.[15]는 80年 初 까지의 形狀最適化 現況에 對한 紹介를 하였다.

1983年 U. Kirsch와 G. Toledano[16]는 形狀의 變化가 斷面의 變化보다도 構造應答에 큰 影響을 주므로 形狀이 變함에 따라 미치는 影響을 近似化하여 形狀을 最適化할 수 있는 技法을 提示하였으며 이 技法은 大型構造物의 形狀最適設計에 效率的인 最適化技法으로 思料된다.

文獻調査結果 1975年 以前의 大部分 研究는 數學的 計劃法에 依한 最適化이었다.

數學的 計劃法은 數學的 複雜性 및 應用分野에 制限을 받고 構造物의 規模가 커짐에 따라 設計變數 및 制約條件式의 數가 增加하고 最適化 過程中 構造解析의 時間이 상당히 必要하게 되었다.

이러한 어려운 점을 극복하기 위해 1975年 以後에는 近似最適化技法[17,18]및 分割最適化[19,20]를 試圖하여 大型構造物의 最適設計에 關해서 많은 研究가 수행되고 있으며 特히 分割最適設計는 設計空間을 分割하여 設計空間의 次元을 縮小시킬 수 있도록 하는 效率的인 方法이다.

또한 設計變數間의 關係를 附與(design variable linking), 즉 同一設計變數組 形成 및 構造物의 對稱性을 導入하여 分割된 設計空間의 次元을 줄였으며 最適化過程中 Critical한 制約條件式의 數도 縮小하였다.

文獻[1]에서는 固定된 경우의 近似概念과 數學的 計劃法을 調和한 最適化技法의 使用으로 最適化의 率效을 높였다.

文獻[19]에서도 形狀이 固定된 경우의 適合方程式을 近似化하여 빨리 最適解에 收斂시키고 있다.

以上의 研究結果로부터 斷面과 形狀을 同時에 最適化는 根本的으로 서로 다른 性質을 갖는 두 種類의 變數로 設計空間을 形成한다.

이러한 變數들이 組合되면 收劍方法이 달라 最適解를 구하기 곤란하다. 따라서 本 研究에서는 斷面의 最適化와 形狀의 最適化를 獨立的으로 遂行할 수 있도록 two-level 最適化를 試圖하는 한편 level 1에서는 分割最適化로 設計變數 및 制約條件式의 數를 減少하여 大型構造物의 形狀最適化에 寄與코자 한다.

3. 分割 最適化 技法에 의한 形狀最適化 問題形式

本 研究에서는 트러스 規模에 制約을 받지않고 形狀最適化를 위하여 three phases 및 four phases의 Multiple-phase로 分割하는 Multi-phases 分割最適化技法을 試圖하였으며 이 方法을 要約하면 다음과 같다.

① Three phases의 形狀最適化

Three phases에 의한 트러스 構造物의 最適形狀을 얻기위한 一般的인 最適化 問題形式은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\text{Minimize}; W = W(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) \\
&\text{Subject to}; M_i(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) = 0 \\
&\qquad i = 1, \cdots\cdots, K \\
&\qquad G_j(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) \geq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots (3\text{-}1) \\
&\qquad j = 1, \cdots\cdots, L \\
&\vec{X}^L \leq \vec{X} \leq \vec{X}^U,\ \vec{Y}^L \leq \vec{Y} \leq \vec{Y}^U,\ \vec{Z}^L \leq \vec{Z} \leq \vec{Z}^U
\end{aligned}$$

여기서,

$\vec{X}$, $\vec{Y}$;斷面積의 設計變數

$\vec{Z}$;節點座標의 設計變數

$\vec{X}^L$, $\vec{Y}^L$; 斷面積 設計變數의 下限値

$\vec{X}^U$, $\vec{Y}^U$;斷面積 設計變數의 上限値

$\vec{Z}^L$;節點 座標 백타의 下限値

$\vec{Z}^U$;節點 座標 백타의 上限値

本研究에서는 트러스 構造物의 規模에 관계없이 용이하게 形狀最適設計를 위해 Level 1에서는 Two-phases로 分割하여 斷面을 最適化하고 Level 2에서는 Two-phases로 分割하여 形狀을 最適化하는 分割最適化 技法을 使用한다.

이경우 最適化 形式은 다음과 같다.

가. Level 1

形狀이 固定된 트러스를 Two-phases로 分割하여 最適化를 遂行하며, 設計變數는 斷面積이 된다. 이러한 分割 最適設計 計劃問題의 最適化形式은 다음과 같다.

ㄱ) Phase 1

$$\text{Minimize}\ ;\ W = W(\vec{X}, \vec{Y}_o, \vec{Z}_o)$$

$$\text{Subject to};\ H_i(\vec{X}, \vec{Y}_o, \vec{Z}_o) = 0$$

$$G_j(\vec{X},\vec{Y}_o,\vec{Z}_o) \geq 0 \cdots\cdots (3\text{-}2)$$

여기서, $\vec{X}$; phase 1에서의 設計變數

$\vec{Y}_o$; phase 1에서는 常數로 되는 設計變數

$\vec{Z}_o$; phase 1에서는 常數로 되는 設計變數

ㄴ) phase 2

Minimize ; $W=W(\vec{X}_o, \vec{Y}, \vec{Z}_o)$

Subject to ; $H_i(\vec{X}_o,\vec{Y}, \vec{Z}_o)=0$

$$G_j(\vec{X}_o, \vec{Y}, \vec{Z}_o) \geq 0 \cdots (3\text{-}3)$$

여기서

$\vec{X}_o$; phase 2에서 常數로 되는 設計變數

$\vec{Y}$; phase 2에서의 設計變數

$\vec{Z}_o$; phase 2에서는 常數로 되는 設計變數

다. Level 2

Minimize ; $W=W(\vec{X}_o, \vec{Y}_o, \vec{Z})$

Subject to ; $\vec{Z}^L \geq \vec{Z} \geq \vec{Z}^u$

여기서

$\vec{X}_o$; Level 2에서는 常數로 되는 設計變數

$\vec{Y}_o$; Level 2에서는 常數로 되는 設計變數

$\vec{Z}$; Level에서의 設計變數

② Four-phases에 依한 트러스 構造物의 最適形狀을 얻기위한 最適化問題形式은 다음과 같다.

Minimize ; $V=V(\vec{W}, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$

Subject to ; $H_i(\vec{W}, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})=0$
$G_j(\vec{W}, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})=0$

$$\vec{W}^L \leq \vec{W} \leq \vec{W}^U$$
$$\vec{X}^L \leq \vec{X} \leq \vec{X}^U$$
$$\vec{Y}^L \leq \vec{Y} \leq \vec{Y}^U$$
$$\vec{Z}^L \leq \vec{Z} \leq \vec{Z}^U$$

$i=1, \cdots\cdots, K, \ j=1, \cdots\cdots, L$

여기서

$\vec{W}, \ \vec{X}$; 部材斷面벡타

$\vec{Y}, \ \vec{Z}$; 節點座標벡타

$\vec{W}^L, \ \vec{X}^L$; 部材斷面벡타의 下限値

$\vec{W}^U, \ \vec{X}^U$; 部材斷面벡타의 上限値

$\vec{Z}^L$; 節點座標벡타의 下限値

$\vec{Z}^U$; 節點座標 벡타의 上限値

本 硏究에서는 트러스 構造物의 形狀最適 化를 용이하게 하기위해 分割 最適化 技法을 使用한다. 이 경우의 最適化問題 型式은 다음과 같다.

가. Level 1

形狀이 固定된 트러스의 Two-phases 最適化이므로 設計變數는 斷面積이 되며 트러스 構造物을 2 部分의 最適化 對象 構造物로 分割한다. 이러한 最適設計計劃問題의 最適化 形式은 다음과 같다.

ㄱ) Phase 1

Minimize; $V=V(\vec{W}, \vec{X}_o, \vec{Y}_o, \vec{Z}_o)$

Subject to; $H_i(\vec{W}, \vec{X}_o, \vec{Y}_o, \vec{Z}_o)=0$

$$G_i(\vec{W}, \vec{X}_o, \vec{Y}_o, \vec{Z}_o) \geq 0$$

여기서 $\vec{W}$; paase 1에서의 設計變數

$\vec{X}_o$; phase 1에서의 常數로 되는 設計變數

$\vec{Y}_o$; phase 1에서의 常數로 되는 設計變數

$\vec{Z}_o$; phase 1에서의 常數로 되는 設計變數

ㄴ) Phase 2

Minimize ; $V=V(\vec{W}_o, \vec{X}, \vec{Y}_o, \vec{Z}_o)$

Subjectto ; $H_i(\vec{W}_o, \vec{X}, \vec{Y}_o, \vec{Z}_o)=0$

$$G_j(\vec{W}_o, \vec{X}, \vec{Y}_o, \vec{Z}_o) \geq 0$$

여기서,

$\vec{W}_o$;phase 1에서 常數로 되는 設計變數

$\vec{X}$;phase 2에서의 設計變數

$\vec{Y}_o$;phase 1에서 常數로 되는 設計變數

$\vec{Z}_o$;phase 1에서 常數로 되는 設計變數

나. Level 2

ㄱ) Phase 3

Minimize ; $V=V(\vec{W}_o, \vec{X}_o, \vec{Y}, \vec{Z}_o)$

Subject to ; $\vec{Y}^L \leq \vec{Y} \leq \vec{Y}^U$

여기서,

$\vec{W}_o$; phase 3에서 常數로 되는 設計變數

$\vec{X}_o$; phase 3에서 常數로 되는 設計變數

$\vec{Z}_o$; phase 3에서 常數로 되는 設計變數

$\vec{Y}^L$; phase 3에서 設計變數의 下限値

$\vec{Y}^U$; phase 3에서 設計變數의 上限値

ㄴ) Phase 4

Minimize ; $V = V(\vec{W}_o, \vec{X}_o, \vec{Y}_o, \vec{Z})$

Subject to ; $\vec{Z}^L \leq \vec{Z} \leq \vec{Z}^U$

여기서,

$\vec{W}_o$; phase 4에서 常數로 되는 設計變數

$\vec{X}_o$; phase 4에서 常數로 되는 設計變數

$\vec{Y}_o$; phase 4에서 常數로 되는 設計變數

$\vec{Z}^L$; phase 4에서 設計變數의 下限値

$\vec{Z}^U$; phase 4에서 設計變數의 上限値

4. 最適化모델

4-1. 目的函數

m個의 部材로 이루어진 트러스構造物의 重量을 最小化하기 위한 目的函數는 메트릭스로 表現하면 다음과 같다.

(1) Phase 1

$$M_1(\vec{W}) = \{W_1\}^T \{L_1\} \cdots\cdots (4\text{-}1)$$

여기서, $\{W_1\} = (LR \times 1)$ 部材斷面積 메트릭스

k= Phase 1에서 考慮되는 部材數

$\{L_1\} = (k \times 1)$의 部材길이 메트릭스

(2) Phase 2

$$M_2 = (\vec{W}) = \{W_2\}^T \{L_2\} \cdots\cdots (4\text{-}2)$$

여기서, $\{W_2\} = (j \times 1)$의 部材斷面積 메트릭스

j= Phase 2에서 考慮되는 部材數

$\{L_2\} = (j \times 1)$의 部材길이 메트릭스

4-2. 制約條件

(1) 應力制約條件式

變位法으로 構造解析할 경우 應力制約條件式은 다음과 같이 表示할 수 있다.

① Phase 1

$$\{\sigma_{ca}\} \leq [D_1][T_1][K][\beta]([\beta]^T[K][\beta])^{-1}\{A\} \leq \{\sigma_{ta}\} \cdots\cdots (4\text{-}3)$$

여기서, $\{\sigma_{ca}\}$ = 許容壓縮應力 메트릭스

$\{\sigma_{ca}\} = (k \times 1)$의 許容引張應力 메트릭스

$$[D_1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & \frac{1}{A_k} \end{bmatrix}_{(k \times k)}$$

A_i = i 部材의 斷面積

$[T_1] = [[T_{11}], [T_{12}]]$

$$[T_{11}] = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(k \times k)}$$

$$[T_{12}] = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(k \times (m-k))}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & K_i & \vdots \\ 0 & \cdots & K_m \end{bmatrix}_{(m \times m)}$$

$$K_i = \frac{A_i E_i}{L_i}$$

L_i = i 番째 部材의 길이

E_i = i 番째 部材의 彈性係數

$[\beta]^T = (n \times m)$ 相連結關係메트릭스

n = 自由度數

T= 메트릭스의 轉置

$\{A\} = (n \times 1)$의 節點荷重메트릭스

② Phase 2

$$\{\sigma_{ca}\} \leq [D_2][T_2][\bar{K}][\beta]([\beta]^T[\bar{K}][\beta])^{-1}\{A\} \leq \{\sigma_{ta}\} \cdots\cdots (4\text{-}4)$$

$$[D_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{A_j} \end{bmatrix}_{(j \times j)}$$

$[T_2] = [[T_{21}], [T_{22}]]$

$$[T_{21}] = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{[j\times(m-j)]}$$

$$[T_{22}] = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(j\times j)}$$

4-3. 捉掘應力制約條件式

(1) Euler의 挫掘應力制約條件式

① Phase 1

$$[C_1]\{\theta\} - [D_1][T_1][\tilde{K}][\beta]\,[([\beta]^T[\tilde{K}][\beta])^{-1}\{A\} \geqq \{0\} \quad \cdots\cdots (4\text{-}5)$$

여기서, $\{\sigma_B\} = (f_{1\times1})$의 挫掘應力메트릭스

f_1 = Phase 1 의 壓縮部材數

$$[C_1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{A_{f_1}} \end{bmatrix}_{(j\times j)}$$

$$\{\theta_i\} = (\theta_1, \cdots\cdots, \theta_i, \cdots\cdots, \theta_{f_1})^T$$

$$\theta_i = \frac{\pi^2 E\alpha_1 A_i}{L_i^2}$$

$\alpha_1 = 1.34$ 文獻[7]參照

② Phase 2

$$[C_2]\{A_2\} - [D_1][T_1][\tilde{K}][\beta]\,(([\beta]^T[\tilde{K}][\beta]))^{-1}\{A\} \geqq \{0\} \quad \cdots\cdots (4\text{-}6)$$

여기서, $\{\sigma_B\} = (f_{2\times1})$의 挫掘應力메트릭스

f_2 = Phase 2 의 壓縮部材數

$$[C_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{A_{f_2}} \end{bmatrix}$$

$$\{\theta_2\} = (\theta_1, \cdots\cdots, \theta_{f_2})^T$$

(2) 道路橋標準示方書의 挫掘應力制約條件式

① Phase 1

$$\{\sigma_{cB}\} - (C_1)[T_1][\tilde{K}]\,(([\beta]^T[\tilde{K}][\beta]^{-1}\{A\} \geqq \{0\} \quad \cdots\cdots (4\text{-}7)$$

여기서, $\{\sigma_{cB}\} = (f_{1\times1})$의 示方書에서 規定하는 許容挫掘應力메트릭스

$\sigma_{cBi} = a_i + b_i(L_i/e_i A_i \alpha)$

a_i, b_i, e_i = 示方書에서 規定하는 係數

α = 文獻[7]에서 주어지는 常數

② Phase 2

$$\{\sigma_{cB}\} - [C_2][T_2][\tilde{K}][\beta]\,(([\beta]^T[\tilde{K}][\beta]))^{-1}\{A\} \geqq \{0\} \quad \cdots\cdots (4\text{-}8)$$

$\{\sigma_{cB}\} = (f_{2\times1})$의 示方書에서 規定하는 許用挫掘應力메트릭스

4-4. 變位制約條件式

變位制約條件式을 메트릭스 形態로 表現하면 다음과 같다.

(1) Phase 1

$$\{q_a\} - \{q\} \geqq \{0\} \quad \cdots\cdots (4\text{-}9)$$

여기서, $\{q_a\} = (n\times 1)$의 節點許用範圍 메트릭스

$\{q_1\} = (q_{11}, q_{1i}, \cdots\cdots q_{1e})_T$ = Phase 1에서의 變位

$$q_{1i} = \{(A_1)[E_1][L_1][T_1]^T\{F^i_{\theta_1}\}[T_1][\tilde{K}][\beta]\,(([\beta]^T[\tilde{K}][\beta])^{-1} + (A_2)[E_2][L_2][T_2]^T[F^i_{\theta_2}][T_2][\tilde{K}][\beta]\,(([\beta]^T[\tilde{K}][\beta])^{-1}\}\{A\} \cdots\cdots$$

여기서, $(A_1) = \frac{1}{A_1} \cdots\cdots \frac{1}{A_k} \quad (1\times k)$

$[E_1]$ = 各部材의 彈性係數메트릭스

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{E_k} \end{bmatrix}_{(k\times k)}$$

$$[L_1]=\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{L_i} \end{bmatrix}(k\times k)$$

$\{F^i_{\theta_1}\}$ = Phase 1에서 i番째 變位方向의 單位荷重으로 인한 $(1\times k)$ 部材力메트릭스

(2) Phase 2

$$\{q_a\}-\{q_2\}\geq 0 \cdots\cdots (4\text{-}10)$$

여기서, $\{q_2\}=(q_{21},\cdots\cdots q_{2i},\cdots\cdots q_{2\ell})^T$

$$q_{2i}=\{(A_1)[E_1][L_1][T_1]^T\}F^i_{\theta_1}\}[T_1][K][\beta][([\beta]^T[\widetilde{K}][\beta])^{-1}+(A_2)[E_2][L_2][T_2]^T\{F^i_{\theta_2}\}[T_2][\widetilde{K}][\beta]([\beta]^T[\widetilde{K}][\beta])^{-1}\}\{A\} \cdots\cdots (4\text{-}11)$$

$$(A_2)=\left(\frac{1}{A_1}\cdots\cdots\frac{1}{A_i}\right)(1\times j)$$

$$[E_2]=\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{E_i} \end{bmatrix}(j\times j)$$

$$[L_2]=\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{L_k} \end{bmatrix}(j\times j)$$

$\{F^i_{\theta_2}\}_{(1\times i)}$ = Phase 2에서 i番째 變位方向의 單位荷重으로 인한 $(1\times j)$ 部材力메트릭스

4-5. 設計變數限界制約條件式

$$\{X^L\}\leq\{X\}\leq\{X^U\} \cdots\cdots (4\text{-}11)$$

여기서, $\{X^L\}$ = 設計變數 下限値메트릭스

$\{X^U\}$ = 設計變數 上限値메트릭스

지금까지 誘導된 應力制約條件式(4-3) 및 (4-4), 挫掘應力制約條件式(4-5) 및 (4-6), 變位制約條件式(4-9) 및 (4-10), 設計變數限界制約條件式(4-11), 및 目的函數를 多載荷條件式과 함께 綜合하면 다음과 같다.

① Phase 1

Minimize: $M_1(W)=\{W_1\}^T\{L_1\}$

Subject to: $\{\sigma_a\}-[D_1][T_1][\widetilde{K}][\beta]([\beta]^T[\widetilde{K}][\beta])^{-1}\{A\}^{NL}\geq\{0\}$

$[D_1]\{\theta_1\}-[C_1][T_1][\beta][([\beta]^T[\widetilde{K}][\beta])^{-1}\{A\}^{NL}$

or $\{\sigma_{cB}\}-[C_1][T_1][\widetilde{K}][\beta]([\beta]^T[\widetilde{K}][\beta])^{-1}\{A\}^{NL}\geq\{0\} \cdots (4\text{-}12)$

$\{q^a\}-\{q\}^{NL}\geq\{0\}$

$\{X\}-\{X^L\}\geq\{0\}$

$\{X^U\}-\{X\}\geq\{0\}$

② Phase 2

Minimize: $M^2(W)=\{W_2\}^T\{L_2\}$

Subject to: $\{\sigma_a\}-[D_2][T_2][\widetilde{K}][\beta]([\beta]^T[\widetilde{K}][\beta])^{-1}\{A\}^{NL}\geq\{0\}$

$[D_2]\{\theta_2\}-[D_2][T_2][\widetilde{K}][\beta]([\beta]_T[\beta])^{-1}\{A\}^{NL}$ or $\{\sigma_{cB}\}-[C_2][T_2][K][\beta]([\beta]_T[\beta])^{-1}\{A\}^{NL}\geq\{0\} \cdots\cdots (4\text{-}13)$

$\{q^a\}-\{q\}^{NL}\geq\{0\}$

$\{X\}-\{X^L\}\geq\{0\}$

$\{X^U\}-\{X\}\geq\{0\}$

여기서, NL: 載荷條件數

5. SUMT法에 의한 斷面最適化

式(4-12) 및 (4-13)의 最適化問題를 SUMT計劃問題로 變形하면 다음과 같은 interior penalty function을 얻는다.

5-1. Phase 1

$$\text{Minimize: } W_1(\vec{w}_1,\vec{k})=\{w_1\}+R_j\left(\sum_{NL=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}G_{1i}^{NL}+\sum_{k=1}^{j_1}\frac{1}{G_{2k}^{NL}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{G_{3i}^{NL}}\right) \cdots\cdots (5\text{-}1)$$

여기서, R_j: j番째 反部에서의 Penalty Parameter $\sum_{i=1}^{k}G_{1i}^{NL}$, $\sum_{k=1}^{j_1}G_{2k}^{NL}$, $\sum_{i=1}^{n}G_{3i}^{NL}$을 벡터적으로 $\{G_{v_1}\}_1$, $\{G_{v_2}\}_1$, $\{G_{v_3}\}_1$로 表現하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix}\{G_{v_1}\}_1\\ \{G_{v_2}\}_1\\ \{G_{v_3}\}_1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{\sigma_a\}-[D_1][T_1][\widetilde{K}][\beta]([\beta]^T[\widetilde{K}][\beta])^{-1}\{A\}^{NL}\\ \text{or } [D_1]\{\theta_1\}-[D_1][T_1][\widetilde{K}][\beta]([\beta]^T[\widetilde{K}][\beta])^{-1}\{A\}^{NL}\\ \{\sigma_{cB}\}-[D_1][T_1][\widetilde{K}][\beta]([\beta]^T[\widetilde{K}][\beta])^{-1}\{A\}^{NL}\\ \{q_a\}-\{q\}^{NL}\end{Bmatrix} \cdots\cdots (5\text{-}2)$$

5-2. Phase 2

$$\text{Minimize}: W_2(\vec{w}_2, \vec{R}) = \{W_2\}^T\{L_2\} + R_j$$

$$\left(\sum_{NL=1}^{NL} \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{G_{1l}^{NL}} + \sum_{k=1}^{f_2} \frac{1}{G_{2k}} + \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{G_{3l}} \right) \quad (5\text{-}3)$$

$\sum_{l=1}^{k} G_{1l}^{NL}$, $\sum_{l=1}^{f2} G_{3l}^{NL}$을 벡터적으로 $\{G_{v_1}\}_2$, $\{G_{v_2}\}_2$, $\{G_{v_3}\}_2$로 表現하면 다음과 같다.

$$\left\{ \begin{array}{l} \{G_{v_1}\}_2 \\ \{G^{v_2}\}^2 \\ \\ \\ \\ \\ \{G_{v_3}\}_2 \end{array} \right\} = \text{or} \left\{ \begin{array}{l} \{\sigma_c\} - [D_2][T_2][K][\beta] \\ ([\beta]^T[\widetilde{K}][\beta])^{-1}\{A\}^{NL} \\ [D^2]\{\theta^2\} - [D^2][T^2][\widetilde{K}] \\ [\beta]([\beta]^T[\widetilde{K}])^{-1}\{A\}^{NL} \\ \{\sigma^{CB}\} - [D_2][T_2][\widetilde{K}][\beta] \\ ([\beta]^T[\widetilde{K}][\beta])^{-1}\{A\}^{NL} \\ \{q_a\} - \{q\}^{NL} \end{array} \right\} \cdots (5\text{-}4)$$

6. 最適化 알고리즘

Level 1의 two-phases에서 사용하는 SUMT法 및 Level 2의 Powell Method의 一方向探査法에 의해 目的函數만이 最小가 되도록 트러스 構造物의 形狀을 最適化하는 綜合的인 알고리즘은 다음과 같이 요약할 수 있다.

Step 1 : 分割된 構造選擇

Step 2 : 斷面의 初期値 $\{X_0\}$ 附與

Step 3 : 斷面의 初期値 또는 反復試行中얻은 斷面이 實行可能領域에 있는지를 檢査한다. 反復試行中 얻은 斷面이 實行可能領域에 있으면 다음 단계로 진행하나 그렇지 않으면 實行可能領域의 設計點으로 變換한다.

Step 4 : 다음의 設計點 $\{X^{r+1}\}$을 찾기 위한 Modified Newton-Raphson Method의 反復試行

$\{X^{r+1}\} = \{X^r\} - \{\beta^r\}$

로부터 收斂値를 求한다.

Step 5 : 앞 過程에서 Phase 1이 收斂하면 Phase 2로 進行이 되나 그렇지 않으면 Step 4로 되돌아 간다.

Step 6 : 앞 過程의 收斂限界値를 代入한 目的函數만 가지고 Powell Method의 一方向探査法에 의해 目的函數만이 最小가 되도록 座標를 수정해 나간다. 目的函數값이 收斂하거나 許用反復回數에 도달하면 정지하나 그렇지 않으면 Step 2로 되돌아 간다. 이 때에는 K=1로 하여 反復試行을 시작함.

이상의 過程에 관한 flow-chart는 Fig. 6-1과 같다.

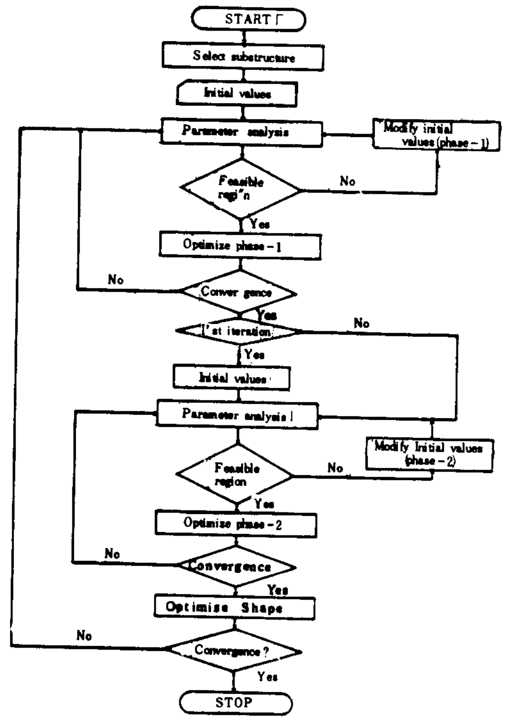


Fig. 6-1. 形狀最適化 flow chart

7. 數値例 및 結果分析

7-1. 本 硏究結果와 他 硏究結果와의 比較

本 硏究에서 提案된 알고리즘의 收斂性을 分析하기 위하여 이미 發表된 트러스의 形狀最適化알고리즘에서 比較的 重要하다고 볼 수 있는 文獻[9]의 Two-phases 技法 即, 11部材 트러스에 對하여 phase 1에서는 stress ratio와 phase 2에서는 Steepest Descent Method를 使用하여 트러스의 形狀最適化한 硏究의 結果, 文獻[14] 即, 近似技法을 利用하여 18部材 트러스의 形狀最適化한 硏究의 結果 및 文獻[21]의 Two-phases技法 即, phase 1에서는 Modified-Raphson, phase 2에서는 Rosenbrock Method를 利用하여 7部材 트러스의 形狀最適化한 硏究의 結果를 比較한다.

文獻[9] 및 文獻[21]에서 適用한 Fig. 7-1(a)의 11

Table-7-1. 11部材 트러스(第1型)에 對한 設計條件

區分	條件	節 點	11部材 트러스(第1型)
載 荷 條 件	載荷條件의 種類	節 點	11部材 트러스(第1型)
	單一載荷條件(16)	4	-2×10^4
制 約 條 件	應 力 制 約(Psi)		$-2\times10^4 \leq \sigma_a \leq 2\times10^4$
	挫掘應力制約(Psi)		−
	變 位 制 約(in)		−
彈 性 係 數(Psi)			10^7
單 位 重 量(1b/in³)			0.1

Table-7-2. 文獻[9]및 文獻[21]의 構造模型의 適用 알고리즘

構 造 形 態	文獻 9)의 研究		文獻 21)의 研究		本 研 究			
	Phase 1	Phase 2	Phase 1	Phase 2	Level 1		Level 2	
					Phase 1	Phase 2	Phase 1	Phase 2
11 部 材 트 러 스	Stress-ratio	Steep-est	Modifi-ed	Rosen-brock	Modified		Powell	
	Feasible direction	Descent	Newton Raphson		Newton Raphson			

Table-7-3. 文獻[9] 文獻[21]및 本 研究의 結果

制約條件	反復回數	文獻 a)의 研究結果	文獻 21)의 研究			本 研究의 結果	
						3 phases 의 技法	4 phases 의 技法
單一載荷 條件 許容應力 制約	初 期 値	79.7120	79.7128	140.4067	237.2723	140.41	140.41
	形狀이 固定된 경우	80.0	80.0481	80.0480	80.0480	81.06	81.06
	1		65.3767	65.3767	65.3767	72.49	68.93
	2	62.5	65.3767	65.3767	65.3767	67.43	65.72
	3					64.89	63.96
	4					63.37	62.86
	5					62.41	62.12
	6					61.77	

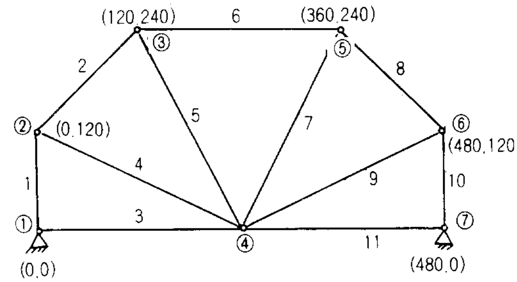
部材트러스의 設計條件은 Table-7-1,適用 알고리즘은 Table-7-2와 같고 適用 構造에 對한 文獻[9] 및 文獻[21]의 研究와 本 研究의 比較는 Table-7-3에 本 研究의 3 phase 技法에 의한 最適解는 Table-7-4에 收錄되어 있고 그 結果를 표시하면 Fig. 7-1(b), Fig. 7-2와 같으며 文獻[9] 및 文獻[21] 의 結果를 圖示하면 Fig. 7-3과 같다.

7-2 文獻[21]에서 適用한 Fig. 7-4(a)의 7部材트러스의 設計條件은 Table-7-5, 適用 알고리즘은 Table-7-6과 같고 適用構造에 對한 文獻[21]의 研究와 本 研究의 比較는 Table-7-7에, 本 研究의 3phases 技法에 依한 最適解는 Table-7-8에 收斂되어 있으며 그 結果를 圖示하면 Fig.7-4(b) 및 Fig. 7-5와 같고 本 研究의 4phases 技法에 依한 最適解는 Table-7-9에 收錄되어 있고 그 結果를 圖示하면 Fig.7-6 및 Fig. 7-7과 같으며 文獻[21]의 結果를 圖示하면 Fig.7-8과 같다.

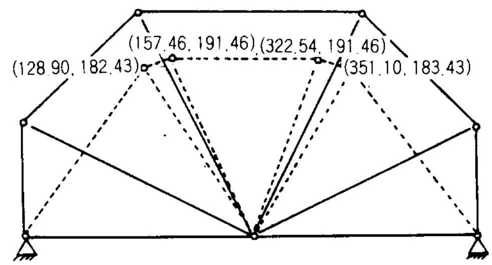
7-3 文獻[14]에서 適用한 Fig. 7-9(a)의 18部材트러스의 設計條件은 Table-7-10, 適用 알고리즘은 Table-7-11과 같고 適用構造에 對한 文獻[14]의 研究와 本 研究의 比較는 Table-7-12에, 本 研究의 3phases 技法에 依한 最適解는 Table-7-13에 收錄되어 있으며 그 結果를 圖示하면 Fig. 7-9(b) 및 Fig.7-10과 같은며 文獻[14]의 結果를 圖示하면 Fig. 7-11과 같다.

Table-7-4. 本研究의 3phases 알고리즘에 의한 11部材 트러스의 計算結果値

Level	Level 1															Level 2									
Phases	Phase 1							Phase 2								Phase 3									
																節點									
																	2		4		5		6		
反復回數 \ 部材	1	2	3	4	5	6	7	目的函數	5	6	7	8	9	10	11	目的函數	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	目的函數
初期値	1	1	0.01	0.5	0.5	1.	0.5	95.62	0.5	1	0.5	1	0.5	1	0.01	95.62	0	120	120	240	360	240	480	120	140.41
形狀이 固定된 경우	0.5	0.47	0	0.37	0.87	0.5	0.37	56.00	0.37	0.50	0.37	0.47	0.37	0.5	0	56.00	0	13	120	240	360	240	480	120	81.06
1 回	0.54	0.49	0	0.14	0.44	0.5	0.44	53.53	0.44	0.50	0.44	0.49	0.14	0.54	0	53.53	79.75	120	187.00	240	293	240	400.25	120	72.49
2 回	0.57	0.53	0	0.19	0.36	0.5	0.36	46.34	0.36	0.50	0.36	0.53	0.19	0.58	0	46.34	104.80	168.44	183.27	237.23	296.73	237.23	375.20	168.44	67.43
3 回	0.6	0.56	0	0.19	0.35	0.54	0.35	44.22	0.35	0.54	0.35	0.56	0.19	0.59	0	44.22	115.05	175.79	174.25	220.36	305.75	220.36	364.95	175.77	64.89
4 回	0.61	0.58	0	0.20	0.34	0.57	0.34	43.11	0.34	0.57	0.34	0.58	0.20	0.61	0	43.11	121.39	179.55	167.16	207.53	312.84	207.53	358.61	179.65	63.37
5 回	0.63	0.60	0	0.20	0.34	0.60	0.34	42.44	0.34	0.60	0.34	0.60	0.20	0.63	0	42.44	125.92	181.91	161.75	198.29	318.25	198.29	374.08	181.41	62.41
6 回	0.64	0.62	0	0.20	0.34	0.62	0.34	42.00	0.34	0.63	0.34	0.62	0.20	0.64	0	42.00	128.90	183.43	157.46	191.46	322.54	191.46	351.10	183.43	61.77



(a) 文獻[9]의 構造模型



(b) 本 研究의 最適形狀

Fig. 7-1. 文獻[9]의 構造模型 및 本研究의 最適形狀

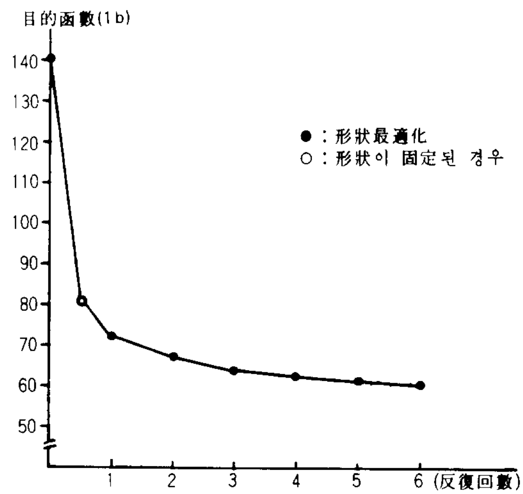
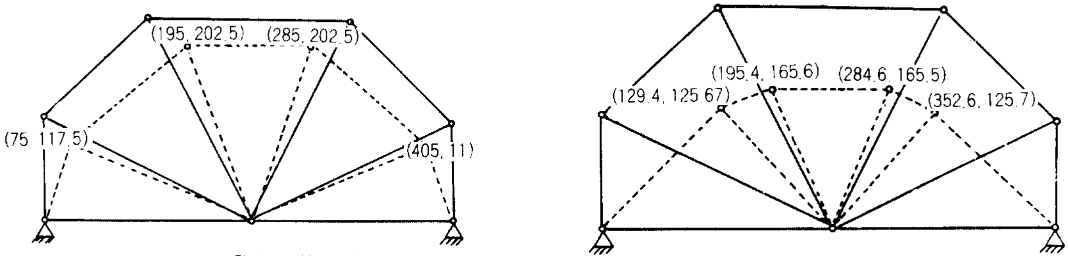


Fig. 7-2. 反復回數에 따른 函數

7-4. 23部材 트러스

形狀最適化를 위해 本 硏究의 3phase 및 4phase 알고리즘이 適用될 23部材트러스 (Fig.7-12(a))의 載荷條件 및 制約條件은 Table-7-14, 3phase 알고리즘을 適用할 경우의 反復回數에 對한 目的函數



(a) 文獻[9]의 研究結果　　(b) 文獻[21]의 研究結果

Fig. 7-3. 文獻[9], 文獻[21] 의 研究結果

値 및 反復回數에 따른 形狀은 Table-7-15에 나타냈으며 反復回數에 對한 目的函數値를 圖示하면 Fig. 7-13과 같고 最適形狀은 Fig. 7-12(b)와같다.

또한 4phase 알고리즘을 適用했을 경우 反復回數에 對한 目的函數値 및 反復回數에 따른 形狀은 Table-7-16에 나타냈으며 反復回數에 對한 目的函數値를 圖示하면 Fig. 7-14와 같고 最適形狀은 Fig. 7-15와 같다.

Table-7-5. 7 部材 트러스의 載荷條件 및 制約條件別 分類

	載荷條件의 分類	節點	case 1	case 2	case 3	case 4
載荷條件	第1 載荷條件(kg)	3	-7×10^5	-7×10^5	-7×10^5	-7×10^5
	第2 載荷條件(kg)	4	-7×10^5			-5×10^5
		2	-5×10^5			-5×10^5
制約條件	應力制約(kg/cm²)	$-2000\leq\sigma_a\leq2000$		$-1400\leq\sigma_a\leq1400$		
	挫掘應力制約(kg/cm²)			鋼道路橋示方書		
	變位制約(cm)	$\delta_4\leq1.4$		$\delta_a\leq1.4$		
彈性係數 (kg/cm²)		2.1×10^6				

本研究에서 挫掘應力制約은 SS41 材種을 使用하였음

Table-7-6. 文獻[21] 및 本研究의 構造模型에 適用 알고리즘

構造形態	文獻[21]의 研究		本研究			
			Level 1		Level 2	
	Phase 1	Phase 2	Phase 1	Phase 2	Phase 3	Phase 4
7 部材 트러스	Modified Newton Raphson	Rosenbrock	Modified Newton Raphson		Powell	

Table-7-7. 文獻[21] 및 本 研究의 結果

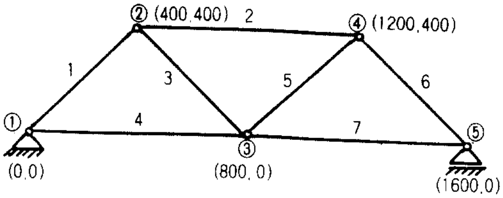
制約條件	反復回數	文獻[21]의 研究結果	本 研究의 結果	
			3phases 技法	4phases 技法
單一載荷條件 許容應力條件	初期値	3,730,193.00	3,730,193.00	3,730,193.00
	形狀이 固定된 경우	1,359,999.25	1,359,999.28	1,359,999.88
	1	1,153,083	1,153,088.09	1,153,083.34
	2	1,153,083	1,153,082.85	1,153,083.06
	3		1,153,088.09	

Table-7-8. 本 研究의 3phases 알고리즘에 의한 7部材 트러스의 計算結果値

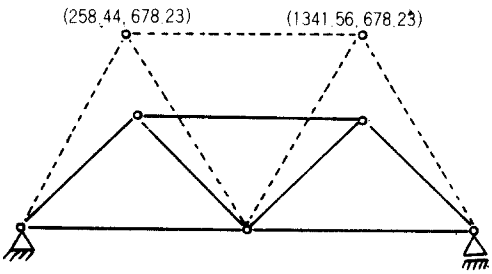
Level	Level 1										Level 2				
Phases	Phase 1					Phase 2					Phase 3				
	部材										節點				
反復回數	1	2	3	4	目的函數	4	5	6	7	目的函數	2 X	2 Y	4 X	4 Y	目的函數
初期値	800.	800	800	800	2,185,096.50	800	800	800	800	2,185,096.50	400	400	1200	400	3,730,193.00
形狀이 固定된 경우	353.55	349.99	247.78	249.99	819,999.85	249.99	247.48	353.55	249.99	739,991.54	400	400	1200	400	1,359,999.28
1 回	267.67	207.00	224.14	95.65	688,585.42	95.65	224.14	267.67	95.65	541,022.68	258.76	676.29	1341.24	400	1,153,088.09
2 回	267.58	206.43	223.88	95.40	688,258.57	95.40	223.88	267.58	95.40	541,144.31	258.82	678.18	1341.18	400	1,153,082.75
3 回	267.67	207.00	224.14	95.65	688,585.42	95.65	224.14	267.67	95.65	541,022.68	258.76	676.29	1341.24	400	1,153,088.09

Table-7-9. 本研究의 4phases 알고리즘에 의한 7部木트러스 計算結果値

Level	Level 1										Level 2								
Phases	Phase 1					Phase 2					Phase 3				Phase 4				
	部材										節點				節點				
反復回數	1	2	3	4	目的函數	4	5	6	7	目的函數	2 X	2 Y	4 X	4 Y	2 X	2 Y	4 X	4 Y	目的函數
初期値	800.	800	800	800	2,185,096.5	800	800	800	800	2,185,096.5	400	400	1200	400	400	400	1200	400	3,730,193.00
形狀이 固定된 경우	353.55	349.99	247.48	250	820,000.02	250	247.48	353.55	249.99	739,999.99	9004	400	1200	400	400	400	1200	400	1,359,999.88
1 回	267.58	206.38	223.87	95.38	688,235.15	95.38	223.87	267.58	95.38	541,152.28	258.82	400	1341.18	400	258.82	678.32	1341.18	678.32	1,153,083.34
2 回	267.58	206.38	223.87	95.38	688,235.16	95.38	223.87	267.58	95.38	541,151.99	258.82	678.32	1341.18	678.32	258.82	678.32	1341.18	678.32	1,153,083.06



(a) 文獻[21)]의 構造模型



(b) 本 研究의 最適形狀

Fig. 7-4. 文獻[21)]의 構造形狀 및 本 研究의 最適形狀

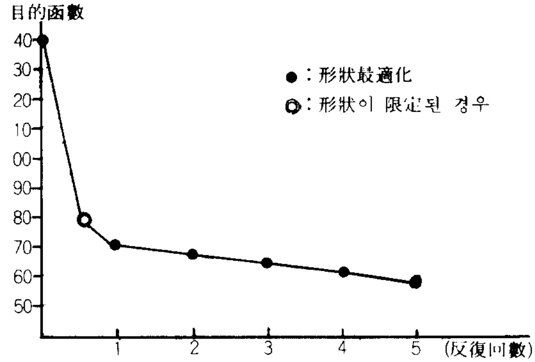


Fig. 7-6. 反復回數에 따른 目的函數

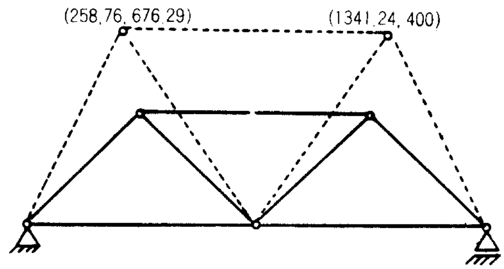


Fig. 7-7. 本 研究의 最適形狀

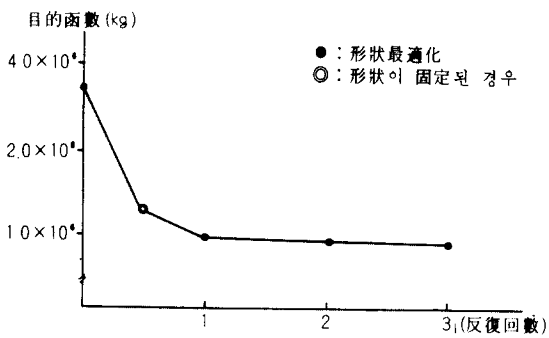


Fig. 7-5. 反復試行에 따른 目的函數 (Case 1)

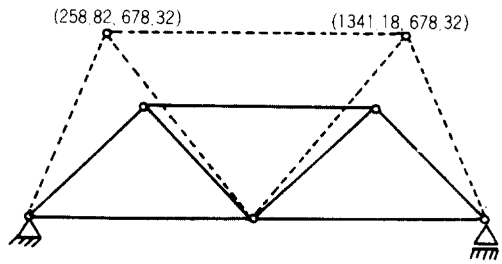


Fig. 7-8. 文狀[21)]의 研究結果

Table-7-10. 18部材 트러스의 設計條件

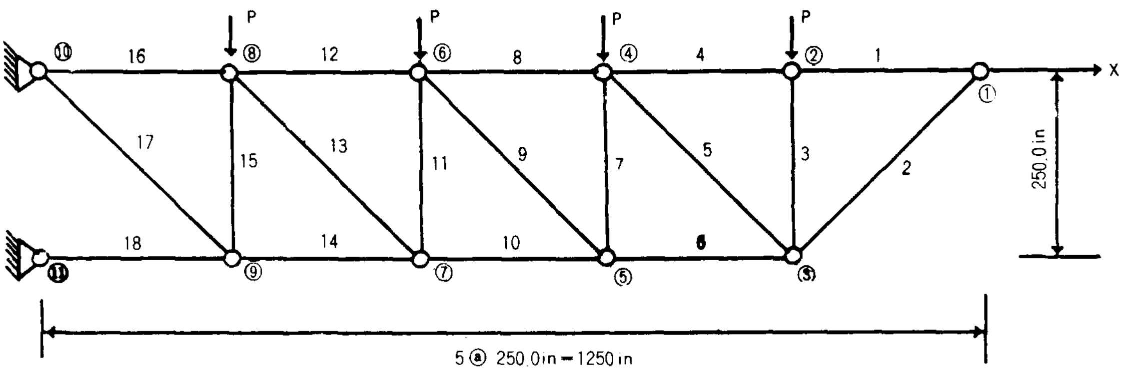
	載荷條件의 種類	節 點	X方向 荷重	Y方向 荷重
載 荷 條 件	第一載荷條件(1b)	1		−20,000
		2		−20,000
		4		−20,000
		5		−20,000
		8		−20,000
應力制約 (Psi)	$-20,000 \leq \sigma_a \leq 20,000$			
挫屈應力 (Psi)	$\sigma_{ib} = -K_i \frac{A_i}{L_i^2}$ · $K_i = 0.4\times10^{-8}$ Psi			
彈性係數 (Psi)	0.1×10^{8}			
單位重量 (1b/in³)	0.1			

Table-7-11. 文獻[14]의 構造模型에 適用 알고리즘

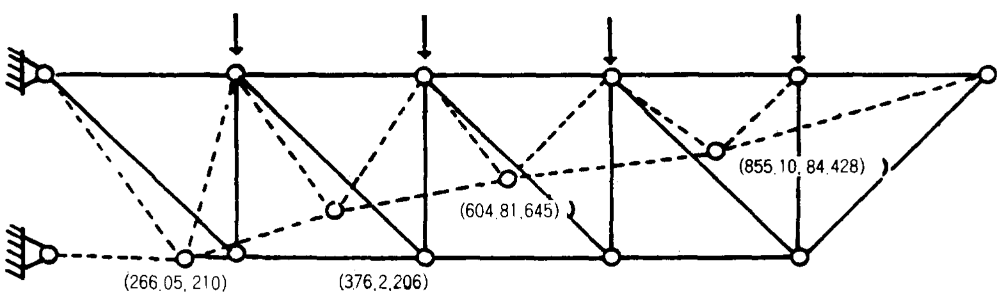
構 造 形 態	文獻[14]의 硏究	本 硏究	
18部材 트러스	近 似 技 法	Level 1	Level 2
		Phase 1 Phase 2	Phase 3
		Modified Newton Raphson	Powell

Table-7-12. 文獻[14]의 硏究 및 本 硏究結果

制 約 條 件	反 復 回 數	文獻[14]의 硏究結果	本硏究의 結果
單一載荷條件	初 期 値		5,621.318
	形狀이 固定된 경우	6,430	5,180.37
許容應力 및	1	4,667.9	5,064.53
挫 屈 應 力	2		5,064.53
	3		5,064.53



(a) 文獻[14]의 構造模型



(b) 本 硏究의 最適形狀

Fig. 7-9. 文獻[14]의 構造模型 및 本 硏究의 最適形狀

Table-7-13. 本 研究의 3phases 알고리즘에 의한 18部材 트러스의 計算結果値

Level	Level 1						Level 2									
Phases	Phase 1			Phase 2			Phase 3									
部材							節點座標									
							3		5		7		9			
反復回數	$A_1=A_4=A_9=A_{12}=A_{16}$	$A_2=A_6=A_{10}=A_{14}=A_{18}$	目的函數	$A_3=A_7=A_{11}=A_{15}$	$A_5=A_9=A_{13}=A_{17}$	目的函數	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	目的函數
初期値	10	10	2,810.659	10	10	2,810.659	1,000	250	750	250	500	2 5 0	250	250	5,621.318
形狀이 固定된 경우	9.999	15.0	2,405.348	10	7.07	2,775.023	1,000	250	750	250	500	250	250	250	5,180.37
1 回	11.521	17.938	2,563.32	12.15	4.43	2,501.21	855.10	84.428	604.81	145.0	376.2	206.0	266.05	210.0	5,064.53
2 回	11.521	17.938	2,563.32	12.15	4.43	2,501.21	855.10		604.81	145.0	367.2	206.0	266.05	210.0	5,064.53
3 回	11.521	17.938	2,563.32	12.15	4.43	2,501.21	855.10		604.81	145.0	376.2	206.0	266.05	210.0	5,064.53

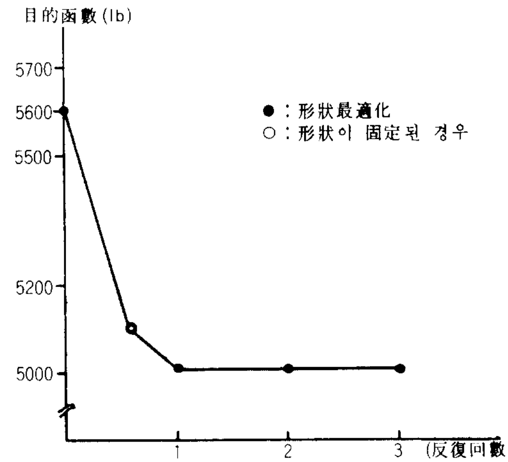


Fig. 7-10. 反復試行에 따른 目的函數

7-5. 數値計算結果의 比較分析

分割最適化技法에 依한 本 研究의 알고리즘을 實際의 構造物에 適用하여 얻어진 結果를 바탕으로 本 알고리즘의 適用性과 收斂性을 分析하면 다음과 같다.

(1) 本 研究에서 提案하는 Level 1에서 two-phases의 Modified Newton-Raphson Method에 依한 SUMT法, Level 2에서의 Powell Method의 一方向探査法에 依해 目的函數만이 最小가 되도록 하는 技法으로 構成된 本 研究의 알고리즘을 利用하여 各種 트러스의 形狀最適化에 適用하여 본 結果 트러스의 形態, 載荷條件, 制約 條件의 變化에 구애됨이 없이 Fig. 7-2, Fig. 7-5, Fig. 7-6, Fig. 7-10, Fig. 7-13, 및 Fig. 7-14에서 알 수 있듯이 Oscillation現象이 생기지 않으며 最適解를 구할 수 있다는 事實이 證明되었다.

(2) 4 種類의 트러스에 各各의 設計條件을 附與하여 本 알고리즘으로 트러스의 形狀最適化에 適用하여 본 結果, Fig. 7-2, Fig. 7-5, Fig. 7-6, Fig. 7-10, Fig. 7-13 및 Fig. 7-14에서 볼 수 있는 바와 같이 대략 2 回 以內의 反復試行으로 最適解에 빨리 收斂한다는 사실을 알았다.

(3) 數値例를 통하여 同一設計條件下에서 트러스의 幾何學的 形態를 固定시키고 斷面만을 最適化한 경우에는 트러스의 初期의 幾何形態와 設計條件에 따라 다소 차이가 있겠지만, 本 數値例를 基準으로 할 때 Table-7-17과 같이 약 18.3% 정도로 重量이 減小한다는 사실을 알 수 있으므로 트

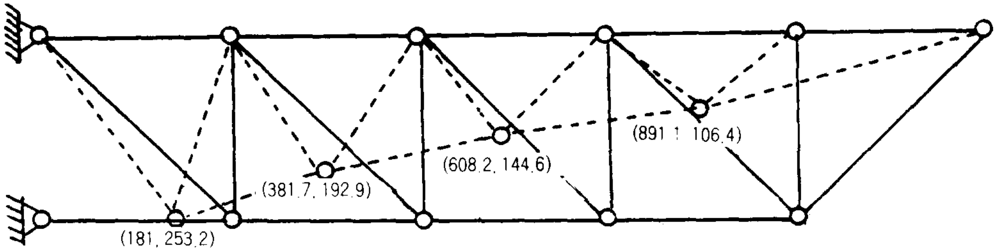
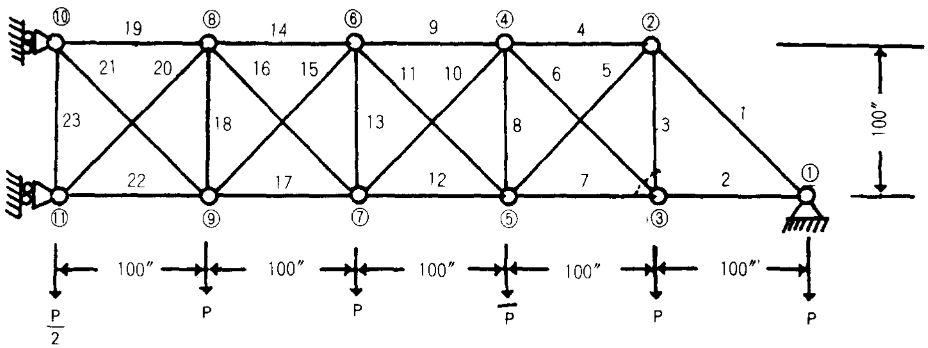


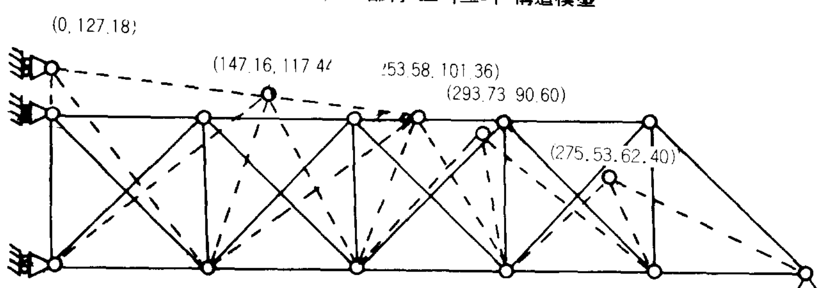
Fig. 7-11. 文獻[14]의 研究結果

Table-7-14. 23部材 트러스의 設計條件

	載荷條件의 種類	節　點	X方向荷重	Y 方向荷重
載 荷 條 件	第一載荷條件(lb)	3		−20.000
		5		−20.000
		7		−20.000
		9		−20.000
		11		−10.000
應力制約(Psi)	$-20.000 \leqq \sigma_a \leqq 20.000$			
彈性係數(Psi)	0.1×10^8			
單位重量(lb/in³)	0.1			



(a) 23部材 트러스의 構造模型



(b) 本 研究의 最適形狀

Fig. 7-12. 構造模型 및 本 研究의 最適形狀

Table-7-15. 本研究의 3phases 알고리즘에 의한 23部材 트러스의 計算結果値

反復回數 \ Level	Level																			
Phases	Phase 1													Phase 2						
部材	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	目的函數	12	13	14	15	16	17	18
初期値	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	20.485.28	15	15	15	15	15	15	15
形狀이 固定된 경우	6.36	4.89	3.88	5.61	1.57	3.37	2.50	1.34	9.05	1.48	2.05	0.01	4.778.17	0.01	1.06	1.06	0.27	1.84	2.54	0.96
1 回	10.15	0.47	1.19	9.69	1.42	0.01	1.05	0.01	10.36	1.50	0.25	0.01	3.823.57	0.01	0.26	10.54	0.01	0.01	0.85	0.44
2 回	10.75	0.01	1.21	10.24	1.15	0.01	0.59	0.10	10.25	0.01	0.01	0.10	3.423.31	0.10	0.20	10.18	0.01	0.80	0.12	0.92
3 回	10.04	0.21	1.12	9.51	0.55	0.01	0.14	0.68	9.36	0.01	0.01	0.25	2.875.74	0.25	0.01	9.29	0.13	1.08	0.15	1.03

反復函數 \ Level	Level 1						Level 2									
Phases	Phase 2						Phase 3									
部材	19	20	21	22	23	目的函數	節點 2		4		6		8		10	目的函數
							X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	Y	
初期値	15.	15	15	15	15	20,485.28	400	100	300	100	200	100	100	100	100	39.470.56
形狀이 固定된 경우	12.34	0.48	0.22	2.89	0.16	3.476.22	400	100	300	100	200	100	100	100	100	8.254.39
1 回	10.48	0.01	0.78	0.34	0.49	2,571.35	358.05	70.16	269.67	92.55	200.65	100.	100	100	100	7.060.22
2 回	9.97	0.01	0.19	0.01	0.50	2.666.73	359.13	64.91	262.01	90.60	202.88	100.36	110.05	114.05	125.85	6.225.70
3 回	8.84	0.01	0.11	0,01	0.48	3.033.41	357.53	62.40	293.73	90.60	253.58	101.36	147.16	117.44	127.18	5.924.66

Table-7-16. 本 硏究의 4phases 알고리즘에 의한 23部材 트러스의 計算結果値

Level	Level 1																									
Phases	Phase 1													Phase 2												
反復回數 \ 部材	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	目的函數	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
初期値	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	20,458.28	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	20,485.28
形狀이 固定된 경우	6.36	4.89	3.88	5.61	1.37	2.50	1.34	1.34	9.05	1.48	2.05	0.01	4,778.17	0.01	1.06	1.06	0.27	1.84	2.54	0.96	12.34	0.48	0.22	2.89	0.16	3,476.22
1 回	10.15	0.39	1.21	9.67	1.01	0.96	0.01	0.01	10.48	1.63	0.01	0.01	3,806.61	0.01	0.01	4.63	1.0	0.52	1.35	0.01	12.43	0.06	0.01	2.56	0.01	3,253.61
2 回	10.75	0.01	1.21	10.23	1.01	0.69	0.12	0.	10.23	0.01	0.01	0.01	3,435.61	0.01	0.95	10.45	0.37	0.01	0.25	0.15	10.47	0.01	0.77	0.01	0.49	2,79 .08
3 回	10.04	0.01	1.21	9.51	0.01	0.42	0.63	0.63	9.40	0.11	0.01	0.01	2,891.25	0.01	0.01	9.76	0.12	0.01	0.50	0.82	9.98	0.01	0.2	0.77	0.48	3,033.41

Level	Level 2																		
Phases	Phase 3										Phase 4								
反復回數 \ 部材			節點								節點								
	2		4		6		8		10		2		4		6		8		目的函數
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	
初期値	400	100	300	100	200	100	100	100	100	400	100	300	100	200	100	100	100	100	39,470.56
形狀이固定된경우	400	100	300	100	200	100	100	100	100	400	100	300	100	200	100	100	100	100	8,254.39
1 回	358.05	70.16	269.67	92.55	201.05	100	100	100	100	358.05	70.16	269.67	92.51	201.05	100	110.05	114.15	125.85	6,394.92
2 回	359.13	64.91	262.01	90.60	228.88	100.36	110.05	114.15	125.85	359.13	64.91	262.01	90.06	228.88	100.36	147.16	117.44	127.18	6,091.04
3 回	375.54	62.40	293.73	90.60	253.58	100.36	147.16	177.44	127.18	375.54	62.40	293.73	90.06	253.58	100.36	143.28	133.07	142.72	5,708.75

러스의 形狀最適化는 트러스構造物의 經濟的인 設計에 도움을 줄 수 있을 것으로 사료된다.

(4) 文獻[21], 文獻[9] 및 文獻[14]와 本 研究의 two-Levels 技法을 使用하여 同一構造의 最適解를 比較해본 結果 目的函數값 및 最適形狀의 節點座標에 다소 차이가 있음을 Fig. 7-1, Fig. 7-4, Fig. 7-7, Fig. 7-9로부터 알 수 있다.

Table-7-17

構造模型	形狀이 固定된 경우	形狀最適化의 경우	重量減少率
7部材트러스	119.999.69	969.948.44	19. 2%
11部材트러스	80.06	60.41	23. 9%
18部材트러스	5.180.37	5.064.53	9. 0%
23部材트러스	825.574	654.169	20. 8%

이는 알고리즘의 차이로 생긴 것이라고 판단된다.

(5) 實際 트러스構造物 斷面値數는 離散型이므로 實用化를 위한 構造物의 最適設計를 試圖할 경우에는 離散型計劃問題로부터 最適解를 얻어야 한다. 그러나 本 研究에서는 構造物 斷面値數를 連續的으로 假定하였기 때문에 豫備設計 段階에서의 最適形狀을 決定하는데 利用할 수 있을 것으로 생각된다.

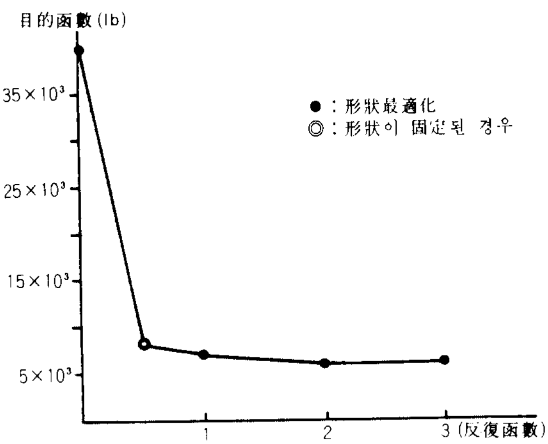


Fig. 7-13. 反復回數에 따른 目的函數

8. 結 論

本 研究에서 適用된 알고리즘의 妥當性과 收斂性을 分析하기 위하여 여러 트러스 構造模型에 適用하여 얻어진 研究結果를 要約하면 다음과 같다.

1. 形狀을 最適化함으로써 重量을 상당히 減少시킬 수 있다는 사실을 알 수 있으므로 本 研究에 의한 트러스의 形狀最適化는 트러스 構造物의 經濟的인 設計에 도움을 줄 수 있을 것으로 思料된다.

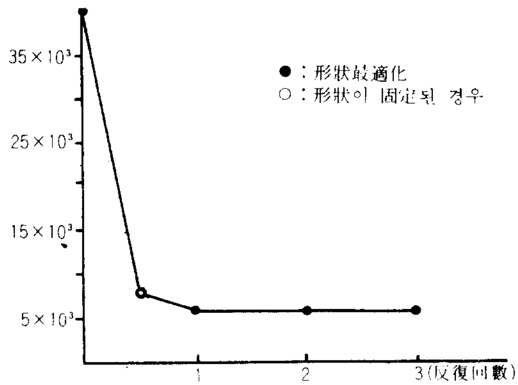


Fig. 7-14. 反復回數에 따른 目的函數

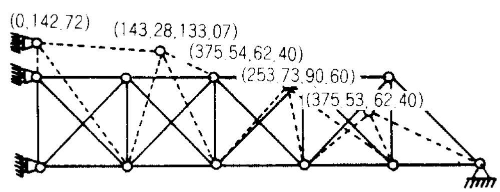


Fig. 7-15. 本 研究의 最適形狀

2. 他의 알고리즘과 本 研究의 알고리즘을 比較分析한 結果 目的函數 및 最適形狀의 모양이 거의 비슷하였으며, 最適解를 求하는 收斂性에 있어서는 反復試行數만으로 볼 때 거의 같은 水準의 收斂性을 가지고 있다고 思料된다.

3. 本 研究에서는 Level-one에서 two-phases의 斷面最適化, Level-two에서 形狀最適化를 함으로써 大型構造物 形狀最適化에 基礎的인 도움이 될 것으로 思料된다.

參 考 文 獻

1. G. B. Dantzig., "*A Decomposition Principle for Linear Program,*"Princeton University Press, 1963.
2. Vander Plants, G. N., "*Automated Design of Elastic Trusses for Optimum Geomery,*" Report No. 15, School of Engineering, Case Western Reserve Univ., June, 1971.
3. Uri Kirsch., "*Optimum Structural Design,*" McGraw- Hill Company, 1968.
4. Lucien A. Schmit, Thom P. Kicher., "Synthesis of Material and Conf:guration Selection," *Journal of Structural Division, ASCE, Proc. Vol. 88, No. ST3. June 1962, pp.79～102.*
5. William S. Dorn, Relph E. Gomory., Greenbery, H. J., "Automatic Design of Optimal Structures", *Journat de Mecanique.* Vol. 3, No. 1 Mars. 1964, pp.25～52.
6. Dobbs, M. W., Felton, L. P., "Optimization of Truss Geometry", *Journal of Structural Division,* ASCE, Proc. Vol. 95, No. ST10 Oct. 1969, pp.2105～2117.
7. Pedersen, P., "On the Optimal Layout of Multi-Purpose Truses", *Computers and Structures, Vol. 2, 1972.*
8. *Pedersen, P., "Optimal Joint Positions for Space Trusses", Journal of the Structural Division,* ASCE, Proc. Vol. 99, ST12, 1973, pp.2459～2476.
9. Vander planls G. N., and Moses, F., "Automated Design of Trusses for Optimum Geometry", *Journal of the Structural Division,* ASCE. Vol. 98, ST3, Proc, Paper 8795, Mar., 1972, pp. 671～690.
10. Spillers, W. R., "Iterative Design for Optimal Geometry", *Journal of the Structural Division.* ASCE, Vol. 101, No. ST7, Proc. Paper 11439, July, 1975, pp.1435～1442.
11. Friedland, L. R., "*Geometric Structural Behavior*", Thesis Presented to Columbia University, at New York, N. Y., in 1971 in Partial fulfllment of the requirements for the degree of Dector of Phillosophy.
12. Spillers, W. R., and George E. Kountouris., " Geometric Optimization Using Simple Code Representation", *Journal of Structural Division. ASCE,* Vol. 106, No. ST5, Proc. Paper 15396, May, 1980, pp.959～971.
13. Saka, M. P., "Shape Optimization of Trusses", *Journal of the Structural Division, ASCE,* Vol. 106, No. ST5 Proc. Paper 15437 May 1980, pp. 1155～1173.
14. Kanji Imai., and Schmit, F., "Configuration Optimization of Trusses", *Journal of Structural Division, ASCE,* Proc. Vol. 107, No. ST5, May, 1981, pp.745～756.
15. Topping, B. H., "Shape Optimization on Skel. etal Structures : A review", *Journal of the structural Division, ASCE* Vol. 109. No. 8, Proc. Paper 18187 August, 1983, pp.1933～1951.
16. U. Kirsch and G. Toledano., "Approximate Reanalysis for Modifieations of Stuctural Geomerty", *Journal of Computers and Structures,* Vol. 16, No. 1～4, 1983, pp.269～277.
17. C. Flevry and L. A. Schmit", Primal and Dual Methods in Structural Optimization", *Journal of the Structural Division,* ASCE, Vol. 106, No. ST5, May., 1980, pp.1117～1133.
18. U. Krisch, "Optimal Design of Trusses by Approximate Compatibility", *Journal of Computers and Structures,* Vol. 12, 1980, pp. 93～98.
19. U. Krisch., "An Improved Multilevel Structural synthesis Method", *Journal of Structural synthesis Method",Journal of Structural Me chanics,* 13(2), 1985, pp. 123～144.
20. A. J. Morris, "*Foundation of Structural optimization : a Unifed Approach*", John Wiley & Sons,Ltd. 1982.
21. 이규원 : "평면트리스구조물의 형상 최적화에 관한 연구", 연세대학교 대학원, 1980.
22. 金成完, 李奎遠, "平面 트러스 構造物의 形狀 最適化", 大韓土木學會 論文集, 第 6卷, 第2號, 1986. 6.