

ARMA 모델을 이용한 고해상도 스펙트럼 해석

남 현 도

(단국대학교 전기공학과 조교수)

차례

1. 서론
2. ARMA 모델링 기법
3. 확장 기구 변수법
4. 과결정 확장 기구변수법
5. 격자구조 확장 기구 변수법
6. 수치예
7. 결 론

1. 서 론

스펙트럼에 의한 신호파의 분석은 광학, 분광학, 유전의 시추, 지진의 해석, 제어 시스템 이론 등에서 광범위하게 응용되고 있다.^{1)~3)}

스펙트럼의 추정 방법은 고속 푸리에 변환(FFT : Fast Fourier transform)⁴⁾에 근거한 방법과 시계열 모델을 이용하는 방법으로 나눌 수 있는데 FFT를 이용하는 방법은 데이터의 수가 작을 때 해상도가 나쁘며 Gibb의 현상을 보이므로 최근에는 시계열 모델을 이용하는 방법이 많이 사용되고 있다.

주어진 신호파는 그것의 현재치와 과거치 그리고 가상의 입력의 선형결합으로 이루어진 AR(Autoregressive) 혹은 ARMA(Autoregressive moving-average) 모델을 이용해서 나타낼 수 있으며 스펙트럼의 추정문제는 이 모델의 차수와 계수를 추정하는 문제로 바뀌게 된다. AR모델을 이용한 스펙트럼 해석 기법은 지구물리학적 데이터 처리를 위하여 최대 엔트로피법(MEM;Maximum entropy method)⁵⁾이라는 이름으로 Burg에 의해 처음 소개되었는데 알고리즘이 간편하고 시간이 적게 걸리므로 실제 응용분야에서 많이 사용되어 왔다. 그러나 최근에 ARMA모델의 계수를 구하는 유용한 방법들이 많이 개발되어 고해상도 스펙트럼 해석을 위해서는 ARMA모델을 이용한 스펙트럼 해석기법들이 많이 사용되고 있다. ARMA모델의 계수를 추정하는 방법들로는 확장최소자승법⁶⁾⁷⁾(ELS;Extended least squares)과 순환최대확률법(RML;Recursive maximum likelihood)^{8)~8)} 등이 많이 이용되고 있으며 이들 알고리즘들의 수렴성을 개선한 확장 기구 변수법(EIV;Extended instrumental variable)^{9)~10)}이 최근에 소개되었다.

위의 알고리즘들은 계산량이 많고 하드웨어로 실현할 때 불편하므로 다음과 같은 장점들 때문에 격자구조 알고리즘들은 많이 이용되고 있다.¹¹⁾

- 1) 위의 알고리즘들이 차수의 제공에 비례하는 계산량을 가지나 격자구조 알고리즘은 차수에 비례하는 계산량을 갖는다.
- 2) 격자구조 알고리즘은 직교성질을 가지므로차

수가 하나 증가할 때 그전 차수의 계수를 변화시키지 않고 한 차수만 늘이면 되므로 차수를 증가시키는 것이 자유롭다.

3) VLSI를 사용해서 하드웨어 실현이 용이하다.

4) 수리적인 안정성이 보장되며 라운드 오프 오차에 대한 특성이 좋다.

본고에서는 일반적으로 많이 사용하는 방법들인 ELS, RML, EIV 등을 소개하고 더 정확한 추성을 위해서 과결정 확장기구 변수법(OEIV; Overdetermined EIV)을 소개하며 이를 격자구조를 이용해서 실현한 격자구조 확장기구변수법(LEIV; Lattice EIV)을 소개하고자 한다.

2. ARMA 모델링 기법

ARMA모델의 계수를 추정하는 알고리즘들의 복잡성때문에 실제 응용분야에서는 AR모델링 기법이 많이 사용되어 왔으나, 실제 프로세스의 영점이나 극점이 단위원 부근에 있거나 지배적인 영점이 있는 경우 AR 모델의 차수가 지나치게 커지는 단점이 있고 ARMA 모델의 차수를 추정하는 유용한 알고리즘들이 많이 개발되었기 때문에 최근에는 고해상도 스펙트럼 해석을 위해 ARMA 모델링 기법이 많이 이용되고 있다.

임의의 신호파는 다음과 같은 차수(p, q)의 ARM A 모델로 표현할 수 있으며 일반적으로 $p \geq q$ 이다.

$$y(t) = -\sum_{i=1}^p A(i)y(t-i) + \sum_{i=0}^q c(i)\omega(t) \quad (1)$$

여기서 $\omega(t)$ 는 평균이 0 이고 분산이 σ_w^2 인 백색잡음이다.

ARMA 계수 추정 알고리즘들을 사용해서 계수를 추정하여 그 계수를 $\hat{A}(i)$, $\hat{C}(i)$ 이라 하면 주어진 신호파의 스펙트럼은 다음과 같이 된다.

$$\hat{S}(\omega) = \frac{\hat{C}(e^{j\omega}) \hat{C}(e^{-j\omega})}{A(e^{j\omega}) \hat{A}(e^{-j\omega})} \sigma_w^2 \quad (2)$$

여기서 $\hat{A}(z) = 1 + \hat{A}(1)Z + \dots + \hat{A}(p)Z^p$
 $\hat{C}(Z) = 1 + \hat{C}(1)Z + \dots + \hat{C}(q)Z^q$
 이다.

3. 확장 기구변수법

ARMA 계수의 추정 방법으로는 기구변수법(IVM; Instrumental variable method), ELS, RML 등이 많이 사용되고 있으나 IVM은 MA (Moving-average) 계수를 추정할 수 없고 ELS나 RML은 수렴이 다소 늦은 약점이 있으므로 본장에서는 MA 계수도 추정할 수 있고 수렴특성도 다소 개선된 EIV를 소개하고자 한다.

(2) 식의 ARMA 모델은 다음과 같이 표현할 수 있으며

$$y(t) = -\sum_{i=1}^p A(i)y(t-i) + v(t) \quad (3)$$

$$v(t) = \sum_{i=1}^q C(i)\omega(t-i) + \omega(t) \quad (4)$$

이런 행렬을 이용해 표현하면 다음과 같다.

$$y = Y\theta + W \quad (5)$$

여기서

$$y = [y(p), \dots, y(t)]^T \quad (6)$$

$$\theta = [A(1), \dots, A(p), C(1), \dots, C(q)]^T \quad (7)$$

$$Y = \begin{bmatrix} -y(p-1), \dots, -y(0), e(p-1), \dots, e(p-q) \\ \vdots \\ -y(t-1), \dots, -y(t-q), e(t-1), \dots, e(t-q) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$W = [w(p), \dots, w(t)]^T \quad (9)$$

물론 $w(t)$ 는 미지의 입력이므로 $w(t)$ 를 잔차(residual) $\hat{\epsilon}(t)$ 로 대체해서 사용한다.

$$\hat{\epsilon}(t) = y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta} \quad (10)$$

여기서,

$$\phi(t) = [-y(t-1), \dots, -y(t-p), \hat{\epsilon}(t-1), \dots, \hat{\epsilon}(t-q)]^T \quad (11)$$

$$\hat{\theta} = [\hat{A}(1), \dots, \hat{A}(p), \hat{C}(1), \dots, \hat{C}(q)]^T \quad (12)$$

(5) 식의 W 대신에 $E = [\hat{\epsilon}(p), \dots, \hat{\epsilon}(t)]^T$ 를 넣고 양변의 앞쪽에 기구변수행렬 Z^T 를 곱한 다음에 양변에 $(Z^T Y)^{-1}$ 를 곱하면

$$(Z^T Y)^{-1} Z^T y = \theta + (Z^T Y)^{-1} Z^T E \quad (13)$$

이 되고 $\epsilon(Z^T E) = 0$, $\epsilon(Z^T Y) = R$, R은 비특이 행

렬(nonsingular matrix)이 되게 Z를 정하면 EIV 는 비편향(unbiased) 특성을 갖게 된다. 단 $\varepsilon(\cdot)$ 은 기대치(expectation)이다. 다음과 같이 Z를 정하면 위의 조건을 만족한다.¹⁰⁾

$$Z = \begin{bmatrix} -y(0), & 0, \dots, & 0, & \hat{e}(p), & \dots, & \hat{e}(p-q+1) \\ -y(p-1), & \dots, & -y(0), & \hat{e}(2p-1), \dots, & \hat{e}(2p-q) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(t-1-p), \dots, & -y(t-p-q), & \hat{e}(t-1), \dots, & \hat{e}(t-q) \end{bmatrix} \quad (14)$$

(13) 식을 최소자승법을 쓰서 전개하면 다음과 같은 순환 알고리즘을 얻을 수 있다.

$$\phi(t) = [-y(t-1), \dots, -y(t-p), \hat{e}(t-1), \dots, \hat{e}(t-q)]^T \quad (15)$$

$$z(t) = [-y(t-1-p), \dots, -y(t-p-q), \hat{e}(t-1), \dots, \hat{e}(t-q)]^T \quad (16)$$

$$e(t) = y(t) - \phi^T(t) \hat{\theta}(t-1) \quad (17)$$

$$P(t) = (I - P(t-1)z(t)\phi^T(t))/(\lambda(t) + \phi^T(t)P(t-1)z(t)) \quad P(t-1)/\lambda(t) \quad (18)$$

$$K(t) = P(t)z(t)/(\lambda(t) + \phi^T(t)P(t)z(t)) \quad (19)$$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t)e(t) \quad (20)$$

$$\hat{e}(t) = y(t) - \phi^T(t) \hat{\theta}(t) \quad (21)$$

여기서 $\lambda(t)$ 는 지수 가중치를 가지는 망각지수(forgetting factor)며 $\lambda(t)$ 는 일반적으로 1로 두거나 다음 식과 같이 둔다.

$$\lambda(t+1) = \lambda\lambda(t) + (1-\lambda) \quad (\lambda=0.99, \lambda(0)=0.95) \quad (22)$$

그리고 초기치들은 다음과 같이 둔다.

$$P(0) = \alpha I \quad (23)$$

$$\hat{\theta}(0) = 0 \quad (24)$$

$$\phi(0) = 0 \quad (25)$$

여기서 α 는 충분히 큰 수이며 Z(t)대신에 $\phi(t)$ 를 넣으면 ELS가 되고 Z(t)대신에 예비필터를 사용하여 $\phi(t)$ 를 여과한 값을 대입하면 RML이 된다.

4. 과결정 확장 기구변수법

전장에서 소개한 EIV알고리즘은 매스텝마다(p+

q)개의 방정식을 푸는 것이 되나 협대역(narrow band) 신호의 스펙트럼 해석을 위해서는 미지계수의 수보다 더 많은 수의 방정식을 최소자승법의 개념을 도입해서 푸는 과결정 알고리즘이 훨씬 좋은 해상력을 보인다.¹²⁾

기구변수 행렬 Z를 다음과 같이 선택하고

$$Y = \begin{bmatrix} -y(0), & \dots, & 0 \\ -y(kp-1), & \dots, & -y(0) \\ \vdots \\ -y(t-1-q), \dots, & -y(t-kp-q), \\ \hat{e}(p), & \dots, & \hat{e}(p-q+1) \\ \vdots & \dots, & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{e}(t-1), & \dots, & \hat{e}(t-kp) \end{bmatrix} \quad (26)$$

k = 1 이면 EIV와 같아지며 k > 1 인 경우에 최소자승법으로 파라미터의 추정치 $\hat{\theta}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\hat{\theta} = (Y^T Z Z^T Y)^{-1} Y^T Z Z^T y \quad (27)$$

위의 식을 역행렬 보조정리(matrix inversion lemma)를 이용하여 전개하면 다음과 같은 순환 알고리즘을 얻을 수 있다.

$$\phi(t) = [-y(t-1), \dots, -y(t-kp), \hat{e}(t-1), \dots, \hat{e}(t-kp)]^T \quad (28)$$

$$z(t) = [-y(t-1-q), \dots, -y(t-kp-q), \hat{e}(t-1), \dots, \hat{e}(t-kq)]^T \quad (29)$$

$$U(t) = S(t)z(t) \quad (30)$$

$$S(t+1) = \lambda(t)S(t) + \phi(t)z^T(t) \quad (31)$$

$$R(t+1) = [U(t)\phi(t)] \quad (32)$$

$$\lambda^2(t)G(t+1) = \begin{bmatrix} -z^T(t)z(t) & \lambda(t) \\ & \lambda(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$K(t+1) = P(t)R(t+1)(\lambda^2(t)G(t+1) + R^T(t+1)P(t)R(t+1))^{-1} \quad (34)$$

$$P(t+1) = (P(t) - K(t+1)R^T(t+1)P(t))/\lambda^2(t) \quad (35)$$

$$V(t+1) = \begin{bmatrix} z^T(t)L(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$L(t+1) = \lambda(t)L(t) + z(t)y(t) \quad (37)$$

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + K(t+1)(V(t+1) - R^T(t+1)\hat{\theta}(t)) \quad (38)$$

여기서 $\lambda(t)$ 는 망각지수이며 초기치들은 다음과 같다.

$$S(0) = \mu[1 \ 0], \quad P(0) = \frac{1}{\mu^2} I, \quad L(0) = 0, \quad \hat{\theta}(0) = 0 \quad (39)$$

μ 는 스칼라 파라미터이다.

OEIV의 계산양은 EIV의 k 배이나 EIV보다 정확한 추정을 하며 수렴도 빠르다.

5. 격자구조 확장기구 변수법

EIV를 격자구조로 실현하기 위해서는 부트스트랩(bootstrap) 기법을 이용해야 한다. 즉 현재 시간에서의 예측오차가 주어지면 이것을 다음 시간에서의 입력으로 사용해서 추정하는 방법으로 1 채널 ARMA 모델을 다음과 같은 2 채널 AR 모델로 생각한다.

$$\begin{pmatrix} e_p^x(t) \\ e_p^u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ u(t) \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^N \begin{pmatrix} A(i) - B(i) \\ 0 \quad 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t-i) \\ u(t-i) \end{pmatrix} \quad (40)$$

이 때 입력 $u(t)$ 는 미지이므로 그 전단계에서 추정된 파라미터를 이용하여 추정한다. (그림 1 참조)

(40) 식의 모델을 이용하여 참고문헌 10), 13)에 나와 있는 시간 및 차수 갱신식(update formula)을 이용하면 표 1 과 같은 공분산 격자구조 알고리즘을 유도할 수 있으며 이 때 백색화(whitening) 필터는 표 2 와 같다.

이 격자 필터들의 구조를 그림으로 그려보면 그림 2-4와 같다.

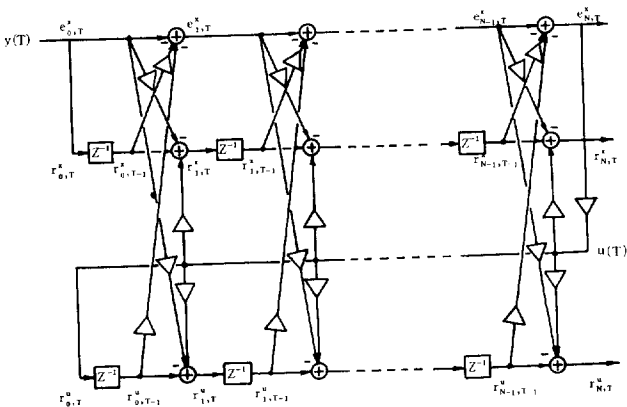
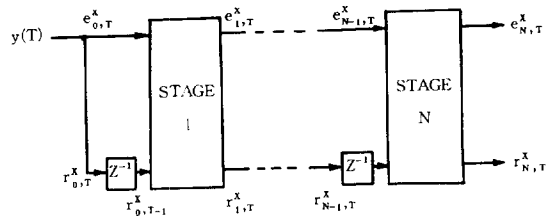
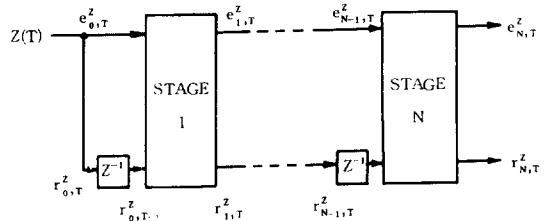


그림 1. Bootstrap 기법을 이용한 격자 ARMA 모델

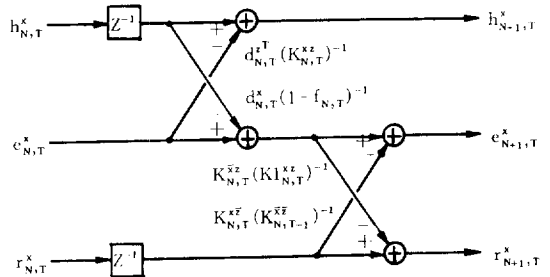


(a) 데이터의 격자구조

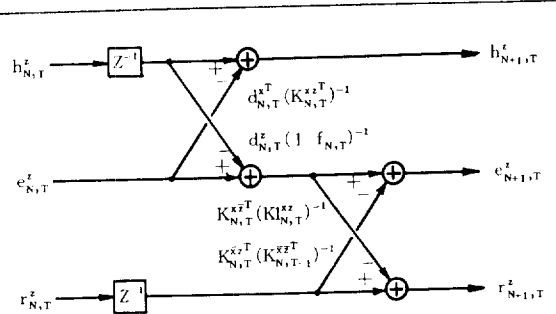


(b) 기구 변수의 격자구조

그림 2. LEIV의 구조



(a) 데이터의 격자구조



(b) 기구 변수의 격자구조

그림 3. LEIV 각 section의 격자구조

Initialization :

$$K_{0,-1}^{xx} = K_{0,-1}^{xz} = \delta I$$

Reflection coefficients and backward prediction errors are all initialized to zero.

For $T = 0, 1, \dots, LT$ DO :

$$e_{0,T}^x = r_{0,T}^x = \begin{bmatrix} y_T \\ e_{P,T}^x \end{bmatrix}, \quad e_{0,T}^z = r_{0,T}^z = \begin{bmatrix} z_T \\ e_{P,T}^z \end{bmatrix}$$

$$f_{0,T} = g_{0,T} = h_{0,T}^x = h_{0,T}^z = 0$$

$$K_{0,T}^{xz} = K_{0,T}^{zx} = K_{0,T-1}^{xz} + \begin{bmatrix} y_T \\ e_{P,T}^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_T e_{P,T}^z \end{bmatrix}$$

For $N = 0, 1, \dots, \min(P, T) - 1$ DO :

$$d_{N,T}^x = d_{N,T-1}^x + e_{N,T}^x (1 - g_{N,T})^{-1} h_{N,T-1}^{zT}$$

$$d_{N,T}^z = d_{N,T-1}^z + e_{N,T}^z (1 - g_{N,T})^{-1} h_{N,T-1}^{xT}$$

$$e_{N,T}^x = e_{N,T}^x - d_{N,T}^x (1 - f_{N,T})^{-1} h_{N,T-1}^x$$

$$e_{N,T}^z = e_{N,T}^z - d_{N,T}^z (1 - f_{N,T})^{-1} h_{N,T-1}^z$$

$$g_{N,T} = g_{N,T} + h_{N,T-1}^z (1 - f_{N,T})^{-1} h_{N,T-1}^x$$

$$K_{N,T}^{xz} = K_{N,T-1}^{xz} + e_{N,T}^x (1 - g_{N,T})^{-1} r_{N,T-1}^{zT}$$

$$K_{N,T}^{zx} = K_{N,T-1}^{zx} + r_{N,T-1}^x (1 - g_{N,T})^{-1} e_{N,T}^{zT}$$

$$g_{N+1,T+1} = g_{N,T} + e_{N,T}^{zT} (K_{N,T}^{xz})^{-1} e_{N,T}^x$$

$$h_{N+1,T}^x = h_{N,T-1}^x - d_{N,T}^{zT} (K_{N,T}^{xz})^{-1} e_{N,T}^x$$

$$h_{N+1,T}^z = h_{N,T-1}^z - d_{N,T}^{xT} (K_{N,T}^{xz})^{-1} e_{N,T}^z$$

$$f_{N+1,T+1} = f_{N,T} + d_{N,T}^{zT} (K_{N,T}^{xz})^{-1} d_{N,T}^x$$

$$Kl_{N,T}^{xz} = K_{N,T}^{xz} - d_{N,T}^x (1 - f_{N,T})^{-1} d_{N,T}^{zT}$$

$$e_{N+1,T}^x = e_{N,T}^x - K_{N,T}^{xz} (K_{N,T-1}^{xz})^{-1} r_{N,T-1}^x$$

$$e_{N+1,T}^z = e_{N,T}^z - K_{N,T}^{zx} (K_{N,T-1}^{zx})^{-1} r_{N,T-1}^z$$

$$r_{N+1,T}^x = r_{N,T-1}^x - K_{N,T}^{xz} (Kl_{N,T}^{xz})^{-1} e_{N,T}^x$$

$$r_{N+1,T}^z = r_{N,T-1}^z - K_{N,T}^{zx} (Kl_{N,T}^{zx})^{-1} e_{N,T}^z$$

$$K_{N+1,T}^{xz} = Kl_{N,T}^{xz} - K_{N,T}^{xz} (K_{N,T-1}^{xz})^{-1} K_{N,T}^{xz}$$

$$K_{N+1,T}^{zx} = K_{N,T}^{zx} - K_{N,T}^{zx} (Kl_{N,T}^{zx})^{-1} K_{N,T}^{zx}$$

※ LT : Last of time, P : Estimated order

표 1. 공분산 격자구조 확장기구 변수 알고리즘

```

For I = 0, 1, ..., P DO :

    A0,I = B0,I = 1, C0,I = D0,I = 0 I = 0

    A0,I = B0,I = C0,I = D0,I = 0 I > 0

For N = 0, 1, ..., P-1 DO :

    ClN,I = CN,I - hN,TzT (1 - fN,T+1)-1 DN,I

    DlN,I = DN,I - hN,Tx (1 - gN,T+1)-1 CN,I

    AlN,I = AN,I - dN,Tx (1 - fN,T)-1 DlN,I-1

    BlN,I = BN,I - rN,Tx (1 - gN,T+1)-1 ClN,I

    AN+1,I = AlN,I - KN,Txz (KN,T-1zz)-1 BlN,I

    BN+1,I = BlN,I-1 - KN,Txz (KN,Tzz)-1 AlN,T

    CN+1,I = ClN,I - rN,TzT (KN,T-1zz)-1 BN,I

    DN+1,I = DlN,I-1 - dN,TzT (KN,Tzz)-1 AN,I
    
```

표 2. LEIV의 백색화 필터

6. 수치 예

지금까지 소개한 ELS, RML, EIV, OEIV 및 LEIV 알고리즘들을 비교하기 위해 다음과 같은 ARMA 모델에 대해 컴퓨터 시뮬레이션을 해 보았다.

$$y(t) = -2.7607y(t-1) + 3.8106y(t-2) - 2.6535y(t-3) + 0.9238y(t-4) + v(t) \tag{41}$$

$$v(t) = w(t) - 0.102w(t-1) + 0.173w(t) \tag{42}$$

여기에서 $w(t)$ 는 분산이 1인 백색잡음이며 데이터의 수는 256개이다.

실제 스펙트럼과 지금까지 소개한 5 가지 알고리

즘에 의해 추정한 결과를 그림 5에 보였다. OEIV와 EIV가 가장 좋은 결과를 보였으며 그 다음이 LEIV, 그리고 ELS와 RML이 가장 나쁜 결과를 보였다. 다른 몇 가지 예제에서도 비슷한 경향을 보였다.

7. 결 론

고해상도를 얻기 위한 스펙트럼 추정기법들이 소개되었다. 지금까지는 스펙트럼해석을 위해 FFT와 AR모델링 기법들이 흔히 사용되었으나 데이터의 수가 작고 협대역인 경우 좋은 해상력을 얻을 수가 없어 최근에 많이 사용되는 ARMA모델링 기법

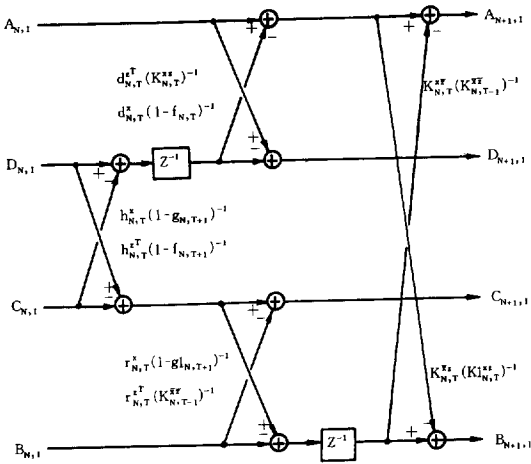


그림 4. 백색화(whitening) 필터의 격자구조

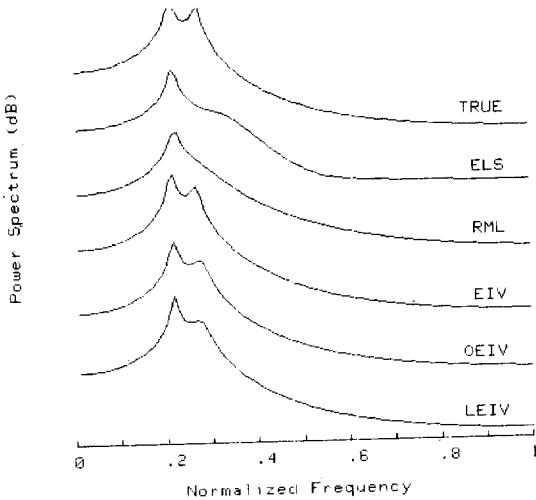


그림 5. 실제 스펙트럼과 각 알고리즘에 의해 추정된 스펙트럼

으로 ELS, RML, EIV, OEIV 및 LEIV를 소개했다. 계산량은 ELS와 EIV가 가장 작고 RML은 예비 필터를 사용하므로 그만큼 늘어나며 OEIV는 사용하는 방정식의 수에 따라 EIV보다 K배가 증가한다. LEIV는 알고리즘이 복잡하여 예제에서 보인 경우처럼 모델차수가 작은 경우에는 다른 알고리즘들보다 훨씬 많은 계산이 필요하나 계산량이 차수에 비례하므로 음성신호처리 등의 차수가 큰 분야에서는 다른 알고리즘들보다 훨씬 작은 계산량이 필요

하므로 응용이 기대된다.

이상의 방법들은 고해상도 스펙트럼 해석을 요구하는 응용분야에 FFT를 대신해서 사용될 수 있으며 격차구조에 대한 연구를 진척시켜 VLSI를 이용한 하드웨어 구현에 성공한다면 스펙트럼 분석기(spectrum analyzer)의 설계에도 이용할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

- 1) D.G. Childers, Ed., Modern spectrum analysis, New York: IEEE Press, 1978.
- 2) S.B. Kesler, Ed., Modern spectrum analysis, [], New York: IEEE Press, 1986.
- 3) S.M. Kay and S.L. Marple, Jr., "Spectrum analysis—A modern perspective", Proc. of IEEE, Vol.69, pp.1380-1419, 1981.
- 4) E.O. Brigham, The Fast Fourier Transform, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1974.
- 5) J.P. Burg, "Maximum entropy spectral analysis", in Proc. 37th Meeting, Society of Exploration Geophysicists (Oklahoma city, OK), 1967.
- 6) G.C. Goodwin and R.L. Payne, Dynamic System Identification, Experiment Design and Data Analysis, New York: Academic Press, 1977.
- 7) L. Ljung and T. Soderstrom, Theory and Practise of Recursive Identification, Cambridge, Mass.:MIT. Press, 1983.
- 8) B. Friedlander, "A recursive maximum likelihood algorithm for ARMA spectral estimation", IEEE Tr. Inform theory, Vol. IT-28, pp. 639-646, 1982.
- 9) 양홍석, 정찬수, 남현도, 김국현, "ARMA 스펙트럼 추정을 위한 변형기구변수법에 관한 연구", 전기학회 논문지, 35권, 10호, pp.438-444, 1986.
- 10) 남현도, "Extended instrumental variable methods for ARMA spectral estimation", 서울대학교 박사학위 논문, 1986.
- 11) B. Friendlander, "Lattice methods for spectral estimation", Proc. of IEEE, Vol. 70, pp. 990-1017, 1982.
- 12) J.A. Cadzow, "Spectral estimation: An overdetermined rational model estimation approach", Proc IEEE, Vol. 70, pp. 907-939, 1982.
- 13) B. Porat, B. Friedlander and M. Morf, "Square root covariance ladder algorithms", IEEE Tr. Automat. Contr, Vol. AC-27, pp. 813-829, 1982.