

論 文
36~9~11

適應補償器를 가지는 出力誤差方法을 利用한 IIR 디지털 필터의 適應的 設計

Adaptive Design of IIR Digital Filters Using Output Error Method with Adaptive Compensator

裴 鉉 惠* · 李 鍾 柱**
(Hyeon-Deok Bae · Jong-Gak Lee)

ABSTRACT

Adaptive design of IIR digital filters using equation error method has been studied.

In this paper, a design technique of IIR digital filters using output error method with adaptive compensator is presented.

In computer simulation results, it is shown that flat response characteristic in pass-band, below-40[dB] attenuation characteristic in stop-band, sharp cut-off characteristic in transition-band, and phase characteristic is linear in pass-band.

1. 序 論

디지털 필터에는 FIR(Finite Impulse Response) 필터와 IIR(Infinite Impulse Response) 필터가 있다. FIR 필터 設計方法에는 Frequency sampling 방법, Windowing 방법 등이 있고 IIR 필터 設計方法에는 Impulse invariant transformation 방법, Bilinear transformation 방법, 등이 있다.^{1), 3)}

本 論文에서는 適應 알고리즘(Adaptive algorithm)을 이용하여 IIR 디지털 필터 設計方法에 關係 考察하고자 한다.

이 방법은 시스템 識別(System identification) 개념으로 하나의 미지의 시스템(Unknown system)의 係數를 識別하기 위해 임의의 適應 시스템을 설정한 후 이 적응 시스템의 出力이 미지의 시스템 出力과 가까워 지도록 適應 시스템의 係數를 適應시

켜 나가는 것이다. 그림 1 이 시스템 識別의 블록선도이다.²⁾ 그림 1 에서 미지의 시스템이 설계할 필터의 설계 사양(Design specification)으로 適應 시스템이 설계될 필터로 對替됨으로서 適應 시스템을 이용한 디지털 필터의 設計가 可能해진다.⁴⁾

그림 1 의 미지 시스템의 出力인 원하는 出力 $y(k)$ 와 適應 시스템의 出力인 推定 出力 $\hat{y}(k)$ 사이의 誤差 $\epsilon(k)$ 를 最小自乘의 의미(Least mean square sense)에서 最小化 시키거나한다. 그런데 오차를 最小화 시키는 적응시스템을 信號處理 分野에서는 適應 필터라 한다. 따라서 이후로는 適應 시스템을 適應 필터라 하기로 한다. 適應 필터도 適應 非循環 필터(Adaptive nonrecursive filter)와 適應 循環 필터(Adaptive recursive filter)로 나뉘어지고 적응 순환필터는 그 구조상 方程式誤差方法(Equation error method)과 出力誤差方法(Output error method)으로 나누어진다. 방정식오차방법에서는 平均自乘誤差가 適應필터 係數의 二次 函數(Quadratic function)가 되므로 總체적 최적해(Globally optimal solution)를 얻을 수 있고 수렴속도가 빠르다는 장점이 있으나 이를 필터 設計에 적용했을 경우 실

*正 會 員 : 忠北大 工大 電子工學科 助教授
**正 會 員 : 서울大 工大 電子工學科 教授 · 王博
接受日字 : 1987年 2月 11日
1次修正 : 1987年 8月 25日

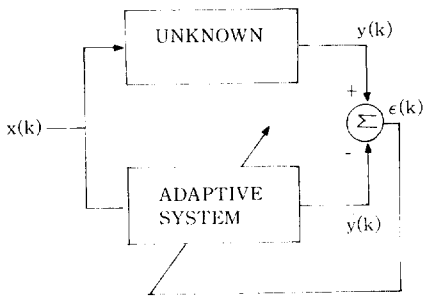


그림 1. 시스템 識別

Figure 1. Block diagram of system identification

제된 필터의 極點이 z-平面上에서 단위원 밖에 존재하게 되어 필터가 不安定 하게 된다.^{2), 4)}

本 論文中에서는 출력오차방법인 適應補償器(Adaptive compensator)를 가지는 적응순환필터를^{7), 8), 9)} 이용하여 通過帶域에서 線形位相 特性을 가지는 IIR 디지털 필터 설계방법에 관해 연구 하고자 한다.

2. IIR 디지털 필터의 適應的 設計

因果律(Causality)을 만족하는 IIR 디지털 필터의 入, 出力 관계는 다음과 같다.

$$y(k) = \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{j=0}^m b_j x(k-j) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{단, } [a_i] &= [\dots, 0, 0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, \dots] \\ [b_j] &= [\dots, 0, 0, b_0, b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots] \end{aligned}$$

式(1)의 z-變換은 다음과 같다.

$$Y(z) = A(z) Y(z) + B(z) X(z) \quad (2)$$

式(2)에서 傳達函數 H(z)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{B(z)}{1-A(z)} \\ &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 - (a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n})} \quad (3) \end{aligned}$$

시스템 識別 개념으로 IIR 디지털 필터를 설계할 경우 전달함수 H(z)가 설계 사양으로 대체됨으로 설계될 필터의 전달함수는 매순간 적응되므로 오차를 줄여나가므로 다음과 같다.

$$\hat{H}(z) = \frac{\hat{b}_0(k) + \hat{b}_1(k)z^{-1} + \dots + \hat{b}_m(k)z^{-m}}{1 - [\hat{a}_1(k)z^{-1} + \dots + \hat{a}_n(k)z^{-n}]} \quad (4)$$

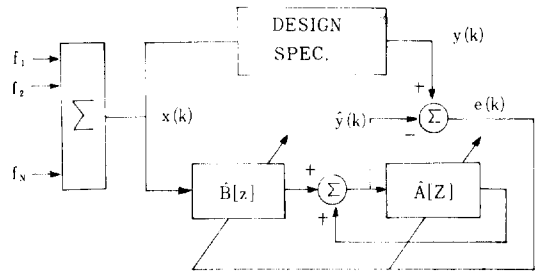


그림 2. 出力誤差方法

Fig 2. Output error method.

이와 같은 개념이 그림 2의 出力誤差 方法이다. 그림 2에서 入, 出力 x(k), y(k)는 N개의 正弦波 합으로 이루어 지며 다음과 같다.

$$x(k) = \sum_{i=1}^N f_i(k) = \sum_{i=1}^N c_i \sin w_i k \quad (5)$$

단, c_i는 양의 정수

$$y(k) = \sum_{i=1}^N d_i c_i \sin(w_i k + \theta_i) \quad (6)$$

式(6)에서 d_i, θ_i는 각각 설계사양으로 주어지는 振幅과 位相 特性이다.

式(5), (6)의 入, 出力으로 부터 미지 시스템의 傳達函數를 類推할 수 있다.

IIR 디지털 필터를 適應的으로 設計한다는 것은 설계사양에 맞게 설계할 필터의 傳達函數 $\hat{H}(z)$ 를 近似化하는 것이다. 즉 적응필터 係數 $\hat{b}(k), \dots, \hat{b}_m(k), \hat{a}_1(k), \dots, \hat{a}_n(k)$ 를 係數 b₀, ..., b_m, a₁, ..., a_n에 적응시키는 것이다. 필터 계수들을 적응시키기 위해서는 원하는 出力 y(k)와 推定出力 $\hat{y}(k)$ 誤差의 自乘平均을 最小化하는 적응필터를 使用한다. 適應 循環 필터에서는 誤差自乘函數가 適應필터 係數들에 非線形이 되어 국소적 最小점들(local minima)이 존재하므로 총체적 最良해를 찾는 데 어려움이 있다. 이를 보완하기 위해 超安定性(hyperstability) 이론을 도입한 알고리즘이 제시되었다.^{5), 6)}

그러나 초안정성을 만족하기 위해 삽입되는 보상기를 설계하기 위해서는 미지시스템의 극점에 관한 사전지식이 필요하므로 이 알고리즘의 사용에 제약이 따르게 된다. 그리고 그림 3과 같은 방정식오차방법을 이용하여 오차 $\epsilon'(k)$ 의 자승평균을 최소화하는 기법이 제시되었다.^{2), 4)} 이 기법에서는 오차가 필터계수의 線形函數되어 총체적 最良해를 구할 수 있고 수렴속도가 빨라진다. 그러나 이 방법을

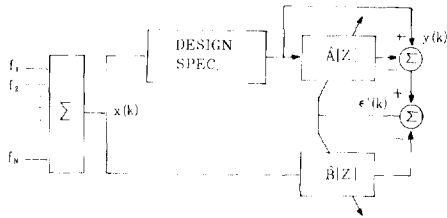


그림 3. 方程式誤差方法

Fig 3. Equation error method.

필터설계에 응용할 경우 설계된 필터의 극점이 z-평면 상에서 단위원 밖에 존재할 수 있으므로 필터가 불안정하게 된다.⁴⁾

3. 出力誤差方法을 이용한 IIR 디지털 필터의 適應的 設計

그림 2와 같은 出力誤差方法에서의 적응필터는 적응과정 중에 필터의 극점이 z-평면 상에서 단위원 밖에 존재할 수 있게되어 평균자승오차함수가 발산하므로 항상 수렴성을 보장받을 수 없기 때문에 V.M. Popov의 초안정성이론을 이용하므로써 이 문제를 해결할 수 있다.⁶⁾ 그림 4가 초안정성을 만족시키기 위해 보상기를 삽입한 출력오차방법의 적응 순환필터이다.

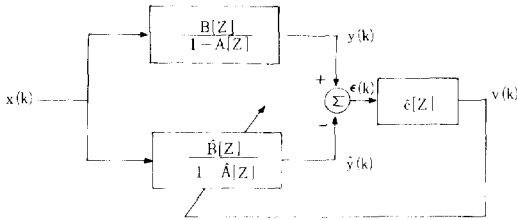


그림 4. 보상기를 가지는 出力誤差方法

Fig 4. Output error method with compensator.

보상기 $\hat{c}(z)$ 는 다음과 같다.

$$\hat{c}(z) = 1 + \sum_{i=1}^n c_i z^{-i} \quad (7)$$

그림 4에서 보상기 $c(z)$ 의 역할은 적응 필터가 超安定性(hyperstability)^{5), 6)}을 만족하도록 하는 것인데 이를 만족하기 위해 $c(z)$ 는 $1-A(z)$ 와 結合하여 다음과 같은 SPR(Strictly Positive Real) 조

건을 만족시켜야 한다.

$$S(z) = \frac{\hat{c}(z)}{1-A(z)} \quad (8)$$

$$\text{일때 } \text{Re}[S(z)] \geq 0, |z|=1 \quad (9)$$

그런데 식(8)에서 알 수 있듯이 補償器를 設計하기 위해서는 미지의 시스템 傳達函數의 分母에 대한 事前知識이 필요하다. 이는 시스템 識別 의미에서 모순이 되므로 補償器 設計에서 가장 큰 문제점이다. 그림 4의 경우 보상기가 固定되어 있으므로 線型 補償器라 하고 線型 補償器를 사용한 알고리즘으로는 HARF, SHARF 알고리즘이 제시되었다.^{5), 6)} 線型 補償器 사용시 발생하는 문제점을 해결하기 위해 補償器 자체도 適應되는 알고리즘이 제시되었다.^{7), 8), 9)}

適應 補償器를 가지는 適應 循環필터가 그림 5이다.

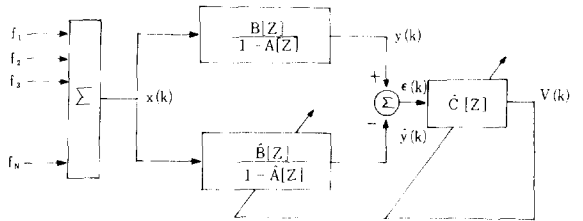


그림 5. 適應補償器를 가지는 出力誤差方法

Fig 5. Output error method with adaptive compensator.

그림 5에서 적응보상기 $\hat{c}(z)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{c}(z) = 1 + \sum_{i=1}^n \hat{c}_i(k) z^{-i} \quad (10)$$

식(10)에서 $\hat{c}_i(k)$ 를 $-a_i$ 로 수렴시켜 나가면 定常狀態에서 $s(z)=1$ 이 되므로 $s(z)$ 는 항상 SPR 조건을 만족하게 되어 적응 순환필터는 초안정적이 된다.

그림 5에서 원하는 출력 $y(k)$, 추정출력 $\hat{y}(k)$, 사전 추정출력 $y^*(k)$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$y(k) = \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{j=0}^m b_j x(k-j) \quad (11)$$

$$\hat{y}(k) = \sum_{i=1}^n \hat{a}_i(k) \hat{y}(k-i) + \sum_{j=0}^m \hat{b}_j(k) x(k-j) \quad (12)$$

$$y^*(k) = \sum_{i=1}^n a_i(k+1) y^*(k-i) + \sum_{j=0}^m \hat{b}_j(k+1) x(k-j) \quad (13)$$

또한 式(11)~(13)으로 부터 추정오차 $\epsilon(k)$ 및 사전 추정오차 $\epsilon^*(k)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\epsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k) \tag{14}$$

$$\epsilon^*(k) = y(k) - y^*(k) \tag{15}$$

式(14), (15)의 오차를 보상기를 통과시켜 처리된誤차는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v(k) &= \epsilon(k) + \sum_{i=1}^n c_i(k) \epsilon(k-i) \\ &= y(k) - \hat{y}(k) + \sum_{i=1}^n c_i(k) \epsilon(k-i) \\ &= y(k) - \hat{\theta}^T(k) \hat{\phi}(k) \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} v^*(k) &= \epsilon^*(k) + \sum_{i=1}^n \hat{c}_i(k) \epsilon^*(k-i) \\ &= y(k) - y^*(k) + \sum_{i=1}^n \hat{c}_i(k) \epsilon^*(k-i) \\ &= y(k) - \hat{\theta}^T(k+1) \phi^*(k) \end{aligned} \tag{17}$$

式(16)~(17)에서 $\hat{\theta}^T$ 는 추정 파라미터 벡터로서 다음과 같으며

$$\hat{\theta}^T(k) = [\hat{a}_1(k), \dots, \hat{a}_n(k), \hat{b}_0(k), \dots, \hat{b}_m(k), -\hat{c}_1(k), \dots, -\hat{c}_n(k)] \tag{18}$$

또한 미지시스템의 파라미터 벡터 θ^T 는 다음과 같다.

$$\theta^T = [a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n] \tag{19}$$

그리고 $\hat{\phi}^T, \phi^*$ 는 추정 데이터벡터와 사전 추정 데이터벡터로서 아래와 같다.

$$\hat{\phi}^T(k) = [\hat{y}(k-1), \dots, \hat{y}(k-n), x(k), \dots, x(k-m), \epsilon(k-1), \dots, \epsilon(k-n)] \tag{20}$$

$$\phi^*(k) = [y^*(k-1), \dots, y^*(k-n), x(k), \dots, x(k-m), \epsilon^*(k-1), \dots, \epsilon^*(k-n)] \tag{21}$$

式(16), (17)을 한 단계 전의 추정 파라미터 벡터를 이용하여 표시한 오차는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\eta(k) = y(k) - \hat{\theta}^T(k-1) \phi^T(k) \tag{22}$$

$$\eta^*(k) = y(k) - \hat{\theta}^T(k) \phi^*(k) \tag{23}$$

이 방법에서는 보상기가 미지 시스템의 분모와 결합하여 SPR 조건을 만족해야 한다. 즉 $\hat{c}_i(k)$ 가 $-a_i$ 로 수렴해야 한다. 또한 $\hat{a}_i(k)$ 및 $\hat{b}_j(k)$ 또 a_i, b_j 로 수렴해야 하므로 이 두가지를 동시에 만족시키기 위해 다음과 같은 函數를 정의한 후 이를 최소화하는 파라미터 벡터 $\hat{\theta}(k)$ 를 구한다.

$$J(\hat{\theta}(k)) = [v^*(k-1)]^2 + v^2(k) + [\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)]^T M^{-1} [\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)] \tag{24}$$

式(24)에서 行列 M은 對角線 行列로 다음과 같다.

$$M = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mu_n & & & \\ & & & \rho_0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \rho_n & & \\ & & & & & & & \sigma_1 & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \sigma_n \end{bmatrix} \tag{25}$$

式(25)에서 μ_i, ρ_j, σ_i 은 $\hat{a}_i(k), \hat{b}_j(k), \hat{c}_i(k)$ 를 적응시키기 위한 適應利得이다.

$J(\hat{\theta}(k))$ 를 最小化하는 $\hat{\theta}(k)$ 를 구하기 위해 式(23)을 $\hat{\theta}(k)$ 로 편미분 하여 零으로 한다.

$$\frac{\partial J(\hat{\theta}(k))}{\partial \hat{\theta}(k)} = 2v^*(k-1) \phi^*(k-1) - 2v(k) \hat{\phi}(k) + 2M^{-1}(\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)) = 0 \tag{26}$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + M[v^*(k-1) \phi^*(k-1) + v(k) \hat{\phi}(k)] \tag{27}$$

式(27)에서 $v^*(k-1)$ 및 $v(k)$ 는 $\hat{\theta}(k)$ 의 함수이므로 $\hat{\theta}(k)$ 를 구하기 위해서는 逆行列 계산이 요구된다. 이를 피하기 위해 $v^*(k-1), v(k)$ 에 대한 스칼라 순환식으로 끌어서 유도된 결과식이 다음과 같다.

$$\hat{a}_i(k) = \hat{a}_i(k-1) + \frac{\mu_i [D(k) y^*(k-i-1) - E(k) y(k-i)]}{F(k)}$$

$$\eta^*(k-1) + \frac{\mu_i [D^*(k-1) \hat{y}(k-i) - E(k) y^*(k-i-1)]}{F(k)}$$

$$\eta(k) \tag{28}$$

$$\hat{b}_j(k) = \hat{b}_j(k-1) + \frac{\rho_j [D(k)x(k-j-1) - E(k)x(k-j)]}{F(k)} \eta^*(k-1)$$

$$+ \frac{\rho_j [D^*(k-1)x(k-j) - E(k)x(k-j-1)]}{F(k)} \eta(k) \tag{29}$$

$$\hat{c}_i(k) = \hat{c}_i(k-1) - \frac{\gamma_i [D(k) \epsilon^*(k-l-1) - E(k) \epsilon(k-l)]}{F(k)} \eta^*(k-1)$$

$$- \frac{\gamma_i [D^*(k-1) \epsilon(k-l) - E(k) \epsilon^*(k-l-1)]}{F(k)} \eta(k) \tag{30}$$

단, 式(28)~(30)에서

$$\begin{aligned} D(k) &= 1 + \sum_{i=1}^n \mu_i \hat{y}^2(k-i) + \sum_{j=0}^m \rho_j x^2(k-j) \\ &\quad + \sum_{l=1}^n \gamma_l \epsilon^2(k-l) \end{aligned} \tag{31}$$

$$D^*(k-1) = 1 + \sum_{i=1}^n \mu_i y^*(k-i-1)^2 + \sum_{j=0}^m \rho_j x^2(k-j-1) + \sum_{l=1}^n \gamma_l \epsilon^{*2} \epsilon^{*2}(k-l-1) \quad (32)$$

$$E(k) = \sum_{i=1}^n \mu_i y^*(k-i-1) \hat{y}(k-i) + \sum_{j=0}^m \rho_j x(k-j-1) x(k-j) + \sum_{l=1}^n \gamma_l \epsilon^{*2}(k-l-1) \epsilon(k-\rho) \quad (33)$$

$$F(k) = D(k) D^*(k-1) - E^2(k) \quad (34)$$

式(28)~(34)의 상세한 유도과정은 참고문헌 7), 8), 9)를 참고하였다.

4. 電算 시뮬레이션 및 檢討

前節에서 설명된 알고리즘을 이용하여 入力 $x(k)$ 및 원하는 出力 $y(k)$ 를 각각 (5)式, (6)式과 같이 주어 IIR 디지털 LPF, BPF, HPF를 設計하였다. 세 경우, 모두 $N=17$ 로 하였으며 c_i 의 값은 全帶域에서 0.2로 하였으며 θ_i 는 全帶域에서 線型이 되게 하였다. d_i 의 값은 LPF의 경우 통과대역($N=1$

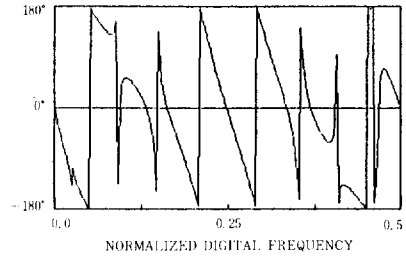
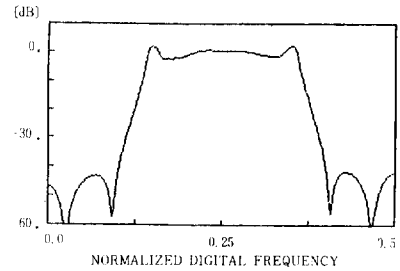


그림 7. IIR BPF

a) 이득 b) 위상

Fig. 7. IIR BPF

a) gain b) phase

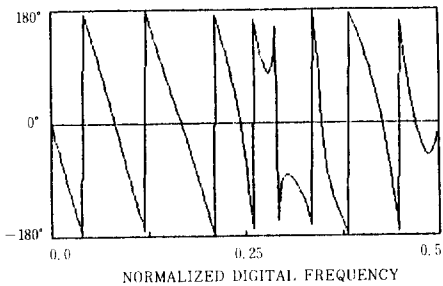
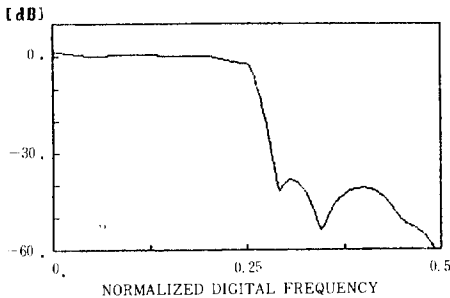


그림 6. IIR LPF

a) 이득 b) 위상

Fig. 6. IIR LPF

a) gain b) phase

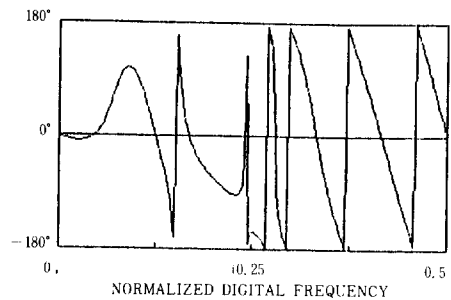
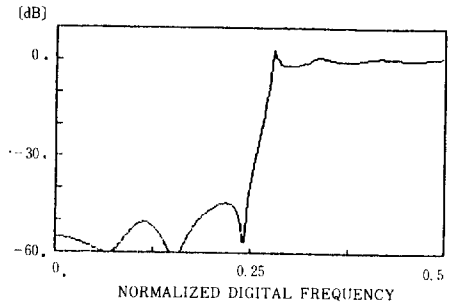


그림 8. IIR HPF

a) 이득 b) 위상

Fig. 8. IIR HPF

a) gain b) phase

~8)에서 $d_i = 5$, 저지대역($N=9\sim 17$)에서 $d_i = 0$, BPF의 경우 통과대역($N=6\sim 12$)에서 $d_i = 5$ 저지대역에서 $d_i = 0$, HPF의 경우 통과대역($N=10\sim 17$)에서 $d_i = 5$ 저지대역에서 $d_i = 0$ 로 하였다.

이와같이 설계 사양을 주어 適應적으로 설계된 필터의 이득 및 위상特性은 각각 그림 6, 그림 7, 그림 8과 같다.

이 세 경우 모두 적응 필터 전달함수의 분모, 분자 次數 및 보상기의 次數를 10次로 하였으며 적응 이득은 $\mu_1 = \dots = \mu_{10} = 10$, $\rho_0 = \dots = \rho_{10} = 10$, $\gamma_1 = \dots = \gamma_{10} = 0.1$ 로 하였다. 그림 6, 7, 8로 부터 설계된 필터의 特性은 통과대역이 평탄하며 저지대역에서 감쇄가 $-40[\text{dB}]$ 이하 임을 알수 있고 위상은 통과대역에서 아주 線型的임을 알수 있다.

설계 과정중 c_i 의 값을 어떠한 방법으로 주느냐에 따라 필터의 특성 특히 利得特性이 變化함을 알수 있었다.

5. 結 論

方程式 誤差方法으로 IIR 디지털 필터를 설계할 경우 極點이 z-平面 |z|=1에서 단위원 밖으로 나갈수가 있어 필터가 不安定하게 된다. 이를 보완하기 위해 본 論文에는 SPR 조건을 만족하는 適應補償器를 가지는 出力 誤差方法을 利用하여 IIR 디지털 필터를 설계하였다. 시뮬레이션 결과 통과대역에서 位相特性이 線型的임을 알수 있었으며 저지대역에서 감쇄가 $-40[\text{dB}]$ 이하임을 알수 있었다. 설계 사양

중에 특히 入力의 振幅값을 주는 方法에 關係 연구할 필요가 있다.

REFERENCE

- 1) L.R. Rabiner, B.Gold, Theory and application of digital signal processing, Prentice-Hall, 1975.
- 2) B. Widrow, S.D. Stearns, Adaptive signal processing, Prentice-Hall, 1985.
- 3) 이종각, 신호 및 시스템의 기초, 문운당, 1986.
- 4) B. Widrow, R-P. Gooch, "Adaptive design of digital filters", IEEE ICASSP, pp. 243-246, 1981.
- 5) M.G. Larimore, "SHARF: An algorithm for adapting IIR Digital Filters," IEEE Trans. Assp, Vol Assp-28, No. 4, pp. 428~440, Aug. 1980.
- 6) C.R. Johnson, "A convergence proof for a hyperstable adaptive recursive filter," IEEE Trans. Informction theory, Vol. IT-25, No. 6, pp. 745~749. Nov. 1979.
- 7) Y.D. Landau, Adaptive control, Marcel Dekker, 1979.
- 8) 신윤기, "적응신호처리를 위한 새로운 적응필터 알고리즘 및 그의 응용에 관한연구" 서울대학교 박사학위논문 1987.
- 9) Y.D. Landau, "Elimination of the real positive condition in the design of parallel MRAS", IEEE Trans. Automatic control, Vol. AC-23, No. 6, pp. 1015~1020, Dec. 1978.