

# 有限要素法 및 境界積分法の 混合法에 의한 開 領域 磁場問題 解析

## A Composite Method of Finite Element and of Boundary Integral Methods for the Magnetic Field Problems with Open Boundary

鄭 炫 教\* · 韓 松 曄\*\*  
(Hyun-kyo Jung · Song-yop Hahn)

### Abstract

A Composite method of finite element and boundary integral methods is introduced to solve the magnetostatic field problems with open boundary. Only the region of prime interest is taken as the computation region where the finite element method is applied. The boundary conditions of the region are dealt with using boundary integral method. The boundary integration in the boundary integral method is done by numerical and analytical techniques, respectively.

The proposed method is applied to a simple linear problem, and the results are compared with those of the finite element method and the analytic solutions. It is concluded that the proposed method gives more accurate results than the finite element method under the same computing efforts.

### 1. 序 論

電磁場問題 解析에 있어서 사용되고 있는 數值解析 方法은 크게 두 종류로 분류할 수 있다. 하나는 有限要素法과 같은 微分形의 접근方法<sup>1,2</sup>이고 다른 하나는 境界積分法과 같은 積分形의 접근方法이다.<sup>3,4</sup> 有限要素法과 境界積分法은 모두 강력한 數值解析法들이다. 그러나 有限要素法을 開 領域 問題에 適用시키는데 있어서는 어려운 문제點이 생긴다. 즉 有限要素法은 非線型 및 非均質의 問題를 비교적 쉽게 처리할 수 있고, 係數매트릭스가 解析하기 좋은 형태가 된다는 장점을 갖고 있지만, 線型方程式의

階數가 크게 되고 관심의 대상이 안되는 領域까지도 計算領域에 包含시켜야 한다. 따라서 開 領域 問題에서는 境界 設定이 어렵고, 願하는 程度의 精確한 解를 얻기 위해서는 計算노력을 많이 들여야 한다. 그러나 境界積分法은 이러한 有限要素法의 단점을 보완해 줄 수 있는 장점을 갖고 있다. 즉, 境界積分法에 의한 係數매트릭스 內의 元素들은 大部分 零이 아니지만 線型方程式의 階數가 有限要素法에 의한 것보다 매우 작다. 本 論文에서는 이 두 方法을 混合 適用시키는 알고리즘을 제시한다. 즉 관심의 대상이 되는 領域만을 計算領域으로 취하여 有限要素法으로 처리하고, 그 이외의 無限領域을 境界積分法으로 처리하여 計算領域의 境界條件에 包含시킨다.

本 알고리즘의 有用도를 검토하기 위하여 이 알고리즘을 線型 2次元 定常磁界問題에 適用하여 얻은 결과를 解析의인 解 및 有限要素法만을 適用하여 얻은 結果와 比較하여 보았다.

\* 正會員: 江原大 工大 電氣工學科 助教授·工博  
 \*\* 正會員: 서울대 工大 電氣工學科 教授·工博  
 接受日字: 1986年 11月 4日  
 1次修正: 1987年 1月 26日  
 2次修正: 1987年 3月 18日  
 3次修正: 1987年 5月 1日

2. 시스템方程式 및 境界條件

靜磁場問題를 磁氣벡터포텐셜  $A$ 를 使用하여 數式化하면 다음과 같은 편미분方程式을 얻을 수 있다.<sup>9</sup>

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times A \right) = J \quad (1)$$

線型 2次元 問題를 풀기 위해서  $A$  및 電流密度  $J$ 를  $z$ -축( $z$ ) 방향의 成分, 즉  $A = A\hat{z}$  및  $J = J\hat{z}$  라고 假定하면 式(1)은

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -J \quad (2)$$

로 된다.

전체 領域을 두 領域, 즉 有限要素領域 및 境界積分領域으로 나눈다. (그림 1.) 有限要素領域은 磁界源 및 非線型매질 등을 포함하는 관심의 대상이 되는 領域으로, 또한 境界積分領域은 無限 자유공간으로써 設定한다. 즉 磁界를 알고자 하는 領域만을 有限要素領域으로 취한다. 그리고 두 領域사이의 境界條件은

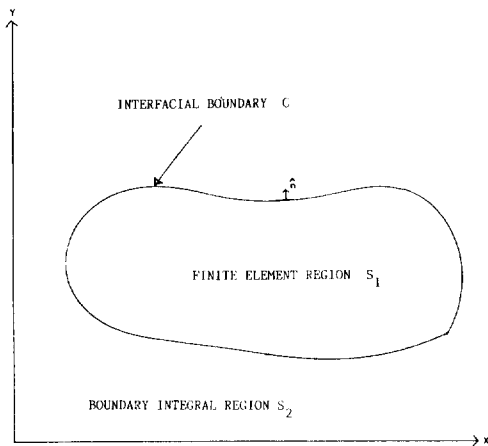


그림 1. 계산영역 분할

Fig. 1. Division of computing region.

$$A_1 = A_2 \quad (3)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_1}{\partial n} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_2}{\partial n} \quad (4)$$

와 같이 주어진다. 여기서  $A_1$ 과  $A_2$ 는 각 領域에서 벡터포텐셜이고  $\partial A / \partial n$ 은 境界에서의 수직도함수를 나타낸다.

3. 有限要素法の 適用

本 論文에서는 Galerkin法에 의한 有限要素 근사過程을 전개하고자 한다.<sup>6</sup> 式(2)에  $A$ 대신 근사解  $\bar{A}$ 를 代入하면 誤차가 생긴다. 즉,

$$R = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \bar{A}}{\partial y} \right) + J \quad (5)$$

$R$ 는 殘差(Residual)라고도 불리며, 이것을 最小化하기 위해 有限要素領域  $S_1$ 에 대한 加重積分값을 零으로 한다.

$$\iint_{S_1} W \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \bar{A}}{\partial y} \right) + J \right] ds = 0 \quad (6)$$

여기서  $W$ 는 가중함수(Weighting function)이다. Galerkin法에서는  $\bar{A}$ 의 보간함수를 가중함수로 사용한다.

요소를 1次 三角型要素로 취하면 벡터포텐셜  $\bar{A}$ 는

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^3 N_i A_i \quad (7)$$

로 표시할 수 있다. 여기서  $A_i$ 는 頂點포텐셜이고  $N_i$ 는 보간함수(Interpolation function)이다. 式(6)에 그린(Green)의 公式

$$\iint_{S_1} u \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} v) ds = - \iint_{S_1} k (\vec{\nabla} u) \cdot (\vec{\nabla} v) ds + \int_C k u \frac{\partial v}{\partial n} dc \quad (8)$$

을 適用시키고 式(7)의  $\bar{A}$ 를 代入하면 한 要素의 頂點  $i$ 에 대해서

$$\frac{1}{\mu^e} \iint_{S_1^e} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \bar{A}}{\partial y} \right) ds - \frac{1}{\mu^e} \int_C \left( \frac{\partial \bar{A}}{\partial n} \right) N_i dc = \iint_{S_1^e} J^e N_i ds \quad (9)$$

와 같이 된다. 式(9)와 같은 式을 要素의 세 頂點  $i, j, k$ 에 대해 얻은 후 적분하면 각 積分項은<sup>6)</sup>

$$\frac{1}{\mu^e} \iint_{S_1^e} \left( \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial \bar{A}}{\partial y} \right) ds = \frac{1}{4\mu^e \Delta^e} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ & & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$- \frac{1}{\mu^e} \left( \frac{\partial \bar{A}}{\partial n} \right)_e \int_C N dc = - \frac{1}{\mu^e} \left( \frac{\partial \bar{A}}{\partial n} \right)_e \begin{bmatrix} 0 \\ L^e / 2 \\ L^e / 2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\iint_{S^e} J^e N \, ds = \frac{J^e \Delta^e}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

와 같이 된다. 여기서  $b_i = y_j - y_k$ ,  $c_i = x_k - x_j$ ,  $\Delta^e = (b_i c_j - b_j c_i)/2$ 이다.  $b_j$ ,  $c_j$ ,  $b_k$ ,  $c_k$ 도  $b_i$ ,  $c_i$ 와 같은 형태로 표현된다. 그리고  $L^e$ 는 경계의 일부인 요소의 변의 길이이다.  $\mu^e$ 와  $J^e$ 는 각각 요소의 투자율 및 電流密度이다. 식(11)은 두 領域의 共有境界를 包含하는 요소에 대해서만 나타난다. 즉,  $(\frac{\partial \bar{A}}{\partial n})_e$ 는 共有境界에 속한 변  $C^e$ 에서의  $\frac{\partial \bar{A}}{\partial n}$ 의 값이다. 三角形要素의 나머지 두 변에 대한 境界積分은 인접한 요소에 의한 것과 서로 상쇄된다.

식(10), (11)과 (12)로부터 要素 매트릭스 方程式을 얻게 되며, 모든 요소에 適用시켜 얻은 式들을 조합하여 다음과 같이 시스템 매트릭스 方程式을 얻을 수 있다.

$$[S_F][A_F] + [Q_F][\Psi] = [F] \quad (13)$$

여기서,  $[S_F]$ :  $(N \times N)$  계수 매트릭스  
 $[A_F]$ :  $(N \times 1)$  頂點 포텐셜 벡터  
 $[Q_F]$ :  $(ND \times NE)$  계수 매트릭스  
 $[\Psi]$ :  $(NE \times 1)$  共有境界의 磁束 벡터  
 $[F]$ :  $(N \times 1)$  頂點의 驅動 매트릭스  
 $N$ : 영역  $S_1$ 과 境界  $C$  위의 전체 頂點數  
 $ND$ : 共有境界 위의 頂點數  
 $NE$ : 共有境界를 包含한 要素數  
 식(13)은 適當한 境界條件만 주어지면 計算될 수 있는 式이다.

#### 4. 境界積分法の 適用

境界積分領域은 磁界源이 없는 均質의 領域이므로 식(2)는 라플라스 方程式이 된다. 즉,

$$\nabla^2 A = 0, \quad (14)$$

그림1.의 境界  $C$  위에서 식(14)의  $A$ 를 구하기 위하여, 다음과 같은 그린函數를 생각한다.<sup>7)</sup>

$$G = -\frac{1}{2\pi} \ln(\gamma) \quad (15)$$

여기서,  $\gamma = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ 이다.  $(x, y)$ 와  $(\xi, \eta)$ 는 각각 磁界를 구하려는 點과 磁界源이 存在하는 點이다. 식(15)는 다음의 식(16)의 解이다.

$$\nabla^2 G = \begin{cases} 0, & \gamma \neq 0, \\ \infty, & \gamma = 0 \end{cases} \quad (16)$$

式(14)에  $G$ 를 곱하고 式(16)에  $A$ 를 곱한 후 그 差를 領域  $S_2$ 에 대해 積分하면

$$\iint_{S_2} [G \nabla^2 A - A \nabla^2 G] \, ds = 0 \quad (17)$$

로 된다. 式(17)에 그린정리를 適用시키면

$$\int_C \left( G \frac{\partial A}{\partial n} - A \frac{\partial G}{\partial n} \right) \, dc + \int_{C'} \left( G \frac{\partial A}{\partial n'} - A \frac{\partial G}{\partial n'} \right) \, dc = 0 \quad (18)$$

와 같이 된다. 여기서 그림2.의  $C'$ 에 대한 積分은  $\gamma = 0$ 일때 存在하는 특이點(Singularity)을 피하기 위함이다. 式(18)의 두 積分項에 式(15)의  $G$ 를 代入하면  $A(x, y)$ 는(부록 I 참조)

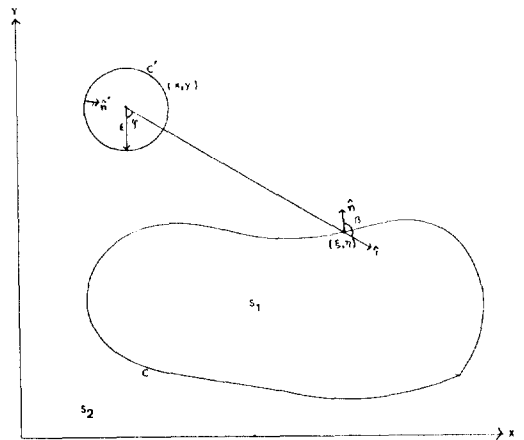


그림 2. 境界적분영역 내의 點  $(x, y)$   
 Fig. 2. Field point located in boundary integral region.

$$A(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left[ -A \frac{\cos(\beta)}{\gamma} + \frac{\partial A}{\partial n} \ln(\gamma) \right] \, dc \quad (19)$$

여기서,  $-\cos(\beta)/\gamma = 2\pi \cdot \frac{\partial G}{\partial n}$ 이다. 式(19)에서 境界  $C$ 위, 그림3.의 한 點  $i$ 에 대해서는

$$(2\pi - \theta_i) A(x_i, y_i) + \int_C \left[ A \frac{\cos(\beta)}{\gamma} - \frac{\partial A}{\partial n} \ln(\gamma) \right] \, dc = 0 \quad (20)$$

인 式을 얻게 된다. (부록 II 참조) 式(20)의 境界積

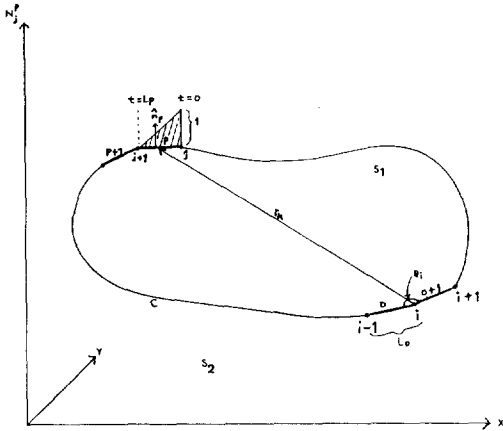


그림 3. 경계적분을 위한 분할  
Fig. 3. Boundary integral discretization.

분을 위한 경로 C는 有限要素領域 内の 要素들의 세 변중 한 변인 선분들로 構成되어 있으므로 A는 식(7)의 表現을 쓸 수 있고  $\partial A/\partial n$ 은 한 선분 內에서 常數이다. 따라서 그림3.의 點 i에 대한 식(20)은

$$(2\pi - \theta_i) A_i + \sum_{b=1}^{NE} \left\{ \int_{C_b} [N_i^b N_{j+1}^b] \left[ \begin{matrix} A_j \\ A_{j+1} \end{matrix} \right] \frac{\cos(\beta)}{\gamma} dc - \left( \frac{\partial A}{\partial n} \right)_b \int_{C_b} \ln(\gamma) dc \right\} = 0 \quad (21)$$

로 된다. 여기서  $N_i^b$ 와  $N_{j+1}^b$ 는 보간函數이며, NE는 C위의 전체 要素數이다. 식(21)의 積分項을 積分公式들을 이용하여 積分하면<sup>(8),(9)</sup> 식(21)로 부터 다음과 같은 式들을 얻을 수 있다.

선분 0에 대해서는,

$$\begin{bmatrix} 0 & S_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{i-1} \\ A_i \end{bmatrix} + [q_i^p] \left( \frac{\partial A}{\partial n} \right)_0 \quad (22)$$

선분 p에 대해서는,

$$\begin{bmatrix} S_{ii} & S_{i,j+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_j \\ A_{j+1} \end{bmatrix} + [q_i^p] \left( \frac{\partial A}{\partial n} \right)_p \quad (23)$$

여기서,  $S_{ii} = (2\pi - \theta_i)/2$

$$q_i^p = L_p [1 - \ln(L_p)]$$

$$q_i^p = -L_p \left[ (1 + b/2c) \ln(a + b + c) - 4 + (1 - b/2c) \ln(c - b + a) + \sqrt{D} (\tan^{-1}(2c + b)/\sqrt{D}) - \tan^{-1}((b - 2c)/\sqrt{D}) \right] / c / 4$$

$$\begin{aligned} S_{ii} &= L_p (a'I_1 + b'I_2 + c'I_3) / 4 \\ S_{i,j+1} &= L_p (a''I_1 + b''I_2 + c''I_3) / 4 \\ I_1 &= 2 \left[ \tan^{-1}((2c + b)/\sqrt{D}) - \tan^{-1}((b - 2c)/\sqrt{D}) \right] / \sqrt{D} \\ I_2 &= [\ln((a + b + c)/(a - b + c)) - bI_1] / 2c \\ I_3 &= [2 - \{b \ln((a + b + c)/(a - b + c))\} / 2c + (b^2 - 2ac)I_1 / 2c] / c \\ a &= [(x_{j+1} + x_j - 2x_i)^2 + (y_{j+1} - y_j - 2y_i)^2] / 4 \\ b &= [(x_{j+1} - x_j)(x_{j+1} + x_j - 2x_i) + (y_{j+1} - y_j)(y_{j+1} + y_j - 2y_i)] / 2 \\ c &= [(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2] / 4 \\ D &= 4ac - b^2 \\ a' &= n_{xp} [(x_{j+1} + x_j) / 2 - x_i] + n_{yp} [(y_{j+1} + y_j) / 2 - y_i] \\ b' &= n_{xp} (x_i - x_j) + n_{yp} (y_i - y_j) \\ c' &= [n_{xp} (x_j - x_{j+1}) + n_{yp} (y_j - y_{j+1})] / 2 \\ a'' &= a', \quad b'' = n_{xp} (x_{j+1} - x_i) + n_{yp} (y_{j+1} - y_i), \\ c'' &= -c' \\ \hat{n}_p &= n_{xp} \hat{x} + n_{yp} \hat{y} \end{aligned}$$

또한  $S_{ii}$ ,  $S_{i,j+1}$ , 및  $q_i^p$ 를 다음과 같이 수치적분<sup>(10)</sup>하여 구할 수 있다.

$$S_{ii} = (L_p/4) \sum_{k=1}^3 [w_k (1 - z_k) \cos(\beta_k)] / \gamma_k$$

$$S_{i,j+1} = (L_p/4) \sum_{k=1}^3 [w_k (1 + z_k) \cos(\beta_k)] / \gamma_k$$

$$q_i^p = -(L_p/2) \sum_{k=1}^3 [w_k \ln(\gamma_k)]$$

$$\gamma_k = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

$$\cos(\beta_k) = [(x - x_i)n_{xp} + (y - y_i)n_{yp}] / \gamma_k$$

$$x = [(1 - z_k)x_j + (1 + z_k)x_{j+1}] / 2,$$

$$y = [(1 - z_k)y_j + (1 + z_k)y_{j+1}] / 2$$

$$z_1 = -0.77459667, \quad z_2 = 0.0, \quad z_3 = -z_1$$

$$w_1 = 0.55555556, \quad w_2 = 0.88888889, \quad w_3 = w_1$$

식(21)을 C위의 모든 頂點에 適用시킨 結果를 조합하면, 다음과 같은 線型 매트릭스 方程式을 얻을 수 있다.

$$[S_i][A_i] + [Q_i][\Psi] = 0 \quad (24)$$

여기서,  $[S_i]$ : (ND×ND) 계수 매트릭스

$[A_i]$ : (ND×1) 共有境界 위의 頂點포텐셜 벡터

$[Q_i]$ : (ND×NE) 계수 매트릭스

그리고  $[\Psi]$ 는 식(13)의  $[\Psi]$ 와 같다.

5. 混合適用過程

앞서 언급한 바와 같이 式(13)은 境界條件이 주어  
져야만 풀 수 있는 方程式이다. 이 境界條件을 混  
合法에서는 式(24)를 이용하여 附與하자는 것이다.

共有境界面에서 境界條件인 式(3)과 (4)를 適用하  
면 式(24)의  $[A_i]$ 는 式(13)의  $[A_F]$ 의 일부가 되고, 두  
式의  $[\Psi]$ 는 같다. 그러므로 式(24)로부터  $[\Psi]$ 를 구  
하여 式(13)에 代入하게 된다. 그런데 구할려는 미  
지수의 개수보다 方程式의 개수가 많은 경우이므로  
最小제곱법을 사용한다.<sup>12)</sup> 즉, 먼저  $[Q_i]$ 의 전치행  
列  $[Q_i]^t$ 를 式(24)의 양 변에 곱한 후 정리하면

$$[P_i][\Psi] = -[Q_i]^t[S_i][A_i] \tag{25}$$

여기서,  $[P_i] = [Q_i]^t[Q_i]$ :  $(NE \times NE)$ 계수 매트릭스  
따라서  $[P_i]$ 의 역行列  $[P_i]^{-1}$ 를 式(25)의 양 변  
에 곱하면  $[\Psi]$ 는 다음과 같다.

$$[\Psi] = -[P_i]^{-1}[Q_i]^t[S_i][A_i] \tag{25}$$

式(25)를 式(13)에 代入하면

$$[S_F][A_F] + [P_F][A_i] = [F] \tag{26}$$

이다. 여기서,  $[P_F] = -[Q_F][P_i]^{-1}[Q_i]^t[S_i]$  로  
서  $(ND \times ND)$ 계수 매트릭스이다. 따라서  $[A_i]$  는  
 $[A_F]$ 의 元素의 一部이므로  $[P_F]$ 의 元素들은  $[S_F]$   
의 元素들에 삽입시킬 수 있다.

式(26)으로부터 최종적으로

$$[S][A_F] = [F] \tag{25}$$

인 式을 얻는다. 여기서  $[S]$ 는 역시  $(N \times N)$  계수  
매트릭스이다. 式(25)를 풀면 구하고자 하는 포텐셜  
값을 얻게 된다.

6. 事例研究

本 論文에서의 알고리즘을 이용하여 그림4.의 자  
유공간 內的 왕복 導體電流모델을 解析하였다. 導  
體의 길이는 無限하고 導體에 흐르는 電流는 均  
하다고 假定하였다. 각 導體의 반경은 0.1[m]이고  
導體 中心간의 거리는 0.4[m]이다. 導體에 흐르는  
電流의 세기는 각각  $-1[A]$  및  $1[A]$ 이다. 그리  
고 導體의 비투자율은 1이다.

그림5.는 混合法을 適用시키기 위한 要素分割이  
고 그림6.은 有限要素法만을 適用시키기 위한 要素  
分割이다. 그림6.에서는 그림5.보다 포텐셜값을 모

르는 頂點數를 20개 더 잡았으며, 境界조건으로  $A$   
 $= 0$ 을 附與하였다. 즉 그림6.의 경우는 그림5.에  
서 보다 計算노력을 더 들여야 하는 경우이다.

그림7. 및 그림8.은 共有境界 위에서의 포텐셜값  
들을 비교한 것이다. 本 論文의 알고리즘에 의한  
결과는 解析的인 解<sup>13)</sup>와 비교적 잘 일치하였으며,  
有限要素法の 결과보다 計算노력을 덜 들여서도 더  
正確한 結果를 얻을 수 있었다. 混合法의 알고리즘  
중 解析積分에 의한 알고리즘의 結果는 그림7.에서  
볼 수 있듯이 대체로 매우 正確하였지만 포텐셜값  
이 작은 곳에서 오차가 크다. 반면에 수치積分 알  
고리즘에 의한 結果는 포텐셜값이 작은 곳에서 매  
우 正確하였다.

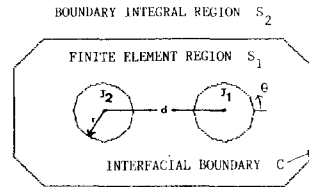


그림 4. 왕복전류의 도체  
Fig. 4. Two current-carrying conductors.

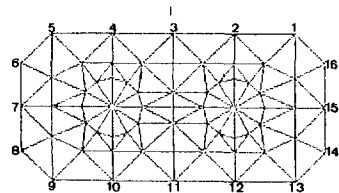


그림 5. 혼합법 적용을 위한 요소분할  
Fig. 5. Element discretization for composite method.

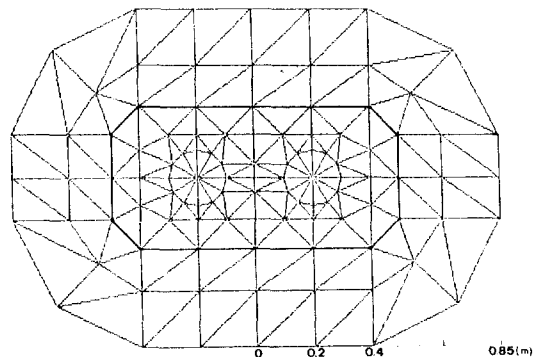


그림 6. 유한요소법 적용을 위한 요소분할  
Fig. 6. Element discretization for finite  
element method.

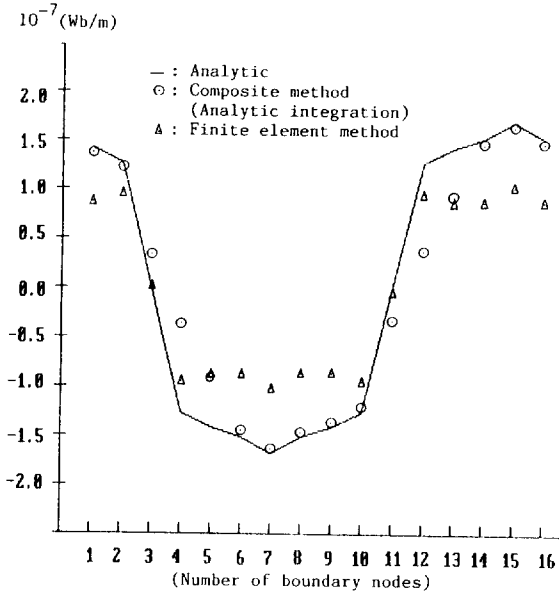


그림 7. 공유경계면에서의 자기벡터포텐셜 값(1)  
Fig. 7. Magnetic vector potentials at the interfacial boundary (1).

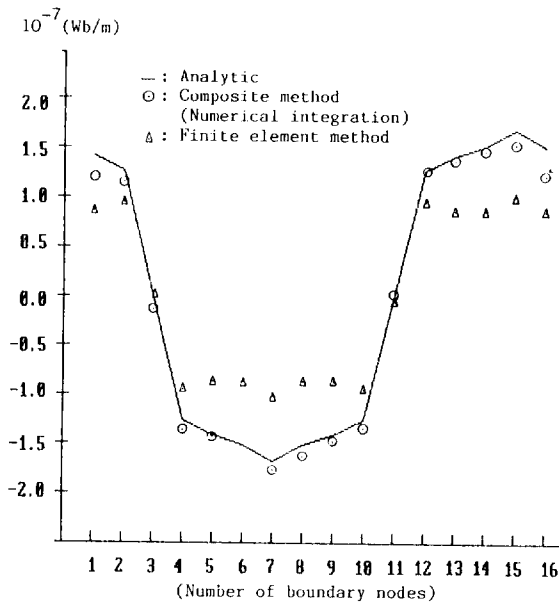


그림 8. 공유경계면에서의 자기벡터포텐셜 값(2)  
Fig. 8. Magnetic vector potentials at the interfacial boundary (2).

No. of flux lines: 21.4886  
3.694737E-08 (Wb/m/Line)

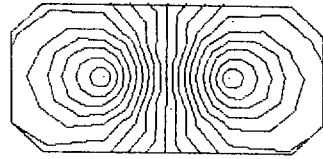


그림 9. 혼합법에 의한 자속분포  
Fig. 9. Magnetic flux distribution by composite method.

No. of flux lines: 20  
3.694737E-08 (Wb/m/Line)

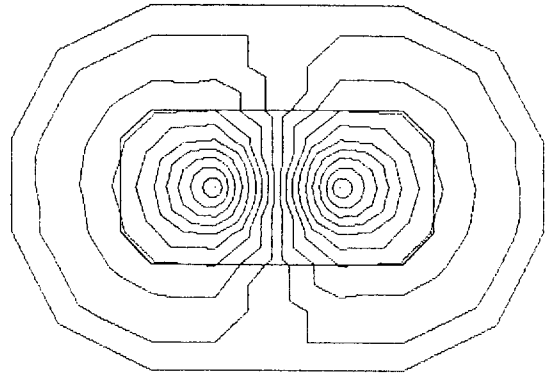


그림 10. 유한요소법에 의한 자속분포  
Fig. 10. Magnetic flux distribution by finite element method.

그림 9.와 그림 10.은 각각 混合法 및 有限要素法에 의한 磁束分佈圖이다. 2次元 問題에서 磁束分佈圖는 등 포텐셜선을 그림으로써 얻을 수 있는데, 여기서는 포텐셜값의 간격을 두 경우 같게 놓고 그린 것이다. 그림으로 부터 알 수 있듯이 有限要素法에 의한 것은 20개인 반면에 混合法에 의한 자속선 수는 21.49개이다. 공통된 部分의 磁束分佈를 살펴보면 有限要素法에 의한 것은 境界를 임의로 가까이 設定하여  $A=0$ 로 규정하였으므로 混合法에 의해 얻은 것 보다 더 内部로 밀집한 것을 알 수 있다.

### 6. 結 論

本 論文에서는 開 領域 靜磁場 2次元 問題를 解析할 수 있는 有限要素法 및 境界積分法의 混合法 알려리즘을 제시하였다. 境界積分하는 過程에서 解析積分 및 數值積分을 각각 사용하였다.

本 알고리즘을 자유공간 内の 왕복 導體電流 모델에 적용시켜 얻은 結果를 解析的인 解 및 有限要素法의 結果와 比較하였다. 本 方法에 의해서 計算 노력을 덜 들어서도 既存 方法보다 더 正確한 結果를 얻을 수 있었다. 또한 解析積分을 하는 알고리즘은 數值積分하는 것 보다 프로그램 상의 반복 計算횟수를 줄일 수 있었다. 이 효과는 境界 上的頂點數를 늘리면 더욱 클 것이다.

結論으로 本 論文에서 提示한 方法은 解析的으로 計算하기 어려운 開 領域 靜磁場 問題解析에 큰 도움이 될 것으로 사료된다.

본 연구는 한국과학재단 85년도 연구비 지원에 의해 이루어졌음을 알립니다.

(부록 I.)

그림1.에서 알 수 있듯이

$$\frac{\partial}{\partial n'} = -\frac{d}{dr} \tag{A-1}$$

$$dc = \epsilon \varphi \tag{A-2}$$

이므로 식(18)의 좌변의 두번 째 積分項은

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_C \left( G \frac{\partial A}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n'} \right) dc \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{dA}{dr} \Big|_{r=\epsilon} \epsilon \ln \epsilon + A \Big|_{r=\epsilon} \right) d\varphi \\ &= A(x, y) \end{aligned} \tag{A-3}$$

가 된다.

(부록 II)

점 (x, y)를 境界 C 위의 점 i (x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>)로 접근시키면 식(19)의 피적분항에 특이점이 생긴다. 이것을 피하기 위하여 점 i를 中心으로 하여 領域 S<sub>1</sub>에 半徑 ε인 원을 취하여 원주 C''을 積分經路로 한다. 따라서 식(19)는

$$\begin{aligned} 2\pi A(x_i, y_i) &= \int_C \left( -A \frac{\cos(\beta)}{r} + \frac{\partial A}{\partial n} \ln(r) \right) dc \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C''} \left( -A \frac{\cos(\beta)}{r} + \frac{\partial A}{\partial n} \ln(r) \right) dc \end{aligned} \tag{A-4}$$

와 같이 쓸 수 있다.

C''에서의 積分은

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C''} \left( -A \frac{\cos(\beta)}{r} + \frac{\partial A}{\partial n} \ln(r) \right) dc \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \left( A \Big|_{r=\epsilon} \frac{1}{\epsilon} + \frac{dA}{dr} \Big|_{r=\epsilon} \ln(\epsilon) \right) \epsilon d\varphi \\ &= \theta_i A(x_i, y_i) \end{aligned} \tag{A-5}$$

이므로 식(20)을 얻을 수 있다.

References

- 1) 이기식, "유한요소법에 의한 자기회로 해석", 대한전기학회지, 제29권, 제9호, 1980년 9월
- 2) 김인호, 정현교, 이기식, 한승엽, "유한요소법에 의한 교류자장 계산", 대한전기학회지, 제30권, 제7호, 1981년 7월
- 3) J.M. Schneider and S.J. Salon, "A boundary integral formulation of the eddy current problem", IEEE Trans. on Magnetics, Vol, MAG-16, No.5, September 1980
- 4) Ancelle B. and Sabonnadiere J.C., "Numerical solution of 30 magnetic field problems using boundary integral equations", ibid.
- 5) P.P. Silvester and R.L. Ferrari, Finite Elements for Electrical Engineers, Cambridge University Press, 1983
- 6) K.H. Heubner, The Finite Element for Engineers, John Wiley & Sons, Inc., 1975
- 7) G. Arfken, Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, New York, 1970
- 8) C.A. Brebbia, The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London, 1980
- 9) W.H. Beyer, Standard Mathematical Tables, CRC Press, West Palm Beach, 1978
- 10) B. Carnahan, Applied Numerical Methods, John Wiley & sons, Inc., New York, 1969
- 11) Milos Stafil, Electrodynamics of Electrical Machines, ILIFFE Books Ltd., London, 1967
- 12) In-ho Kim, Hyun-kyo Jung, Gi-shik Lee, and Song-yop Hahn, "Magnetic field computations by infinite elements", Journal of Applied Physics, Vol.53, pp. 8372-8374, November 1982 KSU4