

速度起電力을 갖는 電磁場方程式의 有限要素 解析

Finite Element Analysis of Electromagnetic Field Equation with Speed E. M. F.

韓 松 擘

(Song-Yop Hahn)

ABSTRACT

Time periodic finite element solutions for sinusoidally excited electromagnetic field problems in moving media are presented. Solutions by the Galerkin method contain spurious oscillations when grid Peclet number is more than one. To suppress these oscillations an upwind finite element method using two different time periodic test functions is introduced. One is multiplied to second and first-order space derivative terms and the other to the time derivative term. Test functions are obtained from trial functions by adding or subtracting quadratic bias functions with appropriate scaling factors. Phase differences are considered between trial functions and bias functions.

For simple interpretations of the phase differences, complex scaling factors are used. The proposed method is developed to give nodally exact solutions for uniform grid spacing in one dimensional problems. Based on the one dimensional results, a two dimensional upwinding scheme is also derived.

1. 序 論

많은 물리현상들은 수학적으로 2계 편미분 방정식으로 표현된다. 여기서 일계미분항의 값이 2계 미분항의 값보다 월등히 큰 경우 이 방정식을 有限要素法으로 풀면 그 解에는 假振動(spurious oscillation)이 포함된다. 이를 억제하기 위하여 유체 역학 또는 열전달 분야에서는 風上有限要素法(upwind finite element method)을 개발하게 되었다.^{1)~4)}

이와같은 현상은 운동하는 물체중의 電磁場方程式을 有限要素法으로 해석하는 경우에도 발생하고 있다. 즉 운동하는 물체중의 전자장방정식은 速度起電力項을 포함하고 있는데 이 값이 확산항의 값

보다 월등히 큰 경우 그 有限요소해 내에 假振動이 포함된다. 대표적인 예는 강철판으로 된 電磁브레이크⁵⁾, 강철판으로 보강된 2차를 갖는 직선형 유도전동기⁶⁾ 등이다. 여기서는 철의 투자율이 매우 크기 때문에 속도기전력항이 확산항에 비하여 월등히 크게된다. 여기서도 이 假振動을 억제하기 위하여 앞에서 언급한 風上有限要素法을 적용하였다.

본 연구에서는 정현파 교류전원으로 구동되는 전기기기 내에서의 가동부분의 전자장을 有限요소법으로 해석하는 문제를 다루었다. 문헌[6]에서와 같이 step-by-step법으로 취급할 수 있으나 이는 막대한 계산시간을 요하는 결점이 있어 새로운 風上有限要素法을 도입하였다.

電磁場方程式을 복소함수를 도입하여 주기해(time periodic solution)를 구할 수 있도록 변형하였으며 일차원모델에서 발전현상의 원인을 분석하고 이를 억제하기 위한 風上技法을 도출하였다. 加重殘

正 會 員 : 서울대 工大 電氣工學科 教授
 接受日字 : 1986年 12月 5日
 1次修正 : 1986年 1月 31日

差法을 이용하였는데 종전과 달리 2개의 시간주기 가중함수(time-periodic weighting function)를 사용하였다. 이 가중함수는 補間函數와 적절한 크기의 편중함수(bias function)를 加하거나 減하여 얻었고 이 편중함수의 크기 조절은 單位크기의 편중함수에 복소비율계수(complex scaling factor)를 곱하여 행하였다.

이 일차원 가중함수를 2차원으로 확장하고 이를 직선형 유도전동기에 적용하여 본 연구에서 제안된 風上計畵의 유용성을 검토하였다.

2. 시스템 方程式 및 假振動

速度起電力을 갖는 電磁場 方程式은

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{a} \right) = -\sigma \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \sigma (\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{a}) \quad (1)$$

여기서 \mathbf{a} 는 벡터포텐셜, μ, σ, \mathbf{v} 는 매질의 투자율, 도전율 및 운동속도이다. 방정식 (1)의 一次元 표현은

$$-\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{a}(x,t)}{\partial x^2} + \sigma v \frac{\partial \mathbf{a}(x,t)}{\partial x} + \sigma \frac{\partial \mathbf{a}(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

이고 여기서 $\mathbf{a}(x,t)$ 는 \mathbf{a} 의 z성분이고 v 는 \mathbf{v} 의 x성분이다. 식(2)에서 $\mathbf{a}(x,t)$ 가

$$\mathbf{a}(x,t) = \text{Re}\{\bar{\mathbf{A}}(x) e^{j\omega t}\} \quad (3)$$

와 같이 時間周期 함수이면 식 (2)는

$$-\frac{1}{\mu} \frac{d^2 \bar{\mathbf{A}}(x)}{dx^2} + \sigma v \frac{d\bar{\mathbf{A}}(x)}{dx} + j\omega \sigma \bar{\mathbf{A}}(x) = 0 \quad (4)$$

와 같이 될 수 있고 여기서 ω 는 전원의 角速度, $\bar{\mathbf{A}}(x)$ 는 복소수함수이다. 境界條件은 해석의 편의상

$$\begin{aligned} x=0 \text{에서 } \bar{\mathbf{A}}(x) &= \bar{\mathbf{A}}_0 \\ x=L \text{에서 } \bar{\mathbf{A}}(x) &= \bar{\mathbf{A}}_L \end{aligned} \quad (5)$$

과 같이 Dirichlet조건을 고려하였다.

식(4)의 엄밀해는

$$\bar{\mathbf{A}}(x) = c_1 e^{s_1 x} + c_2 e^{s_2 x} \quad (6)$$

이고 여기서

$$s_1, s_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + j4\epsilon\beta}}{2\epsilon} \quad (7)$$

이고 $\epsilon = 1/\mu\sigma v, \beta = \omega/v$ 이며 c_1 과 c_2 는 경계조건에

의하여, 결정되는 常數이다. 길이가 h 인 等間隔 要素網에서 i 번째 頂點의 解는

$$\bar{\mathbf{A}}_i = c_1 (e^{s_1 h})^i + c_2 (e^{s_2 h})^i \quad (8)$$

이 된다.

2.1 有限要素近似

加重殘差法을 式(2)에 적용하면

$$\int_0^{2\pi} \int_a W(x,t) \left\{ -\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{a}(x,t)}{\partial x^2} + \sigma v \frac{\partial \mathbf{a}(x,t)}{\partial x} + \sigma \frac{\partial \mathbf{a}(x,t)}{\partial t} \right\} dx dt = 0 \quad (9)$$

가 되고 여기서 $W(x,t)$ 는 境界에서 零이 되는 時間周期의 正規函數이다.

$$W(x,t) = \text{Re}\{\bar{W}(x) e^{j\omega t}\} \quad (10)$$

와 같이 정의하고 식(3)과 (10)을 식(9)에 대입하면

$$\int_a \bar{W}^*(x) \left\{ -\epsilon \frac{d^2 \bar{\mathbf{A}}(x)}{dx^2} + \frac{d\bar{\mathbf{A}}(x)}{dx} + j\beta \bar{\mathbf{A}}(x) \right\} dx = 0 \quad (11)$$

이고 여기서 $\bar{W}(x)$ 는 복소 加重函數이다.

Green定理를 적용한 후 $\bar{\mathbf{A}}(x)$ 및 $\bar{W}^*(x)$ 를

$$\bar{\mathbf{A}}(x) = \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{A}}_j \phi_j(x) \quad (12)$$

$$\bar{W}^*(x) = \{\bar{\psi}_1(x), \bar{\psi}_2(x), \dots, \bar{\psi}_N(x)\} \text{ 相互獨立} \quad (13)$$

로 정의하고 이를 식 (11)에 대입하면

$$\sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{A}}_j \int_a \left\{ \epsilon \frac{d\bar{\psi}_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} + \bar{\psi}_i \frac{d\phi_j}{dx} + j\beta \bar{\psi}_i \phi_j \right\} dx = 0, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (14)$$

이고 여기서 N 은 頂點수, ϕ_j 는 補間函數, $\bar{\psi}_i$ 는 試驗函數, $\bar{\mathbf{A}}_j$ 는 頂點의 포텐셜이다. 式(14)의 有限要素近似는

$$\sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{A}}_j \sum_{i=1}^N \int_a e^i \left\{ \epsilon \frac{d\bar{\psi}_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} + \bar{\psi}_i \frac{d\phi_j}{dx} + j\beta \bar{\psi}_i \phi_j \right\} dx = 0, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (15)$$

와 같이 된다. Galerkin법을 적용하고 보간 함수를 一次線形으로 취하면 要素行列은

$$\begin{bmatrix} \frac{\epsilon}{h} - \frac{1}{2} + j\beta \frac{h}{3} & -\frac{\epsilon}{h} + \frac{1}{2} + j\beta \frac{h}{6} \\ -\frac{\epsilon}{h} - \frac{1}{2} + j\beta \frac{h}{6} & \frac{\epsilon}{h} + \frac{1}{2} + j\beta \frac{h}{3} \end{bmatrix} \quad (16)$$

가 된다.

2.2 假振動 (spurious oscillation)

要素行列을 조립한 후 i 번째 行을 보면

$$\left(-\frac{\epsilon}{h} + \frac{1}{2} + j\frac{\beta h}{6}\right)\bar{A}_{i+1} + \left(\frac{2\epsilon}{h} + j\frac{2\beta h}{3}\right)\bar{A}_i + \left(-\frac{\epsilon}{h} - \frac{1}{2} + j\frac{\beta h}{6}\right)\bar{A}_{i-1} = 0 \quad (17)$$

이고 이 式의 一般解는

$$\bar{A}_i = C_1 \bar{R}_1^i + C_2 \bar{R}_2^i \quad (18)$$

이며 여기서,

$$\bar{R}_1, \bar{R}_2 = \frac{-\left(\frac{1}{p} + j\frac{2q}{3}\right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{q^2}{3}\right) + j\frac{2}{3}\frac{q}{p}}}{-\frac{1}{p} + 1 + j\frac{q}{3}} \quad (19)$$

$$p = h/2\epsilon, \quad q = \beta h \quad (20) (21)$$

이다.

Galerkin法이 式 (4)에 대하여 安定한 解를 주는 지를 예를 들어 알아보자. 그림 1은 $q=0.5\text{rad}$ 로 하고 요소Peclet數 p 를 변화시킨 경우 \bar{R}_1 및 \bar{R}_2 의 궤적을 나타낸다. 要素 Peclet數가 낮은 경우는 \bar{R}_1 및 \bar{R}_2 가 眞值 \bar{T}_1 및 \bar{T}_2 와 거의 一致하나 要素Peclet數가 높은 경우는 \bar{R}_2 가 \bar{T}_2 와 큰 차이를 나타내고 있다. 要素 Peclet數 p 가 높을 경우 \bar{R}_2 의 位相이 -180° 근방에 있기 때문에 式 (18)에서 第二項의 값이 i 가 홀수 또는 짝수에 따라 正 또는 負로 되어 解가 振動하게 된다. 이 진동의 발생 여부를 결정짓는 한계는 명확하지 않지만 대략 p 가 1보다

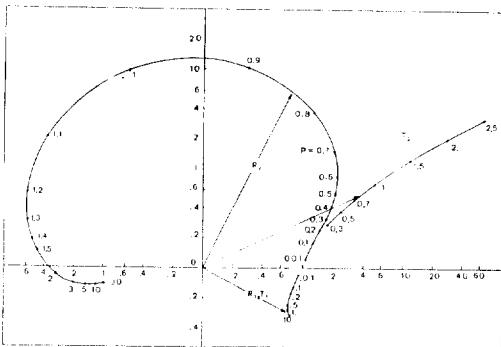


그림 1. p 의 변화에 따른 \bar{R}_1 및 \bar{R}_2 의 궤적 ($q=0.5$)
Fig.1. Locus of \bar{R}_1 and \bar{R}_2 for $q=0.5$ and different

크게 되면 진동현상이 나타난다고 볼 수 있다.

그림 2는 式 (4)를 Galerkin 有限要素法으로 풀어서 얻은 결과인데 예상했던 바와같이 要素Peclet數가 1보다 높은 경우 그 解속에서 假振動이 포함되어 있다.

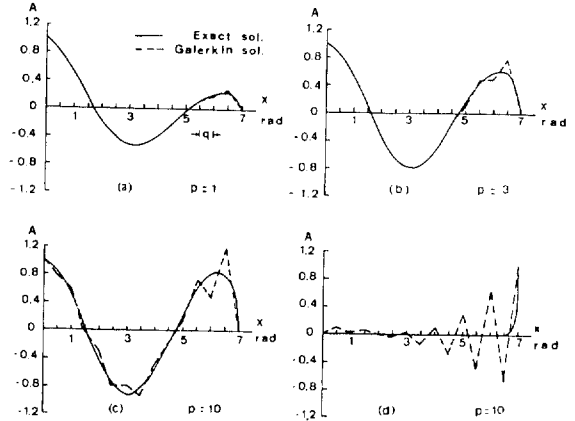


그림2. Galerkin 유한요소 해 ($q=0.5$)

Fig.2. Galerkin finite element solutions for $q=0.5$ and different p
(a), (b), (c) : $A(0)=1, A(L)=0$
(d) : $A(0)=0, A(L)=1$

3. 風上計劃 (upwind scheme)

式 (4)에 加重殘差法을 적용하면

$$\int_0^L \left\{ \bar{W}_1^*(x) \left(-\epsilon \frac{d^2 \bar{A}(x)}{dx^2} + \frac{d \bar{A}(x)}{dx} \right) + \bar{W}_2^*(x) j \beta \bar{A}(x) \right\} dx = 0 \quad (22)$$

이다. 여기서 $\bar{W}_1(x)$ 및 $\bar{W}_2(x)$ 는 加重函數이다. Green定理를 적용한 후

$$\bar{A}(x) = \sum_{j=1}^N \bar{A}_j \phi_j(x) \quad (23)$$

$$\bar{W}_1^*(x) = \{ \bar{\psi}_{11}(x), \bar{\psi}_{12}(x), \dots, \bar{\psi}_{1N}(x) \}; \text{相互獨立} \quad (24)$$

$$\bar{W}_2^*(x) = \{ \bar{\psi}_{21}(x), \bar{\psi}_{22}(x), \dots, \bar{\psi}_{2N}(x) \}; \text{相互獨立} \quad (25)$$

와 같이 정의하고 이들을 式 (22)에 대입하면

$$\sum_{j=1}^N \bar{A}_j \int_0^L \left\{ \epsilon \frac{d \bar{\psi}_{1i}}{dx} \frac{d \phi_j}{dx} + \bar{\psi}_{1i} \frac{d \phi_j}{dx} + j \beta \bar{\psi}_{2i} \phi_j \right\} dx = 0 \quad (26)$$

$i = 1, 2, \dots, N$

를 얻는다. 風上試驗函數는 그림 3과 같이 補間函

數에 2次바이어스함수⁷⁾를 加減하여 얻었는데 i번 제 頂點의 시험 함수는

$$\bar{\psi}_{1i} = \begin{cases} \phi_i + \bar{\lambda}_{1i} B_i^- & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \phi_i - \bar{\lambda}_{1i} B_i^+ & x_i \leq x \leq x_{i+1} \end{cases} \quad (27)$$

$$\bar{\psi}_{2i} = \begin{cases} \phi_i + \bar{\lambda}_{2i} B_i^- & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \phi_i - \bar{\lambda}_{2i} B_i^+ & x_i \leq x \leq x_{i+1} \end{cases} \quad (28)$$

와 같이 된다. 여기서

$$\begin{aligned} \phi_i &= \frac{x - x_{i-1}}{h_i} & \phi_i^* &= \frac{x_{i+1} - x}{h_i^*} \\ B_i^- &= \frac{3(x - x_{i-1})(x_i - x)}{(h_i)^2} \\ B_i^+ &= \frac{3(x_{i+1} - x)(x - x_i)}{(h_i^*)^2} \end{aligned} \quad (29)$$

이고 $\bar{\lambda}_{1i}, \bar{\lambda}_{1i}^*, \bar{\lambda}_{2i}, \bar{\lambda}_{2i}^*$ 는 복소비율계수(complex scaling factor), h_i, h_i^* 는 요소의 크기이다. 비율계수가 복소수인 것은 補間函數와 바이어스함수를 加減할 때 상호위상차의 변화도 고려하였기 때문이다.

式 (27)과 (28)을 式 (26)에 대입하고 有限要素近似를 통하여 要素行列

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\epsilon}{h} + \frac{\bar{\lambda}_1}{2} - \frac{1}{2} \right) + jq \left(\frac{1}{3} - \frac{\bar{\lambda}_2}{4} \right) \\ & \left(-\frac{\epsilon}{h} - \frac{1}{2} - \frac{\bar{\lambda}_1}{2} \right) + jq \left(\frac{1}{6} + \frac{\bar{\lambda}_2}{4} \right) \\ & \left(-\frac{\epsilon}{h} + \frac{1}{2} - \frac{\bar{\lambda}_1}{2} \right) + jq \left(\frac{1}{6} - \frac{\bar{\lambda}_2}{4} \right) \\ & \left(\frac{\epsilon}{h} + \frac{1}{2} + \frac{\bar{\lambda}_1}{2} \right) + jq \left(\frac{1}{3} + \frac{\bar{\lambda}_2}{4} \right) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

를 얻는다. 前節에서와 같이 수치해는

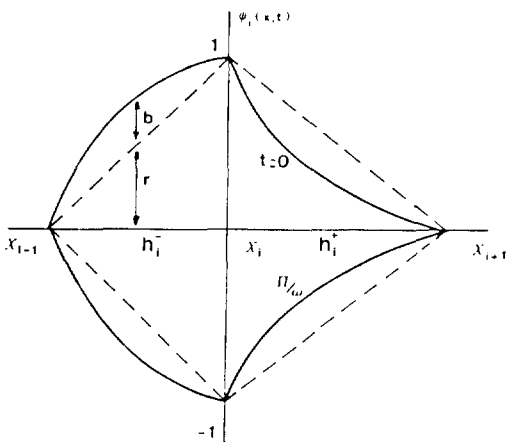


그림3. 2차편중함수로 加減된 가중함수
Fig.3. Quadratically biased weighting functions

$$A_i = C_1 \bar{R}_1^i + C_2 \bar{R}_2^i \quad (31)$$

과 같이 된다. 여기서

$$\bar{R}_1, \bar{R}_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - cd}}{d} \quad (32)$$

$$b = \left(\frac{1}{p} + \lambda_{1r} \right) + j \left(\lambda_{1i} + \frac{2}{3} q \right)$$

$$c = \left(-\frac{1}{p} - \lambda_{1r} - 1 - q \frac{\lambda_{2r}}{2} \right) + j \left[-\lambda_{1i} + q \left(\frac{1}{3} + \frac{\lambda_{2i}}{2} \right) \right] \quad (33)$$

$$d = \left(-\frac{1}{p} - \lambda_{1r} + 1 + q \frac{\lambda_{2r}}{2} \right) + j \left[-\lambda_{1i} + q \left(\frac{1}{3} - \frac{\lambda_{2i}}{2} \right) \right]$$

이고 $\lambda_{1r}, \lambda_{1i}, \lambda_{2r}, \lambda_{2i}$ 는 $\bar{\lambda}_1$ 및 $\bar{\lambda}_2$ 의 實數部는 및 虛數部이다.

式 (31)이 엄밀해가 되기 위하여는

$$\begin{aligned} \bar{R}_1(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2) &= e^{\bar{\sigma}_1 h} \\ \bar{R}_2(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2) &= e^{\bar{\sigma}_2 h} \end{aligned} \quad (34)$$

를 만족하는 $\bar{\lambda}_1$ 과 $\bar{\lambda}_2$ 를 비율계수로 이용하면 된다. 계통정수 및 요소크기가 정하여지면 p와 q가 결정되고 이 p와 q가 결정되면 식 (34)로부터 $\bar{\lambda}_1$ 과 $\bar{\lambda}_2$ 를 구할 수 있다. 부록에 $\bar{\lambda}_1$ 및 $\bar{\lambda}_2$ 의 값을 도표로 나타내었다.

4. 應用事例

제안된 風上計劃의 유용성을 확인하기 위하여 몇 개의 사례연구를 시행하였다. 본 방법에 의한 결과를 기존의 風上計劃¹⁾에 의한 결과와 비교하였는데 여기서 이용된 비율계수는

$$\begin{aligned} \lambda_{1r} = \lambda_{2r} &= \coth(p) - \frac{1}{p} \\ \lambda_{1i} = \lambda_{2i} &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

와 같다.

4.1 一次元 事例

표 1은 p=2, q=0.5에 대한 \bar{R}_1 및 \bar{R}_2 의 값을 나타낸다. 신방법은 0.01%의 오차를 나타내는 반면 기존방법은 \bar{R}_2 에 매우 큰 오차를 나타내고 있다.

표 2는 p=2, q=0.5에 대한 \bar{A} 의 實數部를 나타낸다. 境界條件은 $\bar{A}(0) = 1 + j0$, $\bar{A}(L) = 0 + j0$ 이다. 신방법은 0.001%의 오차를 나타내는 반면 기

표 1. $p=2, q=0.5$ 에 대한 \bar{R}_1 및 \bar{R} 의 값 R_2

Table 1. The values of \bar{R}_1 and \bar{R}_2 for $p=2$ and $q=0.5$

	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$ \bar{R}_1 $	$\angle \bar{R}_1$	$ \bar{R}_2 $	$\angle \bar{R}_2$
엄밀해			0.94349	-0.48587	57.868	0.48587
기존방법	0.53731 +j0.000000	0.53731 +j0.000000	0.94621 (0.29)	-0.47902 (-1.41)	44.081 (-23.8)	1.04649 (115.)
신방법	0.52701 +j0.02787	0.53522 -j0.03976	0.94349 (-0.00)	-0.48587 (-0.00)	57.863 (-0.01)	0.48582 (-0.01)

() : Error in %

표 2. $p=2, q=0.5, \bar{A}(0)=1+j0, \bar{A}(L)=0+j0$ 에 대한 풍상유한요소해의 實部

Table 2. Real parts of upwind finite element solutions for $p=2, q=0.5, \bar{A}(0)=1+j0$ and $\bar{A}(L)=0+j0$

정점번호	엄밀해	신방법	기존방법
1	0.10000E+01	0.10000E+01	0.10000E+01
2	0.83430E+00	0.83430E+00	0.83971E+00
3	0.50194E+00	0.50194E+00	0.51491E+00
4	0.94863E-01	0.94862E-01	0.11296E+00
5	-0.28852E+00	-0.28852E+00	-0.27131E+00
6	-0.56587E+00	-0.56587E+00	-0.55679E+00
7	-0.68738E+00	-0.68737E+00	-0.69217E+00
8	-0.64323E+00	-0.64323E+00	-0.66395E+00
9	-0.46141E+00	-0.46141E+00	-0.49534E+00
10	-0.19733E+00	-0.19732E+00	-0.23744E+00
11	0.81478E-01	0.81478E-01	0.44724E-01
12	0.31161E+00	0.31161E+00	0.28770E+00
13	0.44741E+00	0.44741E+00	0.44331E+00
14	0.46507E+00	0.46057E+00	0.48556E+00
15	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

표 3. 균일 요소망에 대한 정점치의 오차

Table 3. Nodal errors for uniform grids

요소망		오차	
p	q	신방법	기존방법
2	0.5	0.352×10^{-5}	0.322×10^{-1}
9	0.5	0.610×10^{-4}	0.237×10^{-1}
90	0.5	0.236×10^{-3}	0.224×10^{-1}

존방법은 4% 정도의 오차를 나타낸다.

표 3은 여러 p 및 q와 균일 요소망에 대한 오차 비교를 나타내고 표 4는 불균일 요소망 즉 두 개의 다른 요소가 번갈아 있는 요소망에 대한 오차비교를 나타낸다. 오차는

$$e = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\bar{A}_{cal} - \bar{A}_{ex}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

표 4. 불균일 요소망에 대한 정점치의 오차

Table 4. Nodal errors for non-uniform grids

요소망				오차	
p	q	p	q	신방법	기존방법
3	0.50	2	0.33	0.605×10^{-2}	0.264×10^{-1}
9	0.50	6	0.33	0.732×10^{-2}	0.146×10^{-1}
90	0.50	60	0.33	0.803×10^{-2}	0.130×10^{-1}

과 같이 정의하였고 N은 頂點數이다. 境界條件은 $\bar{A}(0)=1+j0, \bar{A}(L)=0+j0$ 이다. 이 표로 부터 신방법이 기존방법보다 월등히 좋은 결과를 줌을 알 수 있다. 불균등 요소망에서 신방법에 의한 결과가 오차가 증가하는 것은 風上計劃에서 비율계수 $\bar{\lambda}_1$ 과 $\bar{\lambda}_2$ 를 균등요소망에서 엄밀해가 얻어지도록 정하였기 때문이다.

4.2 二次元 事例

四頂點 直四角形 要素를 택하였고 이에 대한 試驗函數는

$$\bar{\psi}_i(x, y) = \{ \phi_i(x) + \bar{\lambda}_{ix} B_i(x) \} \{ \phi_i(y) + \bar{\lambda}_{iy} B_i(y) \} \quad (37)$$

와 같이 정의하였고 여기서 $\bar{\lambda}_{ix}$ 및 $\bar{\lambda}_{iy}$ 는 x 및 y 방향의 복소비율계수이고 x 방향과 y 방향의 p 및 q가 주어지면 부록에서 구할 수 있다. 즉

$$\begin{aligned} p_x &= \mu \sigma v_x h_x / 2 & p_y &= \mu \sigma v_y h_y / 2 \\ q_x &= h_x \omega / v_x & q_y &= h_y \omega / v_y \end{aligned} \quad (38)$$

와 같이 구하여 진다. 여기서 h_x 및 h_y 는 요소의 x 축 및 y 축 방향의 길이이다.

실제 예로서 片側선형 유도전동기를 택하였는데 그림 4에 要素분할도 및 계산결과를 나타내었다. 고정자는 $\mu_s = 500$ 인 규소강판을 적층하였고 여기에

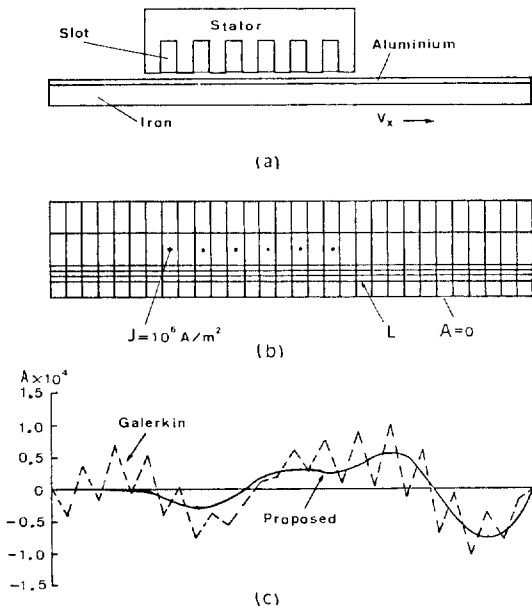


그림4. 편측선형유도전동기의 유한요소해 (a) 모델 (b) 요소분할 (c) L부분의 정점포텐셜

Fig.4. Finite element analysis of a single-sided linear induction motor (a) Model (b) Mesh discretization (c) Nodal potential at line L.

6 개의 슬롯을 두고 3상 2극권선을 설치하였다. 2차측은 두께 3mm의 알루미늄과 두께 14mm의 강철판으로 구성되었다. 알루미늄의 도전율은 $3 \times 10^7 \text{U/m}$, 철의 투자율 및 도전율은 $4\pi \times 10^{-4} \text{H/m}$ 및 $5 \times 10^6 \text{U/m}$ 이다. 2차측은 x방향으로만 6m/s(동기 속도)의 속도로 이동하는 경우를 취급하였다. 요소수는 180개, 頂點數는 217개이었고 境界値는 전부 零으로 주었다. 2차측 철내부의 要素 Peclet數는 188이고 이곳의 포텐셜을 계산한 결과를 그림 (c)에 나타내었다. Galerkin법에 의한 결과는 假振動을 포함하고 있으나 본 연구에서 제안한 風上計劃에 의한 결과에는 振動이 억제되었다. 계산결과와 정확도에 대하여는 엄밀해가 없기 때문에 논의할 수가 없으나 入口端과 出口端의 파형을 볼 때 계산결과가 엄밀해에 많이 접근된 것으로 사료된다.

5. 結論

본 연구에서는 速度起電力을 갖는 電磁場을 有限要素法으로 해석하는 경우 해석결과에 포함되는 假振動을 억제하기 위한 風上計劃을 제안하였다. 一次元 및 二次元 數値事例를 통하여 여기서 제안된 방법으로 假振動이 잘 억제되고 있음을 확인하였다. 그리고 기존방법보다 더 정확한 해가 얻어짐을 알았다.

비율계수는 한번만 계산되면 이를 계산기내에 기억시켰다가 필요할 때마다 인출하여 쓸 수 있으며 風上計劃에 의한 계산시간도 표준 유한요소법에 의한 계산시간과 별차이가 없다. 그러므로 본 연구에서 얻어진 風上計劃은 계산정확도 뿐만 아니라 계산시간에 있어서도 실용가치가 있다고 판단된다.

끝으로 본 연구는 문교부 대학교수 국비해외과견 연구 프로그램에 의하여 이루어 졌음을 알립니다.

附 錄

式 (34)를 만족하는 비율계수 λ_{1r} , λ_{1i} , λ_{2r} , 및 λ_{2i} 를 계산하여 그림으로 나타내면 그림 5와 같다.

참 고 문 헌

1) I. Christie, D.F. Griffiths, A.R. Mitchell and O.C. Zienkiewicz, 'Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives', Int. J. num. Meth. Engng, 10, 1389-1396(1976).

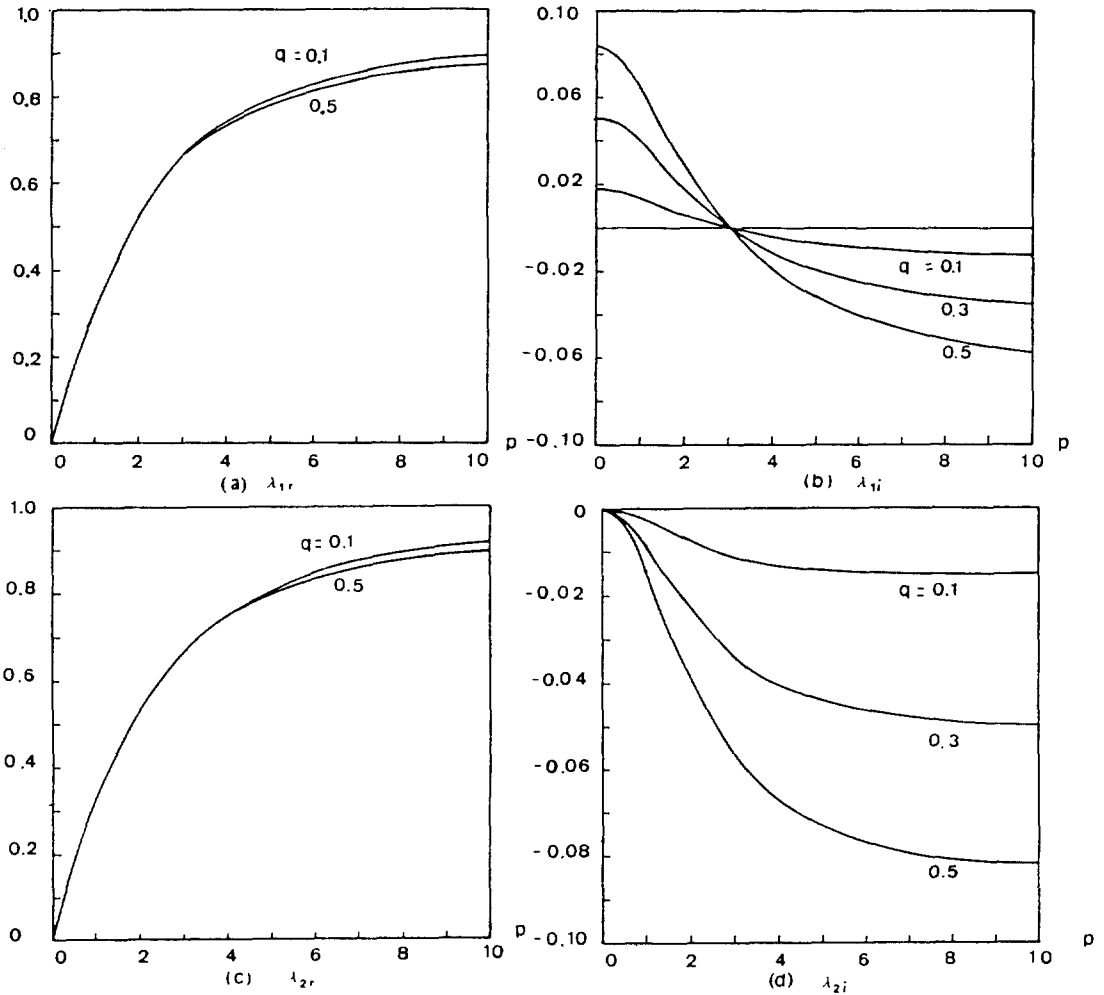


그림5. p 및 q 변화에 대한 비율계수

Fig.5. Scaling factors for different p and q

- 2) J.C. Heinrich, P.S. Hyakorn, O.C. Zienkiewicz and A.R. Mitchell, 'An "upwind" finite element scheme for two-dimensional convective transport equation', Int. J. num. Meth. Engng, 11, 131-143(1977).
- 3) T.J.R. Hughes, 'A simple scheme for developing "upwind" finite elements', Int. J.num. Meth. Engng, 12, 1359-1365(1978).
- 4) G. Payre, M.D. Broissia and J. Bazinet, 'An "upwind" finite element method via numerical integration', Int. J. num. Meth. Engng, 18, 381-396(1982).
- 5) J. Bignon, 'Contribution a la modelisation de structures electro-magnetiques a courant de Foucault', These de Docteur-Ingenieur, I.N.P. de Grenoble, 1983.
- 6) M. Odamura, 'Upwind finite element solution for saturated travelling magnetic field problems', J. Japan Inst. Elec. Engng, B-109, 41-47(1985)
- 7) J.T. Oden and G.F. Carey, Finite Elements-Computational Aspects, 284-288, Prince-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1985.