

비반복 외삽법에 의한 불완전 투영 데이터의 재생 및 영상의 개선법

이강호 · 최종호 · 최종수

= Abstract =

Recovery of Truncated Projection using Non-iterative Extrapolation and Improvement of Image

Kang-Ho Lee, Jong-Ho Choi, Jong-Soo Choi

An algorithm is suggested that truncated projection among the incomplete projections can be recovered from non-iterative extrapolation matrix by band-limited function.

After the image being reconstructed from the recovered signals by non-iterative extrapolation, a known contour information and reprojection algorithm are used.

It is shown that the reconstructed image using these algorithms is close to the original image. The effectiveness for these algorithms is proved by computer simulation.

1. 서 론

오스트리아의 수학자 J. Radom의 “2차원 혹은 3차원 물체는 투영데이터의 무한집합으로부터 재생이 가능하다”는 수학적 증명에 힘입어, 1972년 X-선 CT가 개발되었으며, 이후 의학 관계자들은 단층영상이라고 하는 인체정보를 전자기술의 덕분으로 손쉽게 얻을 수 있게 되었다.

X-선 CT에서 피검체를 통과한 X-선의 강도로 측정되는 투영데이터에 대수(Logarithm)를 취하면, 전파경로에 분포되어 있는 흡수계수의 선적분을 얻을 수 있다(Fig.1 참조).

투영데이터 $P(\xi, \phi)$ 로부터 2차원적인 분포함수 $f(x, y)$ 를 재구성하려면 다음 2가지 조건을 만족되어야 한다.

첫째, 하나의 투영각(View)에서 단층면 상의 각

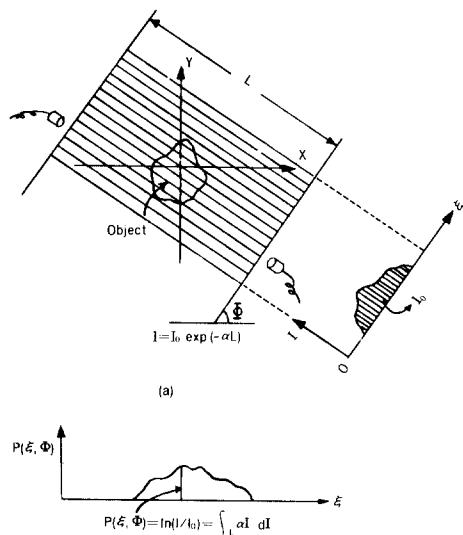


Fig. 1. Object transmission in X-ray CT
 (a) transmission intensity I and (b) line interated values $P(\xi, \phi)$ of absorption coefficient α

<접수 : 1987년 12월 15일>
 중앙대학교 전자공학과
 Dept. of Electronic Eng., Chungang University

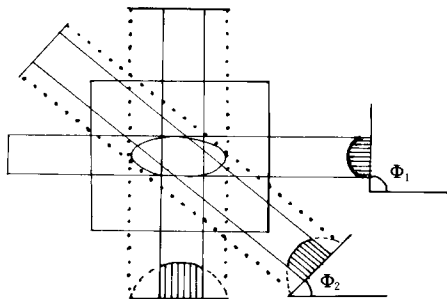
경로를 따라 적분된 값이 투영축 ξ 상에 빠짐없이 존재해야 하며, 둘째, 투영데이터는 모든 각도에 걸쳐 존재해야 한다¹⁾. 그렇지 못할 경우 불완전 투영군(Incomplete Projections)이 생길 수 있는데¹⁾, 본 논문에서는 피검체가 주사범위보다 크거나 스캐너의 물리적 제약으로 인해 주사범위가 피검체의 폭에 미치지 못해서 생기는 절단투영(Truncated Projection)을 다루었다.

절단투영을 종래의 CT 알고리즘에 적용하게 되면 영상의 질이 저하되므로 적절한 해결책이 모색된다면 X-선 피폭량의 감소 및 계산시간의 단축효과가 있으므로 가치가 있다고 생각된다. 따라서 본 논문에서는 A.Papoulis^{3, 4)}가 제안한 대역제한함수(Band-limited Function)의 반복 외삽법(Iterative Extrapolation)과 R.J.Marks II⁵⁾와 M.S.Sabri et al.⁶⁾ 등이 제안한 비반복 외삽법(Non-iterative Extrapolation)을 이용하여 절단투영데이터를 재생시키는 방법을 제안하였다. 아울러 외삽법에 의해 재생된 투영치로부터 재구성된 단층상에 기지의 윤곽정보(Contour Information Known)를 반복해 삽입하여 영상의 질을 개선시켰다.

2. 외삽행렬을 이용한 절단투영의 재생 및 재투영

본 논문의 대상이 되는 절단투영이 생기는 경우를 Fig. 2에 보였다.

투영각 ϕ_1 에 대해서는 피검체 전체영역에 걸쳐 투영되었지만 투영각 ϕ_2 에 대해서는 피검체 전체영역



white section : truncated
comb section : projected

Fig. 2. Truncated projection

역에 걸쳐 투영되지 못하는 경우가 발생될 수 있다. 이러한 경우에 생기는 투영을 절단투영이라 한다. 절단투영을 재생해내기 위해 M.S.Sabri et al.의 외삽행렬을 이용한 비반복 외삽법을 적용할 수 있다.

2-1. 대역제한 함수의 반복 외삽법

그림 3(b)에서처럼 신호 $f(t)$ 가 일정구간($-t_0 \sim t_0$)에서만 $g_0(t)$ 로 주어진다고 하면

$$g_0(t) = \begin{cases} f(t), & t \leq |t_0 \\ 0, & t > |t_0 \end{cases} \quad (1)$$

이고

$$g_1(t) = \begin{cases} g_0(t), & t \leq |t_0 \\ f_1(t), & t > |t_0 \end{cases} \quad (2)$$

가 된다. 또한 그림 4에서처럼 n 회 반복되면

$$g_{n+1}(t) = \begin{cases} g_0(t), & t \leq |t_0 \\ f_n(t), & t > |t_0 \end{cases} \quad (3)$$

과 같이 얻어진다. 여기서 대역제한 연산자(Band-limited Operator 또는 Low-Pass Filter)를 B 라 놓고, 시간제한 연산자(Duration-limiting Operator)를 W 라 놓으면 다음과 같이 된다.

$$B = \begin{cases} 1, & w \leq |\sigma \\ 0, & w > |\sigma \end{cases} \quad (4)$$

$$W = \begin{cases} 1, & t \leq |t_0 \\ 0, & t > |t_0 \end{cases} \quad (5)$$

또한 $\bar{W} = (I - W)$ 라 정의하고(여기서 I 는 Identity 연산자), $G = BW$, $H = \bar{W}B$ 라 놓으면

$$g_n(t) = g_0(t) + H g_{n-1}(t) \quad (6)$$

$$f_n(t) = f_1(t) + G f_{n-1}(t) \quad (7)$$

가 된다. 여기서 식(6)과 식(7)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$g_n(t) = g_0(t) + H g_0(t) + H^2 g_0(t) + \dots + H^n g_0(t) = E_n g_0(t) \quad (8)$$

$$f_n(t) = f_1(t) + G f_1(t) + G^2 f_1(t) + \dots + G^{n-1} f_1(t) \quad (9)$$

여기서, $E_n = \sum_{i=0}^n H^i$ 이다.

2-2. 외삽행렬의 구성

대역제한 연산자는 저역통과 필터(Low-Pass Filter)의 행렬을 구성함으로써 얻어진다. 즉

$$\{LP\} = \{D^{-1}\} \{W\} \{D\} \quad (10)$$

이다. 여기서 $\{D\}$ 는 이산 후리에변환(Discrete

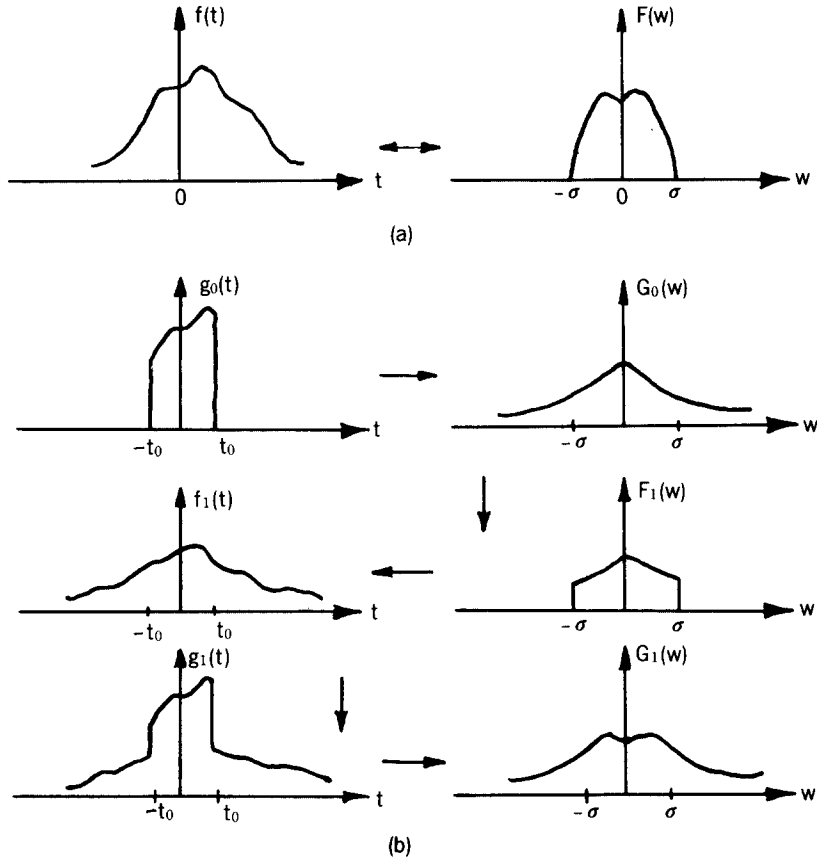


Fig. 3. (a) Signal $f(t)$ and its Fourier transform $F(w)$
 (b) First iteration with $g(t)$

Fourier Transform), $\{D^{-1}\}$ 는 역 D.F.T., $\{W\}$ 는 시간제한 연산자의 행렬 형태이며, $\{LP\}$ 는 대역제한 연산자이다.

대역제한 연산자를 $\{B\}$ 의 보수인 $\{\bar{B}\}$, 즉,

$$\{\bar{B}\} = \{I\} - \{B\} = \text{diag}\{1, 1, \dots, 0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 1\} \quad (11)$$

여기서, $\{I\}$ 는 단위행렬(Identity Matrix)과 같이 나타내면 $\{H\}$ 는

$$\{H\} = \{B\} \cdot \{LP\} \quad (12)$$

로 되고, 행렬형태로 주어지는 $\{g_n\}$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{g_n\} &= \sum_{i=0}^n \{H\}^i \{g_0\} \\ &= \{E_n\} \cdot \{g_0\} \end{aligned} \quad (13)$$

또한 여기에서 외삽행렬 $\{E_n\}$ 은 다음과 같이

$$\begin{aligned} \{E_n\} &= \sum_{i=0}^n \{H\}^i \\ &= (\{I\} - \{H\}^{n+1}) \cdot (\{I\} - \{H\})^{-1} \end{aligned} \quad (14)$$

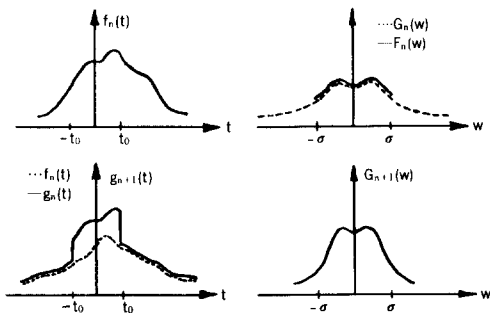


Fig. 4 N-th iteration

로 주어질 수 있으며, $n \rightarrow \infty$ 일 경우

$$\{E\infty\} = (\{I\} \cdot \{H\})^{-1} \quad (15)$$

이 된다. 여기서 식(15)가 만족되려면 $\{H\}$ 의 행렬 식 값이 1보다 작아야만 된다는 것을 알 수 있다.

2-3. 절단투영의 재생 및 재투영

Fig. 2와 같이 절단투영으로부터 잘려진 부분을 재생시키기 위해 식(15)에서 구한 외삽행렬을 이용할 수 있다.

외삽행렬을 이용하여 재생한 투영데이터의 행렬 $\{P\}$ 는

$$\{P\} = \{E\infty\} \cdot \{P_i\} \quad (16)$$

여기서, $\{P\}$: 외삽행렬로서 재생된 투영데이터 P (ξ, ϕ)의 행렬

$\{P_i\}$: 절단투영 $P_i(\xi, \phi)$ 의 행렬

이 된다. 각각의 투영각에서 절단투영을 같은 방법으로 재생시켜 나갈 수 있다. 이렇게 재생된 투영군을 필터함수와외의 컨볼루션을 취해 역투영하고 단층상을 재구성하기 위해 보간을 행하게 된다. 이러한 방법으로 재구성된 영상은 재생된 투영군 자체가 투영된 부분만의 데이터로부터 외삽된 데이터라는 이유로 말미암아 재투영(Reprojection)의 과정을 거침으로써 보다 나은 결과가 얻어져야 할 필요가 있다.

이때 재투영에 앞서 재투영될 영상에서 원래 영상의 윤곽정보인 기지의 정보를 이용함으로써 재투영을 행할 수 있다. Fig. 5에서 보는 바와 같이 재투영하기 전에 원래의 피검체 외곽부위를 삭제해내고 재투영하게 된다.

기지의 윤곽정보를 이용해서 피검체 바깥 부위를 삭제해낸 다음 재투영되는 데이터를 $\{R\}$ 이라 놓는다.

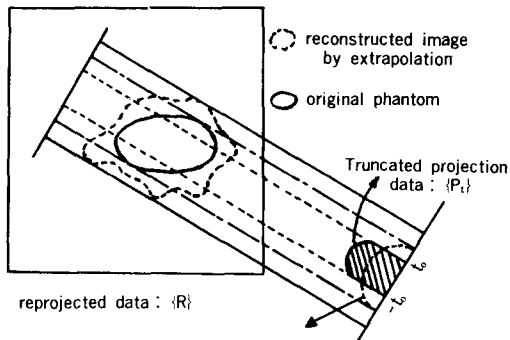


Fig. 5. Truncated projection and reprojection

다. 여기서 $-t_0 \sim t_0$ 의 범위에서는 처음에 투영되었던 투영데이터 ($\{P_i\}$)가 재투영된 데이터 ($\{R\}$) 신빙성있는 데이터이므로 $\{R\}$ 을 $\{P_i\}$ 로 대체한다.

$$\{R\} = \begin{cases} \{P_i\}, & |t| \leq t_0 \\ \{R\}, & |t| > t_0 \end{cases} \quad (17)$$

으로 놓는다. 또한 이러한 재투영 데이터로부터 재구성된 영상에 다시 기지의 윤곽정보를 적용하고 재투영하는 과정을 반복하게 되는데 이러한 과정이 반복 재투영(Iterative-Reprojection)과정이다. 본 논문에서는 10회 정도의 반복 재투영으로 재구성되는 단층상은 점점 원래의 영상에 가까와짐이 보여진다.

3. 모의실험 및 검토

Fig. 6은 절단투영을 재생시키기 위해 외삽행렬을 구성하는 알고리즘 및 외삽행렬을 사용하여 재생된 투영군으로부터 재구성된 단층상을 재투영한 다음, 기지의 윤곽정보를 이용하는 알고리즘의 유효성을 검증하기 위한 계산기 모의실험의 순서도이다.

Fig. 6에서 보인 순서도에 따라 모의실험한 결과는 다음에 열거되는 영상들과 프로파일(Profile)들로서 보여진다. 여기서 투영각(View) 수는 40으로 하여 모의실험을 행하였다.

(예 1)

모의실험에 쓰인 팬텀(Phantom)은 단축의 길이가 9, 장축의 길이가 15이며 흡수계수가 0.4인 타원체, 즉, $x^2 + \frac{y^2}{15^2} + \frac{z^2}{3^2} \leq 1$ 인 타원체 안에 크기가 9×9 이고 흡수계수가 0.8인 정사각형이 존재하는 팬텀이다. 여기에서 투영폭을 18로 했을때의 결과가 Fig. 7에서 보여진다. Fig. 7에서(a)는 원래의 팬텀(Original Phantom)이고, (b)는 절단투영시에 재구성된 영상, (c)는 외삽행렬을 사용하여 재생된 투영군으로부터 재구성된 영상이며, (d)는 1회의 재투영을 거친 다음에 얻어지는 영상이다. 또한 (e)와 (f)는 각각 5회 및 10회의 반복 재투영을 거친 다음에 얻어지는 영상이며, (g)는 완전한 투영군으로부터 재구성된 영상이다. 마지막의 (h)에서는 횡축상에서의 프로파일 값들을 비교해서 나타내었다.

(예 2)

다음에 모의실험한 팬텀은 크기가 25×25 이고 흡수계수가 0.4인 정사각형 안에 단축의 길이가 5, 장

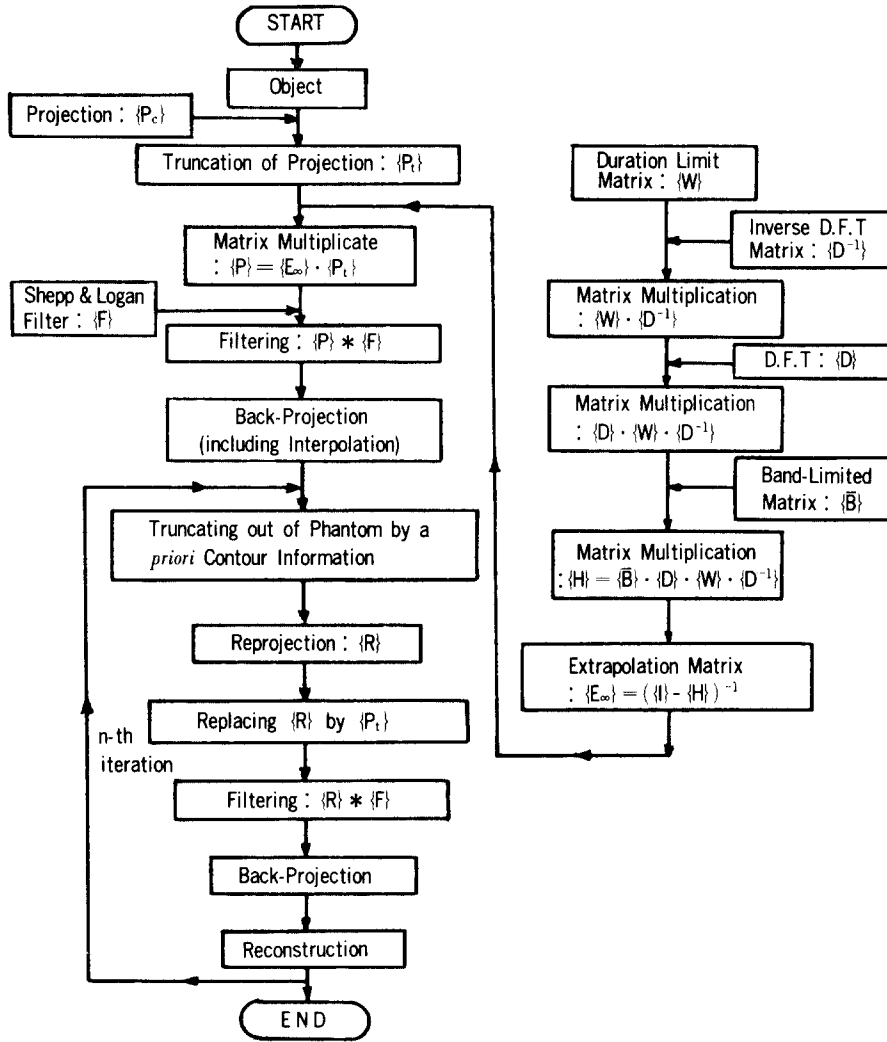
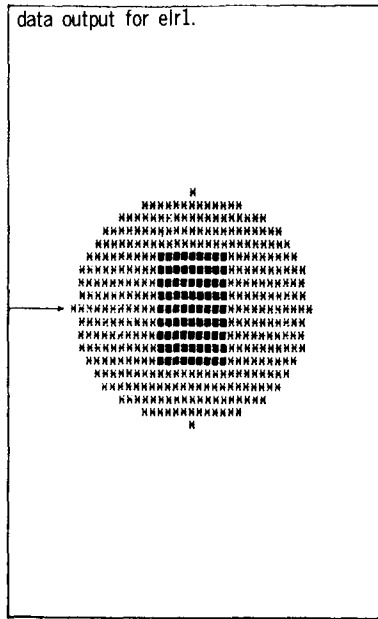


Fig. 6. Flow chart

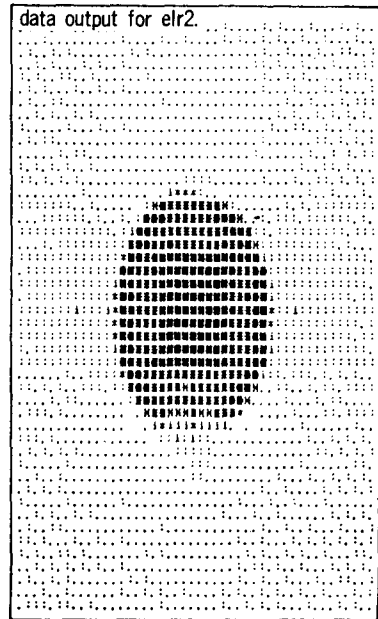
축의 길이가 8인 타원체 즉, $\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{5^2} \leq 1$ 이고 흡수계수가 0.8인 타원체가 존재하는 팬텀이다. Fig. 8에서 (a)는 원래의 팬텀, (b)는 절단투영시에 재구성된 영상, (c)는 외삽행렬로써 재생된 투영군으로부터 재구성된 영상이다. 또한 (d), (e) 및 (f)는 각각 1회, 5회 및 10회 반복 재투영을 통해 구해진 영상이며, (g)는 완전한 투영군으로부터 재구성된 영상이다. 마지막으로 (h)에서는 대각선축 상에서의 프로파일 값들을 나타냈다.

앞의 결과에서 볼 수 있듯이 절단투영시에 구해

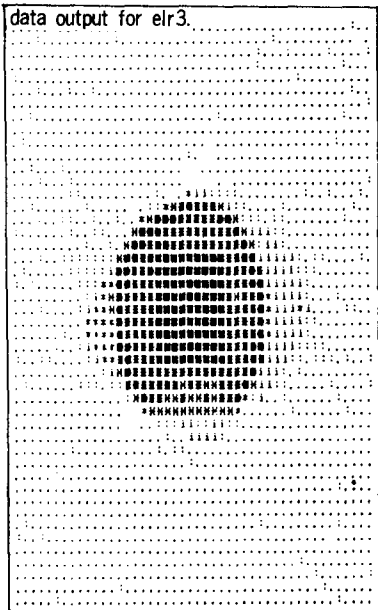
지는 투영데이터를 종래의 CT 알고리즘에 적용하게 되면, 재구성된 영상이 상당히 불만족스럽게 구해짐을 알 수 있었다. 절단투영을 외삽행렬로써 재생이 가능하며, 재생된 투영데이터로부터 구해지는 영상을 절단투영시에 구해지는 영상보다 좋은 결과로 나타남을 알 수 있다. 또한 재투영의 과정을 거치는 동안 완전한 투영군으로부터 재구성된 영상에 점점 가까워지고 있음을 알 수 있었다.



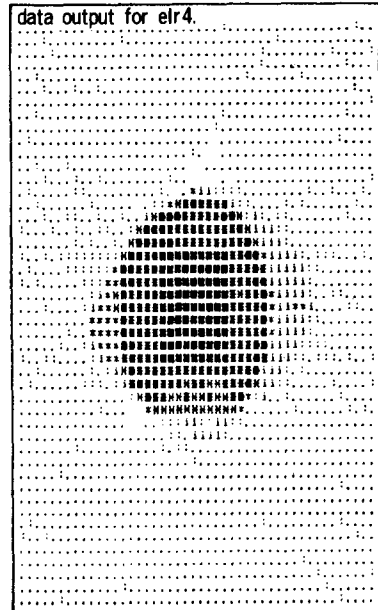
(a)



(b)

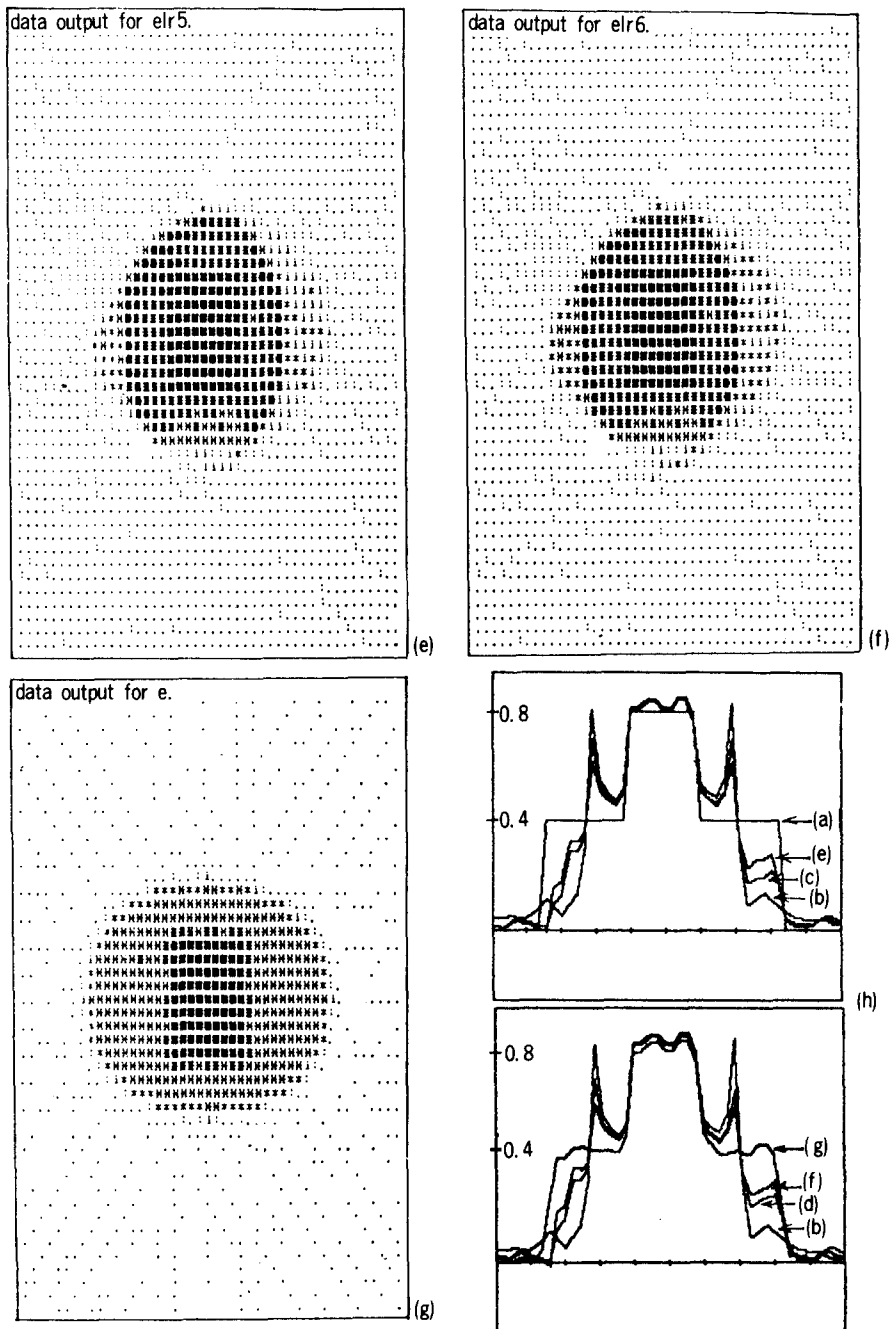


(c)



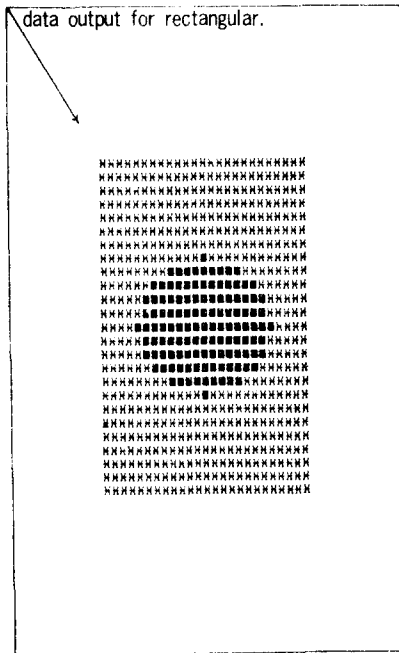
(d)

(a) original phantom, (b) image reconstructed with truncated projection, (c) image with extrapolation matrix and (d) image with 1-st reprojection

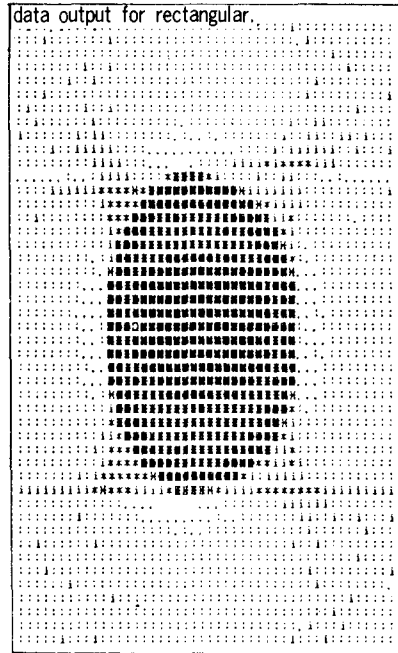


(e) image with 5-th reprojection, (f) 10 th reprojection,
 (g) image with complete projections and (h) profiles of each
 images's cross section

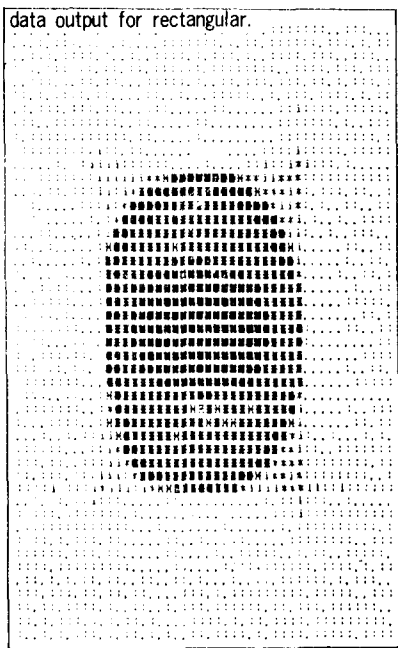
Fig. 7. Results for ellipse ($\frac{x^2}{15^2} + \frac{y^2}{9^2} \leq 1$) including square (9×9). The number of views is 40 and truncation width is 18.



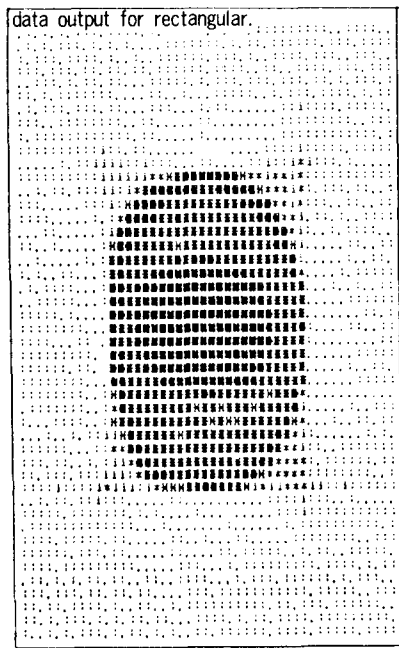
(a)



(b)

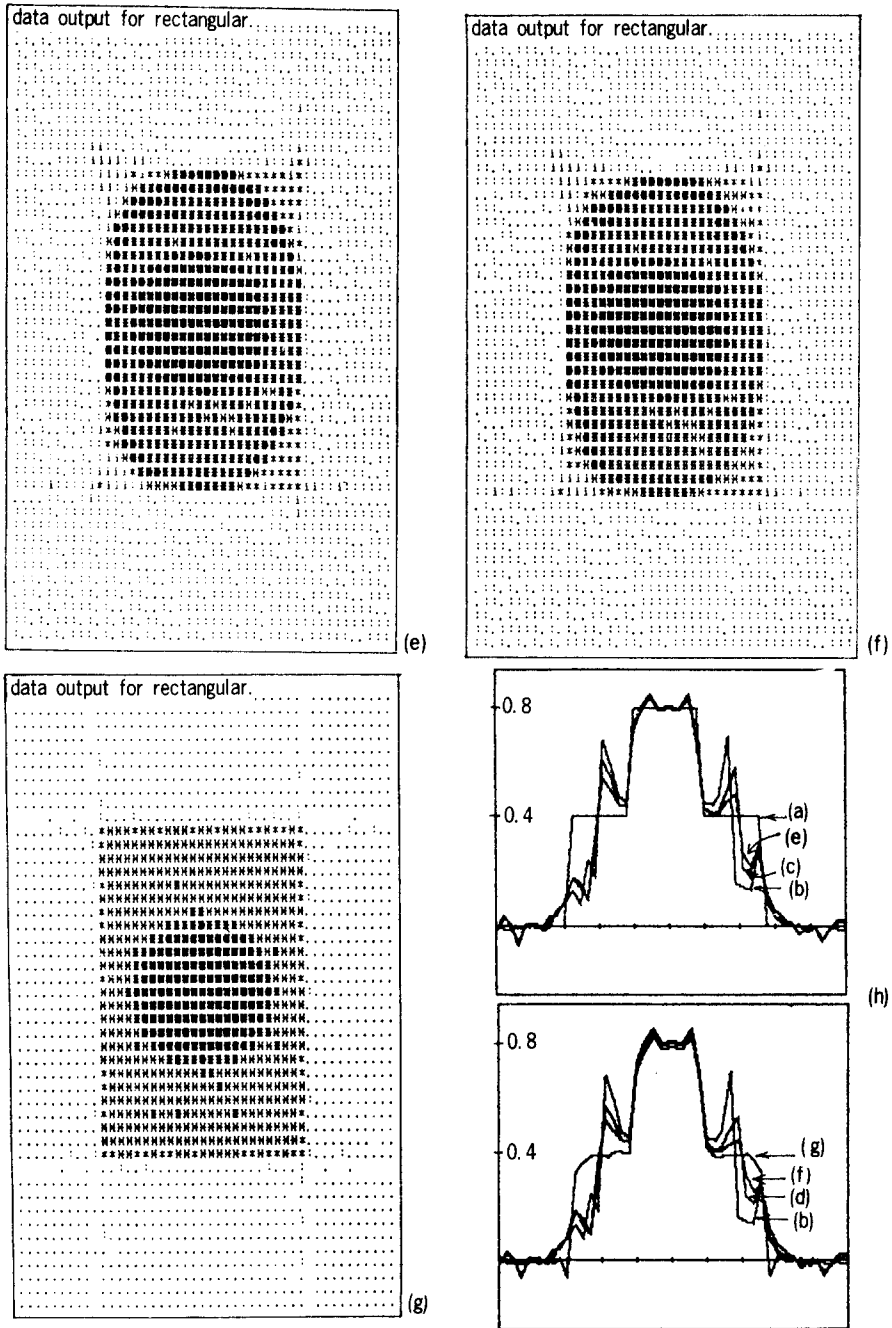


(c)



(d)

(a) original phantom, (b) image with truncated projection,
(c) image with extrapolation and (d) 1st reprojection



(e) 5-th reprojection, (f) 10 th reprojection, (g) image with complete projections and (h) profiles of each image's cross section

Fig. 8. Results for square(25×25) including ellipse($\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{5^2} \leq 1$)

4. 결 론

절단투영시에 구해지는 투영데이터로부터 재구성된 영상은 질이 나쁘는데 비해 본 논문에서 설명된 바 있는 외삽행렬을 모의실험을 통해 입증해 보았다. 또한 외삽에 의해 재구성된 영상을 재투영의 과정을 거치는 동안 완전 투영군으로부터 재구성되는 영상에 수렴하고 있음을 역시 모의실험 결과를 통해 알 수 있었다.

본 논문에서 보인 알고리즘을 불완전 투영군 중에서도 제한된 각도에서 얻어지는 투영데이터에 적용할 수 있는 방법이 모색된다면 상당히 유용한 방법이 될 것이며, 아울러 좋은 결과도 얻어지리라 본다. 그렇게 될 경우 초음파의 투과데이터로 영상을 재구성하는 회절 단층 영상법(Diffraction Tomography)에서도 투영각 제한시에 적용할 수 있으리라 기대되는 바 크다.

참 고 문 헌

1) R.M. Lewitt, "Processing of incomplete measurement data in computed tomography",

medical physics, Vol. 6, No. 5, pp. 412~417, (1979, 9/10).

- 2) J.S. Choi, "A reconstruction algorithm of body sections with opaque obstructions", *IEEE Transactions on sonics and ultrasonics*, Vol. 29, No. 3, pp. 143~150, (1982, 5).
- 3) A. Papoulis, "A new algorithm in spectral analysis and band-limited extrapolation", *IEEE Transaction on circuits and systems*, Vol. CAS-25, No. 2, pp. 735~742, (1975, 9).
- 4) A. Papoulis and C. Chamzas, "Detection of hidden periodicities by adaptive extrapolation", *IEEE Transaction on acoustics, speech and signal processing*, Vol. ASSP-27, No. 5, pp. 492~500, (1979, 10).
- 5) R.J. Marks II, "Gerchberg's extrapolation algorithm in two dimensions", *APPLIED OPTICS*, Vol. 20, No. 10, pp. 1815~1820, (1981, 10).
- 6) M.S. Sabri and W. Steenaart, "An approach to band-limited signal extrapolation: The extrapolation matrix", *IEEE Transactions on circuits and systems*, Vol. CAS-25, No. 2, pp. 74~78, (1978, 2).