大韓機械學會論文集 第11卷 第3號, pp. 473~478, 1987.

<論 文>

非線形스프링과 線形減衰를 가지는 動吸振器에 관한 研究

金 光 植*·安 贊 祐**

(1987年 2月 27日 接受)

A Study on the Dynamic Vibration Absorber having Non-Linear Spring and Linear Damper

Kwang Sic Kim and Chan Woo Ahn

Key Words: Amplitude Ratio(振幅比), Mass Ratio(質量比), Non-Linear Dynamic Vibration Absorber(非線形動吸振器), Optimum Natural Frequency Ratio(最適固有振動數比), Optimum Damping Ratio(最適減衰比)

Abstract

In this paper the optimum values of natural frequency ratio and damping ratio for damped systems were studied by numerical analysis. The relation between the amplitude ratio and frequency ratio obtained for the non-linear dynamic vibration absorber was found and it was compared with that of linear system. The results shows that the optimum frequency ratio decreases and the optimum damping ratio increases when the mass ratio of the damped system increases. The resonance frequency ratio and amplitude ratio decrease as mass ratio increases for the non-linear spring system.

記 號 說 明

A_1 : 主振動系의 振幅比
C_1 : 主振動系의 減衰係數
C_2 : 吸振器의 減衰係數
C_{cr1} : 主振系의 臨界減衰係數
C_{cr2} : 吸振器의 臨界減衰係數
f : 固有振動數比
h : 非線形係數
K_1 : 主振動系의 스프링상수
K_2 : 吸振器의 스프링상수
M_1 : 主振動系의 質量
M_2 : 吸振器의 質量
t : 시간
X_{st} : 정적처짐
y_1 : 主振動系의 변위
y_2 : 吸振器의 변위
γ : 모델상수
ζ_1 : 主振動系의 減衰比
ζ_2 : 吸振器의 減衰比
μ : 質量比
ω : 振動數比
ω_1 : 主振動系의 固有振動數
ω_2 : 吸振器의 固有振動數

* 正會員, 漢陽大學校 工科大學 精密機械工學科
** 正會員, 漢陽大學校 大學院

1. 序　論

振動防止法으로 이용되어지는 動吸振器에 대한 硏究는 主振動系에 減衰가 없는 경우에 Den Hartog[1]는 最適固有振動數比와 最適減衰比를 質量比만의 함수로서 구하였으며 主振動系에 減衰가 있는 경우에는 最近에 硏究가 활발히 진행되고 있다. 動吸振器에 대한 最近의 硏究로서 主振動系에 減衰가 있는 경우에 대해서는 Randall[2], Kim[3] 등은 圖式的인 方法과 數值解析을 利用해서 最適固有振動數比와 最適減衰比를 求하였으며 Soom 과 Lee[14]는 複素數를 이용해서 振幅比를 求하여 非線形動吸振器에 대한 硏究를 하였다. Riganti[5], Hunt 와 Nissen[6], Rangacharyulu[7]등은 主系에 減衰가 없는 경우의 非線形動吸振器에 대한 硏究를 하였으나 減衰系에 대한 체계적인 硏究와 動吸振器가 非線形스프링으로 作動할 때의 非線形特性에 관한 硏究가 필요하다.

本 硏究에서는 Newton 法에 의한 數值解析을 利用하여 減衰를 가진 振動系의 最適固有振動數比와 最適減衰比를 求했으며, 非線形動吸振器가 附着된 振動系의 運動方程式을 유도하여 조화밸런스法에 의한 振幅比를 算出해서 振幅比에 대한 非線形性의 영향 및 硬性스프링과 軟性스프링의 特性을 규명하였다.

2. 理論解析

主振動系에 減衰를 갖는 경우 이것에 非線形動吸振器가 附着된 振動系를 Fig. 1 에 나타내었다. Fig. 1 의 振動系에 대한 運動方程式은 식 (1)과 같다.

$$\left.\begin{aligned} &M_1\ddot{y}_1+K_1y_1+C_1\dot{y}_1-K_2(y_2-y_1)-h(y_2-y_1)^3\\ &\quad -C_2(\dot{y}_2-\dot{y}_1)=F\cos\Omega t\\ &M_2\ddot{y}_2+K_2(y_2-y_1)+h(y_2-y_1)^3+C_2(\dot{y}_2-\dot{y}_1)=0 \end{aligned}\right\}\quad(1)$$

식 (1)을 무차원화시키기 위하여 $A_1=|X_1|/X_{st}$, $C_{cr1}=2\sqrt{M_1K_1}$, $C_{cr2}=2\sqrt{M_2K_2}$, $f=\omega_2/\omega_1$, $P=F/K_1\cdot X_{st}$, $x_1=y_1/X_{st}$, $x_2=y_2/X_{st}$, $X_{st}=F/K_1$, $\zeta_1=C_1/C_{cr1}$, $\zeta_2=C_2/C_{cr2}$, $\mu=M_2/M_1$, $\omega_1=\sqrt{K_1/M_1}$, $\omega_2=\sqrt{K_2/M_2}$, $\omega=\Omega/\omega_1$, $\tau=\omega_1 t$, $\gamma=h\cdot X_{st}^2/K_1$ 를 식 (1)에 代入하여 정리하면 식 (2)와 같다.

$$\left.\begin{aligned} &x_1''+x_1+2\zeta_1x_1'-\mu f^2(x_2-x_1)-\gamma(x_2-x_1)^3-2\zeta_2\\ &\quad \mu f(x_2'-x_1')=P\cos\omega\tau\\ &\mu x_2''+\mu f^2(x_2-x_1)+\gamma(x_2-x_1)^3+2\zeta_2\mu f(x_2'-x_1')\\ &\quad =0 \end{aligned}\right\}\quad(2)$$

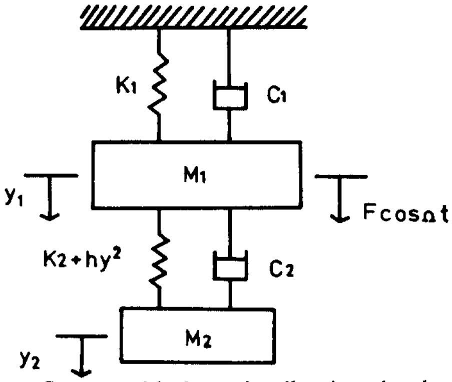

Fig. 1 System with dynamic vibration absorber

식 (2)에서 "′"는 τ에 대한 微分을 나타내며 $x_3=x_2-x_1$ 로 놓고 이것을 식 (2)에 代入해서 정리하면

$$\left.\begin{aligned} &(1+\mu)x_1''+x_1+2\zeta x_1'+\mu x_3''=P\cos\omega\tau\\ &\mu x_1''+\mu f^2x_3+\gamma x_3^3+2\zeta_2\mu f x_3'+\mu x_3''=0 \end{aligned}\right\}\quad(3)$$

로 表示할 수 있다. 정상상태의 응답은 對稱型非線形復元力을 가지므로

$$\left.\begin{aligned} x_1&=|A_1|\cos(\omega\tau+\phi_1)\\ x_3&=|A_3|\cos(\omega\tau+\phi_3) \end{aligned}\right\}\quad(4)$$

로 가정하고

$$x_3^3 \doteqdot \frac{3}{4}|A_3|^3\cos(\omega\tau+\phi_3)\quad(5)$$

이므로 식 (4), (5)를 식 (3)에 代入해서 調和바란스法에 의해서 다음 式이 求해진다.

$$\left.\begin{aligned} &\{-(1+\mu)\omega^2+1\}|A_1|\cos\phi_1-(2\zeta_1\omega)|A_1|\sin\phi_1\\ &\quad -(\mu\omega^2)\cos\phi_3=P\\ &\{(1+\mu)\omega^2-1\}|A_1|\sin\phi_1-(2\zeta_1\omega)|A_1|\cos\phi_1\\ &\quad +(\mu\omega^2)\sin\phi_3=0\\ &(-\mu\omega^2)|A_1|\cos\phi_1+\Big\{(\mu f^2-\mu\omega^2)|A_3|\\ &\quad +\frac{3}{4}\gamma|A_3|^3\Big\}\cos\phi_3-2\mu f\zeta_2\omega|A_3|\sin\phi_3=0\\ &(\mu\omega^2)|A_1|\sin\phi_1-\Big\{(\mu f^2-\mu\omega^2)|A_3|\\ &\quad +\frac{3}{4}\gamma|A_3|^3\Big\}\sin\phi_3-2\mu f\zeta_2\omega|A_3|\cos\phi_3=0 \end{aligned}\right\}\quad(6)$$

식 (6)에서 $|A_3|^2$과 $|A_1|^2$에 대한 式이 다음과 같이 算出된다.

$$e_1|A_3|^6+e_2|A_3|^4+e_3|A_3|^2+e_4=0\quad(7)$$

$$|A_1|^2=|A_3|^2\Big\{\Big(\mu f^2+\frac{3}{4}\gamma|A_3|^2-\mu\omega^2\Big)^2/(\mu\omega^2)^2+(2\zeta_2 f)^2/\omega^2\Big\}\quad(8)$$

식(7)에서

$$e_1=\{-3\gamma(1+\mu)/4\mu+3\gamma/(4\mu\omega^2)\}^2+\{6\zeta_1\gamma/(4\mu\omega)\}^2$$

$$\begin{aligned}e_2=&2[\{-f^2(1+\mu)+f^2/\omega^2+(1+\mu)\omega^2-1-4\zeta_1\zeta_2 f\\&-\mu\omega^2\}\{-3\gamma(1+\mu)/4\mu+3\gamma/(4\mu\omega^2)\}]\\&+[\{2\zeta_1 f^2/\omega-2\zeta_1\omega-2(1+\mu)\zeta_2\omega f+2\zeta_2 f/\omega\}\\&\{6\zeta_1\gamma/(4\mu\omega)\}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e_3=&\{-f^2(1+\mu)+f^2/\omega^2+(1+\mu)\omega^2-1-4\zeta_1\zeta_2 f\\&-\mu\omega^2\}^2+\{2\zeta_1 f^2/\omega-2\zeta_1\omega-2(1+\mu)\zeta_2 f\omega\\&+2\zeta_2 f/\omega\}^2\end{aligned}$$

$$e_4=-P^2$$

식(8)에서 $\gamma=0$ 로 놓으면 振幅比 $|A_1|$은 線形動吸振器[3]를 부착한 경우와 일치한다.

3. 數値解析 및 考察

Fig. 1과 같은 振動系에서 主振動系에 減衰가 없는 경우에는 제 1 공진점에서 振幅比를 η_{I}, 제 2 공진점에서 振幅比를 η_{II} 라 할 때 잘 알려져 있는 바와 같이 최적고유진동수비 및 최적감쇠비를 질량비만의 함수로서 最適動吸振器의 條件을 적용하면 주어진 質量比에 대해서 제 1 공진점과 제 2 공진점에서의 振幅比의 높이가 같게되고 전체로서의 진폭비도 가장 낮게 된다.[1] 主振動系에 減衰를 수반하는 경우에 대해서는 主振動系의 振動數比에 대한 振幅比의 曲線은 $\zeta_1=0$ 에서와 같이 고유진동수비와 감쇠비에 관계없이 통과하는 두 개의 정점이 존재하지 않는다. 따라서 두 개의 공진점에서 높이를 같게 하는 動吸振器의 最適値인 最適固有振動數比와 最適減衰比를 구하는 것은 복잡하다. 이 경우의 解析法으로는 컴퓨터를 이용한 數値解析을 해야 한다. 振動系의 最適條件을 求하기 위하여 $F_{\mathrm{I}}(f,\zeta_2)=\eta_{\mathrm{I}}-\eta_{\mathrm{II}}$, $F_{\mathrm{II}}(f,\zeta_2)=\dfrac{\partial}{\partial\zeta_2}\left(\dfrac{\eta_{\mathrm{I}}+\eta_{\mathrm{II}}}{2}\right)$인 두 함수를 고려해서 주어진 질량비와 主振動系의 減衰比에 대한 F_{I}, F_{II}를 계산하고 F_{I} 과 F_{II}가 다같이 零으로 되는 f,ζ_2를 결정한다. 最適固有振動數比와 最適減衰比를 求하기 위하여 사용된 增分量 Δf와 $\Delta\zeta_2$는 다음과 같이 求할 수 있다.[8]

$$F_{\mathrm{I}}=\eta_{\mathrm{I}}-\eta_{\mathrm{II}}=0 \tag{9}$$

$$F_{\mathrm{II}}=\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\left(\frac{\eta_{\mathrm{I}}+\eta_{\mathrm{II}}}{2}\right)=0=\frac{\partial F}{\partial\zeta_2} \tag{10}$$

식(9)와 식(10)을 Taylor 급수로 전개하면

$$0=F_{\mathrm{I}}=F_{\mathrm{I}}(f,\zeta_2)+\left(\frac{\partial F_{\mathrm{I}}}{\partial f}\right)\Delta f+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_{\mathrm{I}}}{\partial f^2}\right)\Delta f^2+\cdots\cdots \tag{11}$$

$$0=F_{\mathrm{II}}=F_{\mathrm{I}}(f,\zeta_2)+\left(\frac{\partial F_{\mathrm{II}}}{\partial\zeta_2}\right)\Delta\zeta_2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_{\mathrm{II}}}{\partial\zeta_2^2}\right)\Delta\zeta_2^2+\cdots\cdots \tag{12}$$

식(11)과 식(12)에서 2次項을 생략하면

$$F_{\mathrm{I}}(f,\zeta_2)+\left(\frac{\partial F_{\mathrm{I}}}{\partial f}\right)\Delta f=0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial F}{\partial\zeta_2}+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\zeta_2^2}\right)\Delta\zeta_2=0 \tag{14}$$

로 된다.

식(13), (14)에서

$$\Delta f=-F_{\mathrm{I}}(f,\zeta_2)\Big/\frac{\partial F_{\mathrm{I}}}{\partial f} \tag{15}$$

$$\Delta\zeta_2=-\frac{\partial F}{\partial\zeta_2}\Big/\frac{\partial^2 F}{\partial\zeta_2^2} \tag{16}$$

이다. 이 경우 식(15)와 (16)에서 微係數는 解析的으로 구하는 것보다 差分式을 이용하는 편이 간단하기 때문에

$$\frac{\partial F_{\mathrm{I}}}{\partial f}=\frac{F_{\mathrm{I}}(f+\Delta f)-F_{\mathrm{I}}(f)}{\Delta f} \tag{17}$$

$$\frac{\partial F}{\partial\zeta_2}=\frac{F(\zeta_2+\Delta\zeta_2)-F(\zeta_2)}{\Delta\zeta_2} \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\zeta_2^2}=\frac{F(\zeta_2+2\Delta\zeta_2)-2F(\zeta_2+\Delta\zeta_2)+F(\zeta_2)}{\Delta\zeta_2^2} \tag{19}$$

의 式을 이용해서 계산하였다. 數値解析을 實行한 結果 最適固有振動數比와 最適減衰比를 구할 수 있으며 主振動系의 減衰比를 각각 $\zeta_1=0, 0.05, 0.1$ 및 0.15 인 경우 질량비에 대한 最適固有振動數比를 컴퓨터그래픽으로 表示하면 Fig. 2와 같다. Fig. 2에서 알 수 있는 바와같이 질량비와 主振動系의 減衰比가 증가함에 따라 最適固有振動數比는 서서히 減少한다.

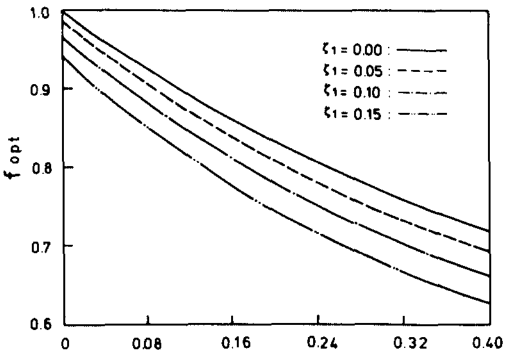

Fig. 2 Optimal natural frequency ratio versus mass ratio

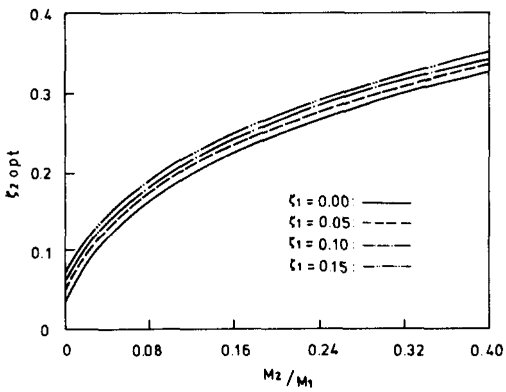

Fig. 3 Optimal damping ratio versus mass ratio

Fig. 3은 質量比에 대한 最適減衰比를 나타낸 것이며 質量比가 증가함에 따라 최적감쇠비는 서서히 증가하며 主振動數系의 減衰比의 增加에 대해서는 최적감쇠비가 아주 微小하게 增加하는 것을 알 수 있다.

減衰를 수반하는 振動系에 數值解析을 통해서 구한 最適固有振動數比와 最適減衰比를 적용한 경우의 제 1 공진점과 제 2 공진점에서의 振幅比의 차이는 거의 없으며 振動系의 同調를 얻기 위해서는 固有振動數比와 減衰比의 어느 것이나 最適值를 이용하는 것이 필요하지만 특히 固有振動數比의 最適值를 이용하는 것이 減衰比의 最適值를 이용하는 것보다 중요하다.

Fig. 4는 主振動系의 減衰比가 0.1일때 質量比가 0.1, 0.2, 0.3 및 0.4인 경우 最適固有振動數比와 最適減衰比를 적용하여 振動數比에 대한 主振動系의 振幅比를 나타낸 것이며 Fig. 4에서 알 수 있는 바와 같이 각 질량비에 대한 두 개의 공진점에서 振幅比는 거의 같고, 질량비가 증가하면 振幅比는 減少하며 제 1 공진점과 제 2 공진점서에의 振動數比도 서서히 減少함을 알 수 있다.

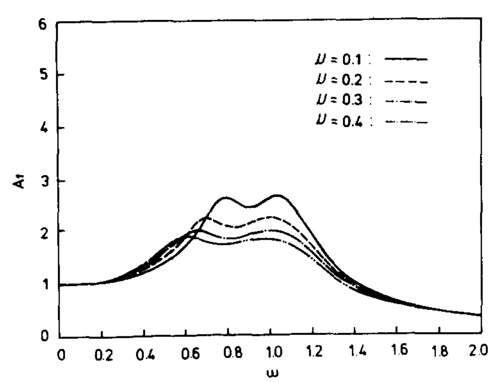

Fig. 4 Amplitude ratio versus frequency ratio for various mass ratio ($\zeta_1=0.1$, $\gamma=0$)

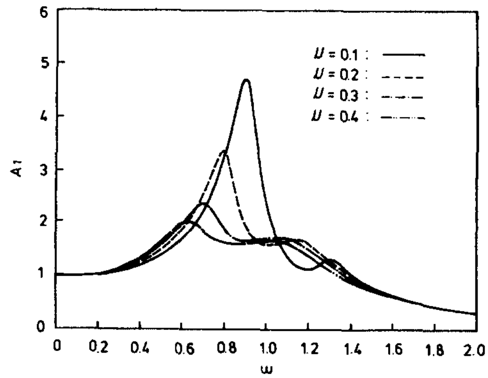

Fig. 5 Amplitude ratio versus frequency ratio for various mass ratio ($\zeta_1=0.1$, $\gamma=0.005$)

Fig. 5는 主振動系의 減衰比가 0.1, $\gamma=0.005$인 경우 질량비가 0.1, 0.2, 0.3 및 0.4일때 振動數比에 대한 振幅比를 컴퓨터그래픽한 것이며 質量比의 增加에 따라 제 1 공진점과 제 2 공진점에서의 진동수비와 진폭비가 減少하고 있음을 나타낸다. 이와 같은 현상은 線形系와 같은 경향이며 振幅比의 크기는 線形系와 큰 差異가 있음을 나타낸다.

Fig. 6은 主振動系의 減衰比가 0.1인 경우 $\gamma=0.01$일때 질량비의 변화에 따라 진동수비에 대한 진폭비를 나타낸 것이다. 질량비의 증가로 진폭비와 공진진동수비가 점점 감소하고 있으며 이것은 γ가 0.005인 경우의 Fig. 5와 동일한 경향이며 다만 非線形性의 증가로 振幅比가 增加하였음을 나타낸다.

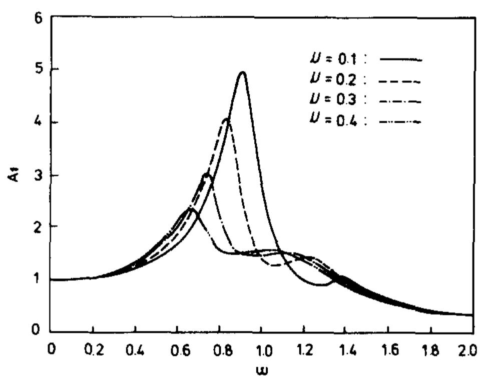

Fig. 6 Amplitude ratio versus frequency ratio for various mass ratio ($\zeta_1=0.1$, $\gamma=0.01$)

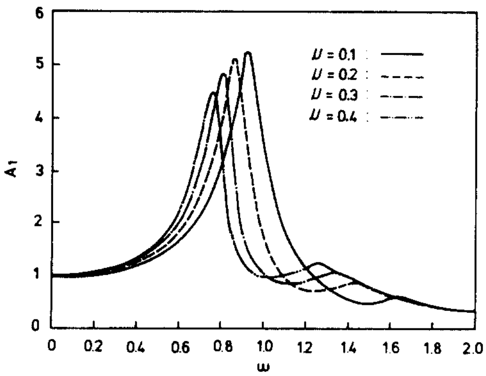

Fig. 7 Amplitude ratio versus frequency ratio for various mass ratio ($\zeta_1=0.1$, $\gamma=0.05$)

Fig. 7은 $\zeta_1=0.1$, $\gamma=0.05$인 경우 진동수비에 대한 진폭비를 나타낸 것이다. 질량비의 增加로 진폭비와 공진진동수비가 減少하고 있으나 非線形性의 增加로 振幅比의 減少量이 微少함을 알 수 있다.

Fig. 8은 $\zeta_1=0.1$, $\gamma=-0.005$인 軟性스프링인 경우에 질량비를 파라미타로 하여 振動數比에 대한 振幅比를 나타낸 것이다. 硬性스프링을 적용한 경우에는 제 1 공진점에서의 振幅比가 제 2 공진점에서의 진폭비보다 큰 데 비해서 軟性스프링을 적용한 경우에는 제 2 공진점에서의 진폭비가 제 1 공진점에서의 진폭비보다 큰 것을 나타낸다. 또한 질량비의 증가에 따라 振幅比는 減少하나 공진점에서의 진동수비는 硬性스프링인 경우에 비해서 매우 微小하게 減少하고 있음을 나타낸다.

Fig. 9와 Fig. 10은 각각 主振動系의 減衰比가 0.1인 경우에 $\gamma=-0.01$과 $\gamma=-0.05$인 軟性스프링을 적용한 경우의 振動數比에 대한 振幅比를 나타낸 것이다. 질량비의 증가에 따라 振幅比와 共振振動數比는 점점 減少하나 γ값의 增加에 따라 振幅比는 증가하고 硬性스프링인 경우에 비해서 공진진동수비의 減少는 매우 微小하다.

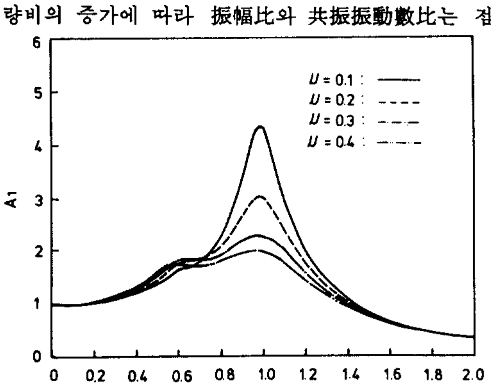

Fig. 8 Amplitude ratio versus frequency ratio for various mass ratio ($\zeta_1=0.1$, $\gamma=-0.005$)

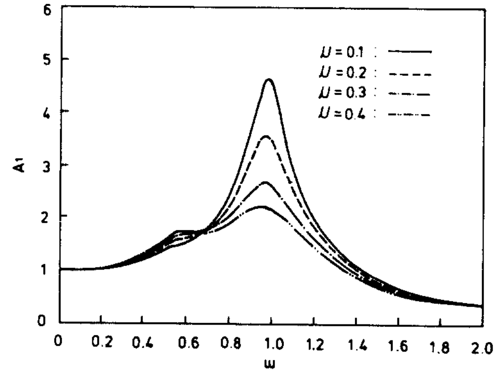

Fig. 9 Amplitude ratio versus frequency ratio for various mass ratio ($\zeta_1=0.1$, $\gamma=-0.01$)

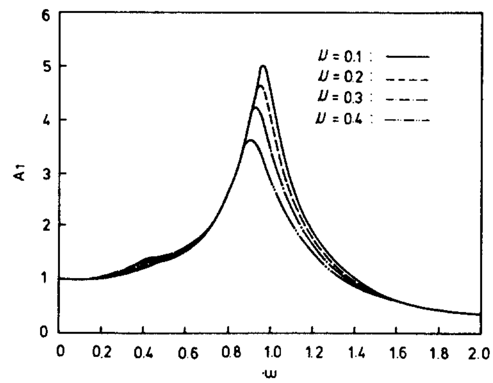

Fig. 10 Amplitude ratio versus frequency ratio for various mass ratio ($\zeta_1=0.1$, $\gamma=-0.05$)

非線形動吸振器를 부착한 경우에 γ의 값이 微小할 때는 振幅比에 대한 질량비의 영향이 線形系와 유사하나 γ값의 增加에 따라 質量比의 變化는 振幅比에 대한 영향이 微小하며 이것은 非線形動吸振器의 특징이다.[9] 또한 非線形振動系에서 일어날 수 있는 점프현상과 不安定應答이 存在하지 않는 것은 식(7), (8)에서 하나의 實根과 두 개의 虛根이 存在하기 때문이며 이와 같은 현상은 減衰比와 固有振動數 및 加振力의 크기 등에 대한 영향때문이라고 생각된다.

4. 結 論

非線形스프링과 線形減衰器로서 구성된 動吸振器에

관해서 硏究한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 非線形性이 일정한 경우 振幅比는 질량비의 증가에 따라 減少한다.

(2) 質量比가 일정한 경우 非線形性이 증가하면 振幅比도 증가한다.

(3) 硬性스프링인 경우에는 제 1 공진점에서의 振幅比가 증가하나 軟性스프링인 경우에는 제 2 공진점에서의 振幅比가 증가한다.

後 記

本 硏究를 수행하는 데 많은 助言을 해준 New York 주립대학 機械·航空工學科 Andres Soom 敎授, 群馬大學工學部 機械工學科 小島宏行 敎授, 千葉工業大學 精密機械工學科 五百井俊宏 敎授께 깊이 感謝드린다.

참 고 문 헌

(1) Den Hartog, 1956, "Mechanical Vibrations", Mc-GRAW, London, pp. 93～104.

(2) S.E. Randall, D.M. Halsted and D.L. Taylor, 1981, Optimum Vibration Absorbers for Linear Damped Systems, Tran. of the ASME, Vol. 103, pp. 908～913.

(3) Kwang Joon Kim, 1984, "Optimal Design of a Vibration Absorber Against Machine Tool Chatter", Tran. of the KSME, Vol. 8, No. 2, pp. 162～170.

(4) A. Soom and Ming San Lee, 1983, "Optimal Design of Linear and Nonlinear Vibration Absorbers for Damped Systems", Tran. of the ASME, Vol. 105, pp. 112～119.

(5) R. Riganti, 1980, "Subharmonic Steady Vibrations of a Nonlinear Damper with Two Degree of Freedom and Viscous Damping", Int. J. Non-linear Mechanics, Vol. 15, pp. 173～183.

(6) J.B. Hunt and J.C. Nissen, 1982, "The Broad-band Dynamic Vibration Absorber", J. of Sound and Vibration, Vol. 83, No. 4, pp. 573～578.

(7) M.A.V. Rangacharyulu, 1983, "Response of Non-linear Non-conservative Systems of Two Degree of Freedom to Transient Excitations", J. of Sound and Vibration, Vol. 91, No. 1, pp. 45～56.

(8) Toshihiro Ioi and Ken Ikeda, 1978, "On the Dynamic Vibration Damped Absorber of the Vibration System", Bulletin of the JSME, Vol. 21, No. 151, pp. 64～71.

(9) L.A. Pipes, 1953, "Analysis of a Non-linear Dynamic Vibration Absorber", J. of Applied Mechanics, p. 518.