

<論 文>

변분원리를 활용한 비선형 진동해석

박 철 희* · 이 장 무** · 박 영 필***

(1987년 3월 23일 접수)

Nonlinear Vibration Analysis using Variational Principle

Chul Hui Pak, Jang Moo Lee and Young-Pil Park

Key Words: Variational Principle(변분원리), Assumed Solution(가정해), Trial Function(시도함수), Approximated Solution(간략해), Piece-wise Linear(구분적 선형)

Abstract

Simple procedures have been formulated to compute approximate natural frequency of nonlinear systems by the use of variational principle. These procedures are applicable to motion of large amplitudes, even to systems which are not linearizable. The results obtained by these procedures have been found to have good agreements with computer solutions and exact solutions for systems having piece-wise linear springs and polynomial springs.

1. 서 론

일반적인 비선형 진동문제에 대한 해석법으로 섭동법(perturbation method)이 널리 활용되고 있으나 이 방법은 비선형 항이 비교적 작은 경우에 대한 해법으로 그 유용성이 국한되어 있다. 따라서 비선형 효과가 큰 경우에도 적용이 가능한 일반화된 비선형 진동해석법의 필요성이 매우 커 이에 대한 많은 연구가 이루어져 왔다.

계를 지배하는 방정식에 가정해(assumed solution)를 대입하여 잔류(residual)를 이용하여 해석하는 가중잔류법(weighted residual method: 이하 WRM)을 비선형성이 큰 진동문제에 적용시킨 연구결과가 보고되

고 있다.

Newland⁽¹⁾는 Galerkin 및 Ritz 방법을 비선형 정상진동문제에 적용시켜 해석하여 이들 방법간의 상호관계를 연구하였으며 Krylov-Bogoliubov(이하: K-B)의 첫번째 간략해(approximated solution)가 Galerkin 방법의 특수한 경우임을 밝혔다. Werff⁽²⁾는 비선형성이 큰 진동문제에 WRM을 적용시키는 경우에 있어서 필요한 가중함수(weighting function)에 대한 연구를 통해 Collocation 방법의 가중함수의 선택에 따른 해석결과를 Martiensen 해석법, 에너지해석법 및 K-B 해석법의 결과와 비교 분석하였다. Susemihl과 Laura⁽³⁾는 비선형 회복력(restoring force)을 갖는 일자유도의 진동문제에 대해 비선형항을 삼각함수 후리에 급수 전개(trigonometric Fourier series expansion) 시킨후 Collocation 방법을 적용시켜 비선형 항이 큰 경우에 대해서 해석을 하였다.

동적인 문제에 대한 미분 지배방정식의 간략해를 구

* 정회원, 인하대학교 공과대학 기계공학과
** 정회원, 서울대학교 공과대학 기계설계학과
*** 정회원, 연세대학교 공과대학 기계공학과

하기 위해 변분원리 (variational principle)를 활용한 변분해석법이 근자에 널리 활용되고 있다. 여기에서는 진동문제에 대응되는 계의 범함수(functional)를 찾아 이 범함수에 시도함수(trial function)를 대입하여 범함수가 정류(stationary)가 되도록 시도함수의 가변 파라미터(adjustable parameters)를 선택하는 방법이다.

Hsieh⁽⁴⁻⁶⁾는 변분해석법을 Duffing의 방정식등에 적용시켜 저조파(subharmonic)진동 및 계의 안정성등을 해석하였다. Papastavridis⁽⁷⁾는 비선형 진동 주기의 간략해를 위해 계에 Hamiltonian action 원리를 적용시키는 일반 알고리즘을 발표하였다.

본 연구에서는 경성(hardening), 연성(softening) 혹은 구분적 선형성(piece-wise linear: 이하 PWL)을 가진 스프링을 포함한 일자유도계의 비선형 진동문제에 대해 비선형 항이 큰 경우, 간략해법과 변분원리를 활용한 변분해석법을 이용하여 계의 고유진동수를 구하여 이를 기존의 해석 결과와 비교 검토함으로써 변분원리를 비선형성이 큰 진동문제의 해석에 적용할 수 있는가의 타당성을 연구한다.

2. 이론해석

비선형 스프링을 갖는 비감쇠 1 자유도계의 자유진동 $x(t)$ 는 다음식으로 표시된다.

$$\ddot{x}(t) + f[x(t)] = 0; x(0) = A, \dot{x}(0) = 0 \quad (1)$$

여기서 $f(x)$ 는 비선형 스프링을 나타내는 함수로써 일반적으로 x 의 다항식(polynomial)이거나 PWL인 함수가 된다. 본 논문에서는 $f(x)$ 의 비선형 항이 큰 경우도 고려하여 해석한다.

식(1)의 스프링 함수 $f(x)$ 는 계의 복원력을 주게 되고, 복원력의 크기는 압축이나 인장에 상관없이 변위의 크기에 따라 달라지므로 일반적인 비선형 스프링함수는 기함수 즉 $f(-x) = -f(x)$ 이다. 본 연구에서는 이러한 스프링 특성만을 가정한다.

2.1 완전해

식(1)을 x 에 대해 적분하면

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2(t) + F(x) = E \quad (2)$$

를 얻는다. 여기서

$$F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi \quad (3)$$

$$E = F(A) \quad (4)$$

이다. 따라서

$$\dot{x} = \sqrt{2[F(A) - F(x)]} \quad (5)$$

가 되며

$$t = \int_A^x \frac{dx}{\sqrt{2[F(A) - F(x)]}} \quad (6)$$

가 된다. 식(6)을 진동 주기 T 로 표시하면

$$\frac{T}{4} = \int_A^0 \frac{dx}{\sqrt{2[F(A) - F(x)]}} \quad (7)$$

가 되어 계의 고유진동수 ω 는

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (8)$$

로 구할 수 있다.

2.2 간략해

식(1)과 초기조건은 주기해를 갖게 되므로 간략해는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x(t) = A \cos \omega t \quad (9)$$

진폭 A 와 고유진동수 ω 와의 관계를 구하기 위하여, $K-B$ 방법의 일차간략해(first approximation)를 쓰면

$$\omega^2 = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \cos \omega t) \cos \omega t d(\omega t) \quad (10)$$

이 되어 적분은 함수 $f(x)$ 가 주어지면 계산할 수 있으나, 경우에 따라 그 계산은 복잡할 수도 있다. 식(10)으로 표시된 적분치의 계산은 경우에 따라 아주 복잡하지만, $f(x)$ 의 특성을 이용하면 간단한 대수식으로 간략화할 수 있다. 식(1)의 초기조건을 만족하는 해 $x(t)$ 는 우함수이므로

$$\tilde{f}(t) \triangleq f[x(t)] = C_0 + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \cos 3\omega t + \dots \quad (11)$$

와 같이 Fourier 급수로 전개될 수 있다. 또한 $x(t)$ 는 $t = \frac{T}{4}$ 에서 평형위치 $x=0$ 을 통과하고 함수 $f(x)$ 의 특성에 의하여 다음과 같은 관계식

$$x\left(\frac{T}{4} - t\right) = -x\left(\frac{T}{4} + t\right) \quad (12)$$

이 모든 t 에서 성립함을 알 수 있다. 이를 식(11)에 대입하면

$$\begin{aligned} f\left[x\left(\frac{T}{4} - t\right)\right] &= \tilde{f}\left(\frac{T}{4} - t\right) \\ &= C_0 + C_1 \cos \omega\left(\frac{T}{4} - t\right) \\ &\quad + C_2 \cos 2\omega\left(\frac{T}{4} - t\right) + \dots \\ &= C_0 + C_1 \sin \omega t - C_2 \cos 2\omega t - C_3 \sin 3\omega t \\ &\quad + C_4 \cos 4\omega t + \dots \\ f\left[-x\left(\frac{T}{4} + t\right)\right] &= -\tilde{f}\left(\frac{T}{4} + t\right) \\ &= -\left[C_0 + C_1 \cos \omega\left(\frac{T}{4} + t\right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+C_2\cos 2\omega\left(\frac{T}{4}+t\right)+\dots \\
 &=-C_0+C_1\sin\omega t+C_2\cos 2\omega t \\
 &\quad -C_3\sin 3\omega t-C_4\cos 4\omega t+\dots
 \end{aligned}$$

윗 식에서 보인 바와 같이 $C_{2n}=0$, $n=0, 1, 2, \dots$ 임을 알 수 있으므로 식(11)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 f(A\cos\omega t) &\doteq f(x(t)) \quad (13) \\
 &=C_1\cos\omega t+C_3\cos 3\omega t+C_5\cos 5\omega t+\dots
 \end{aligned}$$

이러한 Fourier 급수는 첫 항이 지배적이며, 차수가 높을 수록 작은 값을 갖게 되므로

$$\left|\frac{C_3}{C_1}\right|\ll 1, \quad \left|\frac{C_5}{C_3}\right|\ll 1, \dots$$

과 같이 가정한다. 식(13)을 식(10)에 대입하면, K-B 방법의 해를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\omega^2 = \frac{C_1}{A} \quad (14)$$

계수 C_1 을 구하기 위하여 $\omega t = \pi/6$ 으로 놓게 되면

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}A\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}(C_1 - C_3 + C_5 - C_7 + \dots) \doteq \frac{\sqrt{3}}{2}C_1 \quad (15)$$

을 얻게 되어 이를 식(14)에 대입하면

$$\omega^2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}A} f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}A\right) \quad (16)$$

의 간략해를 얻는다.

식(14)와 식(16)의 차이는 C_3, C_5, C_7 등의 고차 조화계수로 표시되므로 본 연구에서 구한 간략해(16)은 K-B 방법과 비교하여, ω^2 의 오차한계는 5차 조화계수 범위가 됨을 알 수 있다. 특히 $f(x)$ 가 선형과 3차 항으로 표시되는 Duffing 식에서는 두가지 방법이 일치된다.

2.3 변분해석법에 의한 해

운동에너지를 $T(\dot{x})$ 및 탄성에너지를 $V(x)$ 라 하면 식(1)에 대한 Hamiltonian action 범함수는

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{x}, x) dt \quad (17)$$

로서 표시되며 여기서 $L = T - V$ 로써 식(1)의 Lagrangian 함수이다. 외력이 없는 경우로서 식(17)에 대한 변분을 취하여 정리하면

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x \right] dt \quad (18)$$

가 되며 평형점을 기준점으로 잡으면 가상속도 $\delta \dot{x}$ 및 가상변위 δx 는 실제변위 \dot{x} 및 x 로 표시될 수 있다. 따라서 Hamilton의 원리를 1 사이클에 대해 적용시키면

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \dot{x} = 2T$$

$$-\frac{\partial L}{\partial x} \delta x = -\frac{\partial V}{\partial x} x \quad (19)$$

가 되어 결국 식(18)은

$$\oint \left[2T - \frac{\partial V}{\partial x} x \right] dt = 0 \quad (20)$$

로 나타낼 수 있다. 본 논문에서는 식(20)에 대해 식(9)와 같이 하나의 항만을 가정한 시도함수를 사용한다. 그러나 PWL의 경우에 대해서는 $V(x)$ 의 계산에 대해 스프링 상수가 변위에 대해 변하므로 식(19)의 적분구간이 분할된다.

3. 수치해석 및 검토

3.1 Duffing의 방정식

다음의 Duffing의 방정식을 해석한다.

$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) + \mu x^3(t) = 0; \quad x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (21)$$

식(1)과 식(21)로부터

$$f(x) = \omega_n^2 x + \mu x^3 \quad (22)$$

$$\text{이 되어 식(3)으로부터 } F(x) = \frac{1}{2}\omega_n^2 x^2 + \frac{1}{4}\mu x^4 \quad (23)$$

이 되어 식(6)에 대입하여 정리하면

$$t = \sqrt{\frac{2}{\mu}} \int_A^x \frac{dx}{\sqrt{(A^2 - x^2)\left(x^2 + A^2 + \frac{2\omega_n^2}{\mu}\right)}} \quad (24)$$

를 얻는다. 양변에 ω_n 을 곱하고

$$\eta = \frac{x}{A}, \quad \alpha = \frac{\mu A^2}{\omega_n^2} \quad (25)$$

의 파라미터를 이용하여 정리하면

$$\omega_n t = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \int_1^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)\left(\eta^2 + 1 + \frac{2}{\alpha}\right)}} \quad (26)$$

가 되어 식(8)을 이용하면

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)\left(\eta^2 + 1 + \frac{2}{\alpha}\right)}} \quad (27)$$

를 얻는다. 식(27)을 타원적분함수 형태로 변환시키는 경우 α 의 부호에 따라 다음의 두 경우를 얻는다.

$\alpha > 0$ 경우

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1}{1+\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-K_1 \sin^2 \theta}} \quad (28)$$

$$K_1 = \frac{\alpha}{2(1+\alpha)}$$

$-1 < \alpha < 0$ 경우

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\alpha+2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-K_2 \sin^2 \theta}} \quad (29)$$

$$K_2 = \frac{-\alpha}{2+\alpha}$$

이 되며 식(28)과 (29)는 타원적분이 되어 해를 구할 수 있다.

변분해를 위해 식(21)에 대해 운동에너지와 탄성에너지를 구하면

$$T(\dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2$$

$$V(x) = \frac{1}{2} \omega_n^2 x^2 + \frac{1}{4} \mu x^4$$

이 되어 이를 식(20)에 대입하고 시도함수로 식(9)를 사용하면

$$\oint \left(2T - \frac{\partial V}{\partial x} x \right) dt = \frac{\pi}{\omega} \left[A^2 \omega^2 - A^2 \omega_n^2 - \frac{3}{4} \mu A^4 \right] = 0 \tag{30}$$

이 되어

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \alpha} \tag{31}$$

을 얻게 된다.

간략해로는 식(16)과 식(22)로부터

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{2}{\sqrt{3} A} \left[\omega_n^2 \frac{\sqrt{3}}{2} A + \mu \left(\frac{\sqrt{3}}{2} A \right)^3 \right] \\ &= \omega_n^2 + \frac{3}{4} \mu A^2 \end{aligned}$$

이 되어 식(27)과 동일한 해를 갖는다.

식(28), (29) 및 (31)의 α 는 식(25)로 정의된 비선형의 크기를 나타내는 파라미터가 된다.

α 의 변화에 따른 $\left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)$ 의 변화가 Table 1과 Fig. 1

Table 1 Dependence of $\left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)$ upon nonlinear parameter $\alpha \left(= \frac{\mu A^2}{\omega_n^2} \right)$ of Duffing's Equation: $\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) + \mu x(t)^3 = 0$

α	$\frac{\omega}{\omega_n}$		
	Exact	Runge-Kutta	Variational and Approximated
2.50	1.680	1.680	1.696
2.25	1.626	1.628	1.639
2.00	1.569	1.563	1.581
1.75	1.510	1.503	1.521
1.50	1.449	1.448	1.458
1.25	1.385	1.384	1.392
1.00	1.318	1.314	1.323
0.75	1.247	1.242	1.250
0.50	1.171	1.168	1.173
0.25	1.089	1.087	1.090
0.00	1.000	1.000	1.000
-0.1	0.962	0.960	0.962
-0.2	0.921	0.918	0.922
-0.3	0.879	0.877	0.880
-0.4	0.833	0.830	0.837
-0.5	0.785	0.781	0.791
-0.6	0.731	0.729	0.742
-0.7	0.671	0.668	0.689
-0.8	0.580	0.576	0.632
-0.9	0.506	0.505	0.570
-1.0	0.0		0.5

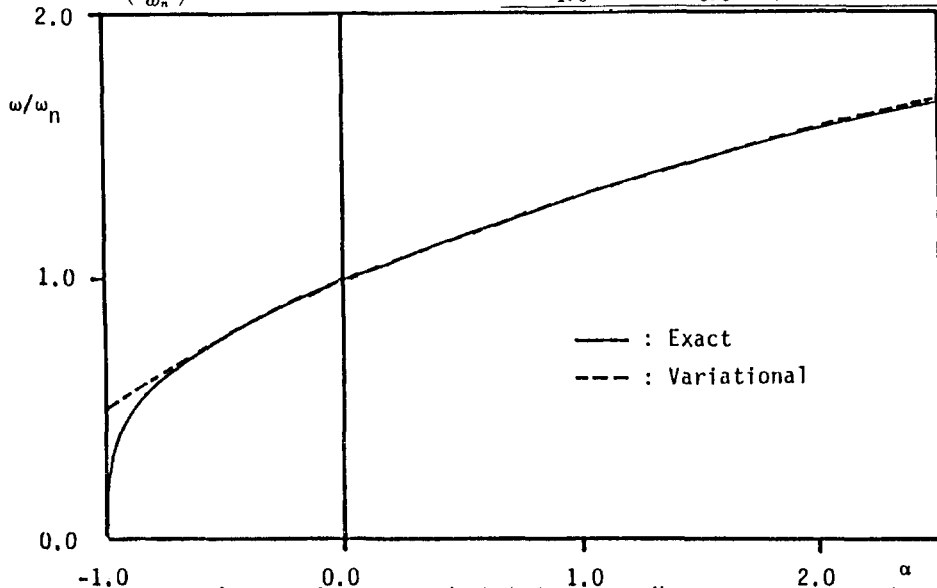


Fig. 1 Dependence of natural frequency ratio (ω/ω_n) upon nonlinear parameter $\alpha (= \mu A^2/\omega_n^2)$

에 나타나 있다. Table 1과 Fig. 1에서 볼 수 있듯이 $\alpha > 0$ 즉 경성 스프링의 경우는 변분해와 간략해가 비선형항이 큰 경우에 있어서도 완전해와 1% 이하의 오차를 보이고 있다. 또한 비선형이 연성 즉 $\alpha < 0$ 의 영역에서도 변분해와 간략해가 완전해에 근접한 결과를 보이고 있다. 그러나 $\alpha = -1$ 영역 즉 연성이면서 비선형성이 임계값 부근에 오면 완전해는 급격히 0으로 접근하는 반면 간략해와 변분해는 0.5에 접근하는 것을 볼 수 있으므로 α 의 임계값 부근에서는 이들 방법을 적용시킬 수 없다. 수치해법으로 널리 활용되고 있는 4차의 중실수 Runge-Kutta의 적분법을 이용한 결과도 포함되어 있다. 이를 종합적으로 볼때 비선형성이 큰 경성 스프링 경우 및 연성 스프링의 경우에 있어서도 임계값($\alpha = -1$) 부근을 제외한 부근에서 변분원리와 간략해를 이용한 본 연구의 해석방법이 크게 활용될 수 있음을 알 수 있다.

3.2 PWL의 비선형을 갖는 스프링

PWL의 스프링 특성을 갖는 예로서 Fig. 2의 4가지 경우를 생각한다.

Fig. 2의 (a) 경우에 대한 비선형 스프링 함수는

$$f(x) = b - \frac{x}{|x|} \tag{32}$$

로 표시되며 이 식을 식(3)과 (8)에 대입하여 정리하면

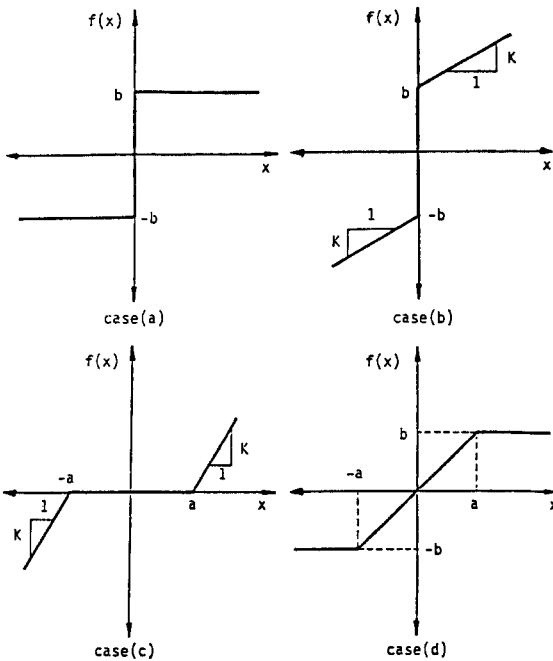


Fig. 2 Piece-wise linear springs

$$\omega = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \sqrt{\frac{b}{A}} = 1.11 \sqrt{\frac{b}{A}} \tag{33}$$

의 완전해를 얻는다. 또한 식(32)를 식(16)에 대입하여 정리하면

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}} \sqrt{\frac{b}{A}} = 1.074 \sqrt{\frac{b}{A}} \tag{34}$$

의 간략해를 얻는다. 또한 변분원리를 이용하기 위해 해를 식(9)로 가정하고 이를 식(20)에 대입하여 정리하면

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \sqrt{\frac{b}{A}} = 1.128 \sqrt{\frac{b}{A}} \tag{35}$$

식을 얻게된다.

식(33), (34), (35)에서 볼 수 있듯이 간략해와 변분해는 완전해에 비해 3% 이내의 오차를 갖는다. Fig. 3은 위상평면(phase plane)에서 $\dot{x}(t)$ 와 $x(t)$ 의 시간계획을 나타낸다. 초기조건 A와 스프링 파라미터 b값이 변화하여도 기본적인 형태는 크게 변화하지 않음을 알 수 있다.

Fig. 2의 (b) 경우에 대한 비선형 스프링 함수는

$$f(x) = Kx + b - \frac{x}{|x|} \tag{36}$$

로서 식(36)을 식(3), (4)에 대입하고 이를 이용하여 식(7)과 (8)로부터

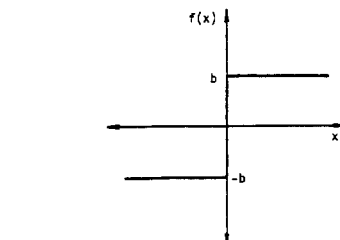
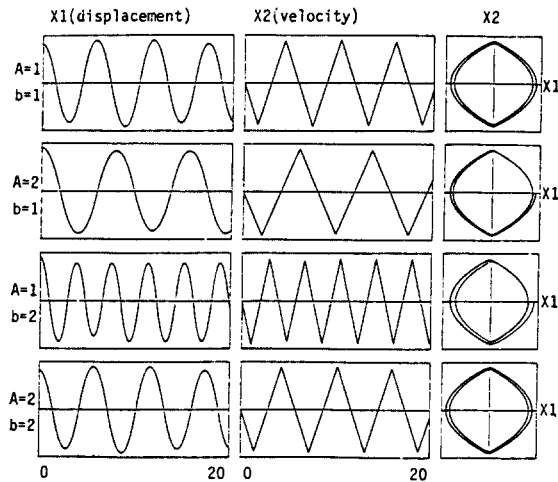


Fig. 3 Trajectories on phase plane: case (a)

Table 2 Dependence of natural frequency ω upon initial condition A and spring parameters K and b (see. Fig. 2 (b) case)

A	K	b	ω			
			Exact	Runge-Kutta	Approximated	Variational
1	1	1	1.5000	1.503	1.4679	1.5077
		2	1.8679	1.864	1.8192	1.8832
		3	2.1734	2.174	2.1128	2.1954
	2	1	1.8046	1.800	1.7762	1.8092
		2	2.1213	2.116	2.0759	2.1323
		3	2.3956	2.398	2.3375	2.4124
	3	1	2.0641	2.067	2.0383	2.0672
		2	2.3469	2.353	2.3042	2.3551
		3	2.5981	2.596	2.5425	2.6115
2	1	1	1.2761	1.274	1.2559	1.2793
		2	1.5000	1.500	1.4679	1.5077
		3	1.6940	1.698	1.6592	1.7058
	2	1	1.6222	1.624	1.6054	1.6238
		2	1.8046	1.800	1.7762	1.8092
		3	1.9696	1.970	1.9319	1.9773
	3	1	1.9060	1.904	1.8914	1.9070
		2	2.0641	2.066	2.0383	2.0672
		3	2.2102	2.212	2.1753	2.2158

Table 3 Dependence of natural frequency ω upon initial condition A and spring parameters K and a (See Fig. 2(c) case)

A	K	a	ω			
			Exact	Runge-Kutta	Approximated	Variational
3	1	1	0.7586	0.758	0.7843	0.7639
		2	0.4399	0.438	0.4798	0.4681
	2	1	1.0728	1.072	1.1091	1.0804
		2	0.6221	0.620	0.6785	0.6620
	3	1	1.3183	1.314	1.3584	1.3232
		2	0.7619	0.762	0.8310	0.8107
4	1	1	0.8249	0.825	0.8434	0.8277
		2	0.6110	0.609	0.6501	0.6253
		3	0.3437	0.343	0.3660	0.3779
	2	1	1.1666	1.166	1.1928	1.1705
		2	0.8641	0.864	0.9194	0.8843
		3	0.4860	0.484	0.5176	0.5372
	3	1	1.4288	1.428	1.4608	1.4336
		2	1.0583	1.058	1.1260	1.0831
		3	0.5952	0.593	0.6340	0.6579

$$\omega = \frac{\frac{\pi}{4} \sqrt{K}}{\tan^{-1} \sqrt{\frac{A}{A + \frac{2b}{K}}}} \quad (37)$$

의 완전해를, 식(36)과 (16)으로 부터

$$\omega = \sqrt{K + \frac{2b}{\sqrt{3}A}} \quad (38)$$

의 간략해를, 식(9)와 같이 해를 가정하여서 식(36)을

식(20)에 대입하여 정리하면

$$\omega = \sqrt{K + \frac{4b}{\pi A}} \quad (39)$$

의 변분원리 해를 얻는다.

Table 2에 초기조건 A 와 스프링 파라미터 K 와 b 의 변화에 따른 각 해들간의 비교와 Runge-Kutta에 의한 결과가 있다. Table 2에서 볼 수 있듯이 A, K, b 의 모든 범위에 있어서 1%이내의 오차가 발생되어 간

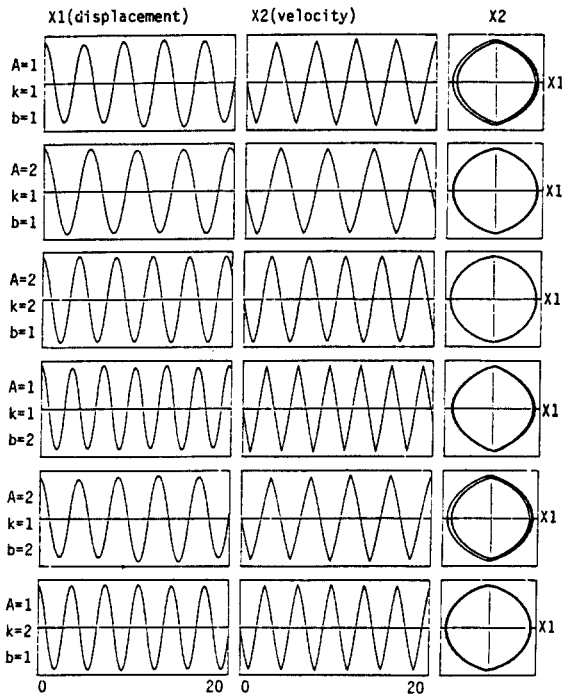


Fig. 4 Trajectories on phase plane: case (b)

략해 및 변분해석법이 훌륭히 적용될 수 있음을 알 수 있다. Fig. 4에 위상평면에서의 $x(t)$ $\dot{x}(t)$ 의 궤적을 보이고 있으며 여기서도 초기조건 A 와 스프링 파도미터 K, b 의 변화에도 불구하고 기본형태는 크게 변하지 않는다.

Fig. 2의 (c)의 경우에 대한 비선형 스프링 함수는

$$f(x) = \frac{K}{2}|x-a| - \frac{K}{2}|x+a| + Kx \quad (40)$$

로 표현되며 이를 이용하면 완전해로서

$$\omega = \frac{\sqrt{K}\pi}{\left[\frac{a}{A-a} + \frac{\pi}{2} \right]} \quad (41)$$

간략해로서

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{2} \left(\left| \frac{\sqrt{3}}{2}A - a \right| - \left| \frac{\sqrt{3}}{2}A + a \right| + \sqrt{3}A \right) \frac{\sqrt{3}A}{2}}$$

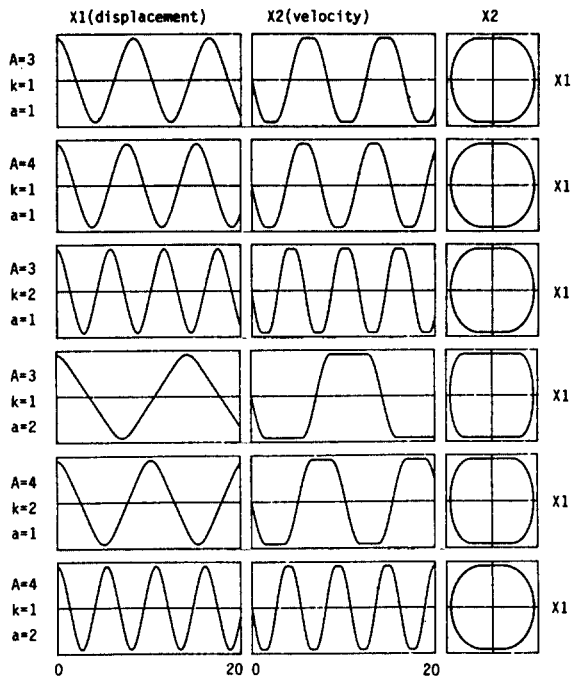


Fig. 5 Trajectories on phase plane: case (c)

을 얻을 수 있으며 변분법에 의한 해로는

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{\pi}} \sqrt{2\cos^{-1}\left(\frac{a}{A}\right) - \frac{2a}{A} \frac{\sqrt{A^2 - a^2}}{A}} \quad (42)$$

를 얻는다.

Table 3에 A 및 K, a 의 변화에 따른 각 해들간의 비교가 있다. Table 3에서 볼 수 있듯이 이 경우도 간략해나 변분해가 모두 완전해와 약 1% 정도의 오차범위 내에서 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. Fig. 5에 위상평면상의 $x(t)$ 와 $\dot{x}(t)$ 의 궤적이 나타나 있다.

Fig. 2의 (d) 경우에 대해 스프링 함수는

$$f(x) = \frac{b}{2a}|x+a| - \frac{b}{2a}|x-a| \quad (44)$$

이 되어 이를 직접 대입하여 $A > a$ 인 경우에 대해 완전해로서

Table 4 Dependence of natural frequency ω upon initial condition A and spring parameters a and b (see Fig. 2(d) case)

A	a	b	ω			
			Exact	Runge-Kutta	Approximated	Variational
2	1	1	0.7739	0.775	0.7598	0.7804
		2	1.0945	1.093	1.0746	1.1036
		3	1.3404	1.340	1.3161	1.3517
	2	1	0.7071	0.708	0.7071	0.7071
		2	1.0000	1.001	1.0000	1.0000
		3	1.2247	1.225	1.2247	1.2247
	3	1	0.5774	0.575	0.5774	0.5774
		2	0.8165	0.816	0.8165	0.8165
		3	1.0000	1.001	1.0000	1.0000
3	1	1	0.6376	0.637	0.6204	0.6453
		2	0.9017	0.901	0.8774	0.9126
		3	1.1043	1.104	1.0746	1.1177
	2	1	0.6221	0.621	0.6204	0.6249
		2	0.8798	0.880	0.8774	0.9126
		3	1.0775	1.078	1.0746	1.0823
	3	1	0.5774	0.575	0.5774	0.5774
		2	0.8165	0.816	0.8165	0.8165
		3	1.0000	1.001	1.0000	1.0000

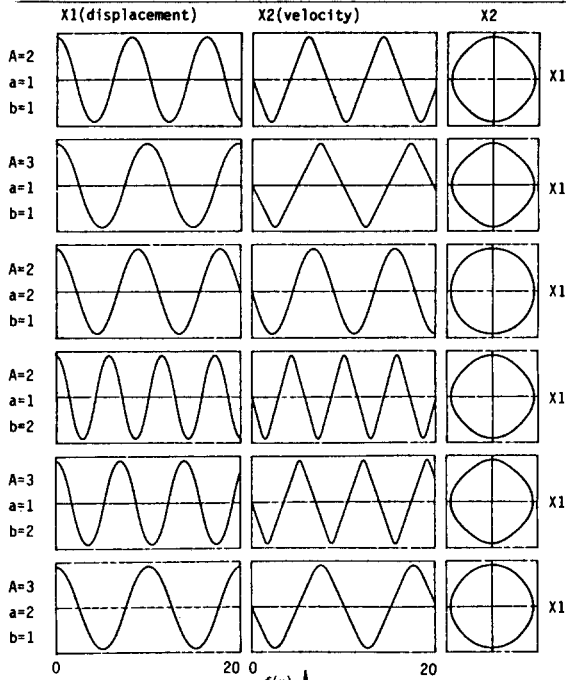


Fig. 6 Trajectories on phase plane: case(d)

$$\omega = \frac{\pi}{2} \left[\sqrt{\frac{a}{b} \sin^{-1} \sqrt{\frac{a}{2A-a}} + \sqrt{\frac{2}{b}} \sqrt{A-a}} \right] \quad (45)$$

간략해로서

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{b}{2a} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} A + a \right) - \left| \frac{\sqrt{3}}{2} A - a \right|}{\frac{\sqrt{3}}{2} A}} \quad (46)$$

변분해로서

$$\omega = \sqrt{\frac{b}{a}} \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \left[\cos^{-1} \frac{a}{A} - \frac{a \sqrt{A^2 - a^2}}{A^2} \right] \right\} \quad (47)$$

을 얻는다.

Table 4에 이들 해법들에 의한 결과를 보이고 있다. Table 4에서 볼 수 있듯이 이 경우에 있어서는 변분 해석법이 훌륭히 적용됨을 알 수 있다. Fig. 6에 위 상평면에서의 $x(t)$ 와 $\dot{x}(t)$ 의 궤적이 나타나 있다.

4. 결 론

비선형문제에 대한 해법으로 널리 활용되고 있는 섭동법은 비선형항이 작아야만 되는 제약조건으로 인해 과 응용범위가 한정되나 본 연구에서는 한개의 시도할 수만을 사용한 간략화법 및 변분원리를 이용한 변분해석법을 비선형항이 큰 Duffing의 방정식 및 PWL진동문제에 적용시켜 이들의 결과가 완전해와 잘 일치함을 보임으로서 변분원리를 활용한 변분해석법이 보다

일반적인 비선형문제의 해석에 널리 적용될 수 있음을 보여주었다.

후 기

본 연구는 1986년 삼미문화재단의 연구비에 의하여 연구되었으며, 관계자 여러분께 감사사를 드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Newland, D.E., 1965, "On the Methods of Galerkin, Ritz, and Krylov-Bogoliubov in the Theory of Nonlinear Vibration", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 7, pp. 159~172.
- (2) Werff, T.J.V., 1973, "A New Weighting Functions for Solving Nonlinear Oscillation Problems", *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 15, pp. 913~920.
- (3) Susemihl, E.A. and Laura, P.A.A., 1975, "Analysis of Nonlinear Vibrating systems by the Collocation Technique", *J. Sound and Vibration*, Vol. 41(2), pp. 256~258.
- (4) Hsieh, D.Y., 1975, "Variational Methods and Nonlinear Forced Oscillation", *J. Math. Phys.*, Vol. 16(2), pp. 275~280.
- (5) Hsieh, D.Y., 1979, "Variational Method and Mathieu Equation", *J. Math. Phys.*, Vol. 19(5), pp. 1147~1151.
- (6) Hsieh, D.Y., 1980, "On the Mathieu Equation with Damping", *J. Math. Phys.*, Vol. 21(4), pp. 722~725.
- (7) Papastavridis, J.G., 1986, "The Variational and Variational-like Theory of Oscillations and Stability of Non-conservative and/or Nonlinear Mechanical Systems", *J. Sound and Vibration*, Vol. 104(2), pp. 209~227.