

<論 文>

평면 4:1 수축을 지나는 어퍼 콘벡티드 맥스웰 유체
유동의 수치 시뮬레이션

송 진 호* · 유 정 열**

(1986년 10월 18일 접수)

Numerical Simulation of Upper Convected Maxwell Fluid Flow
through Planar 4:1 Contraction

Jin Ho Song and Jung Yul Yoo

Key Words: Planar 4:1 Contraction(평면 4:1 수축), Upper Convected Maxwell Fluid (어퍼 콘벡티드 맥스웰 유체), Corner Vortex(모서리 와류), Type Dependent Difference Method(형식에 따른 차분법), Change of Type(형식변화), Viscoelastic Fluid(점탄성 유체)

Abstract

Numerical simulation of the flow of upper convected Maxwell fluid through planar 4:1 contraction has been performed using type dependent difference approximation of vorticity equation. For creeping flow assumption, the numerical convergence has been achieved up to much higher values of elasticity parameter than those obtained by conventional finite difference method. For non-vanishing Reynolds number flow, it is shown that the corner vortices disappear, which is in good qualitative agreement with extant experimental results. In doing so, spatial distributions of stream function, vorticity and stresses are considered in relation to change of type of vorticity.

기호설명

L	: 특성 길이
$p_1, \underline{\tau}$: 무차원 Cauchy 응력 텐서의 미정 성분과 결 정 성분
R	: Reynolds 수 = $\rho UL/\eta$
U	: 특성 속도
\underline{u}	: 무차원 속도
(u, v)	: \underline{u} 의 성분
W	: Weissenberg 수 = $\lambda U/L$

(x, y)	: 원점이 중심면 위에 있는 무차원 직각좌표계 에서의 좌표
η	: 점성계수
λ	: 응력 완화 시간
ρ	: 밀도
(σ, γ, τ)	: $\underline{\tau}$ 의 성분 $\underline{\tau} = (\tau^{xx}, \tau^{yy}, \tau^{xy})$
ψ	: 유동함수
ω	: 와도

1. 서 론

* 서울대학교 대학원 기계공학과

** 정희원, 서울대학교 공과대학 기계공학과

점탄성 유동의 수치해석에서 많은 관심의 대상이 되

고있는 중요한 미해결문제 중의 하나는, 탄성 매개변수 가 그다지 크지 않은 경우에도 수치해석의 수렴성이 파괴되는 것이다⁽¹⁾. 이러한 현상은 긴 기억 효과를 가지 는 유체모형을 다루고자 할 때 발생되는데, 수치해석 방법, 반복 계산법의 개선, 혹은 유체모형의 변화 등 다양한 노력에도 불구하고 잘 해결되지 않고 있다. 최근 Joseph, Renardy 와 Saut⁽²⁾는 유동의 속도와 유체 의 풀성치인 전단파의 전파속도와의 비로 정의되는 점 탄성 마하수(viscoelastic Mach number)가 일정한 값 이상이 되면, 점탄성 유동을 기술하는 지배방정식이 마치 전음속 유동에서와 같이 형식변화되며 특성곡선이 존재하게 됨으로써, 이러한 수치해석의 어려움이 유발 될 수 있는 것을 제안하였다. 연이어, Yoo, Ahrens 와 Joseph⁽³⁾은 upper convected Maxwell 유체의 흡입유동 을 섭동시킴으로써, 선형해석을 수행하고, 원추형태의 특성곡선균이 존재함을 보였다. Yoo 와 Joseph⁽⁴⁾은 파형 벽면사이를 흐르는 동일한 유체의 Poiseuille 유동을 고찰하고, 섭동된 와도가 특성곡선을 따라 전파, 감쇠 되는 것을 보였다. 따라서 본 연구에서는, 위의 연구 에서 제안되는 즉, 유동장 내에서 형식이 변화되는 새롭고 보다 정확한 형태의 와도방정식을 사용하여 평면 4:1 수축을 지나는 유동을 수치모사하고자 한다. 2장 에서는 UCM 유체의 평면 Poiseuille 유동 및 평면 4:1 수축을 지나는 유동을 개략적으로 고찰하고, 유동장이 와도에 관하여 타원형 혹은 쌍곡선형으로 구별될 수 있음을 밝힌다. 3장에서는 Murman 과 Cole⁽⁵⁾의 형식에 따른 차분법을 원용하여 Crochet, Davies 와 Walters⁽⁶⁾의 유한차분법을 개선함으로써, 와도방정식을 수치근 사하는데 있어서, 타원형 구역에서는 중심차분 근사, 쌍곡선형 구역에서는 후진차분 근사하는 방법을 도입 한다. 4장에서는 본 연구의 계산 결과를 $R=0$ 에 대한 Davies, Lee 와 Webster⁽¹⁾의 계산결과와 비교하고, 페이저를 이용한 Walters 와 Rawlinson⁽⁷⁾의 유동 가시화 실험과도 정성적인 비교를 한다. 즉 유동합수의 분포를 실험 및 종래의 계산결과와 비교하며, 와도, 응력의 분포를 와도의 형식변화 관점에서 검토하였다.

2. Maxwell 유체의 평면 채널 유동

UCM 유체의 2차원 정상유동을 고려하여보자. L, U 와 $\eta U/L$ 을 각각 질이, 속도, 응력의 기준량으로 하여 물리량들을 무차원화하면, 지배방정식은 아래와 같다.

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (1)$$

$$R\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\tau} \quad (2)$$

$$\underline{\tau} + W(\underline{u} \cdot \nabla \underline{\tau} - \nabla \underline{u} \cdot \underline{\tau} - \underline{\tau} \cdot \nabla \underline{u}^T) = \nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T \quad (3)$$

여기에서 Reynolds 수 R 과 Weissenberg 수 W 는 아래와 같이 정의된다.

$$R = \rho UL/\eta, \quad W = \lambda U/L$$

이러한 2차원 문제를 해석하기 위하여, 종전에는 유동합수 ϕ 와 와도 ω 를 도입하고 식 (2)를 아래와 같이 타원형 방정식으로 표현하였다.⁽⁶⁾

$$\begin{aligned} \nabla^2 \omega + R \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \\ = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (S^{xx} - S^{yy}) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) S^{yy} \end{aligned} \quad (5)$$

여기에서 $S = \underline{\tau} - (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T)$ 이다. 그러나 Joseph, Renardy 와 Saut⁽²⁾는 와도가 형식변화 되는 변수임을 보였다. 연이어, Yoo 와 Joseph⁽⁴⁾은 $\nabla \times \nabla \cdot (3) - W \underline{u} \cdot \nabla$ ($\nabla \times (2)$) 의 계산을 수행함으로써 좀더 완벽한 형태의 와도방정식, 즉 유동변수의 값에 따라 유동장 내부에서 타원형-쌍곡선형이 되는 형태의 와도 방정식을 유도하였다. 이 방법을 따라 식 (1)~(3)의 지배방정식 을 변환하면 아래와 같다.

$$\nabla^2 \psi = -\omega, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} A \omega_{xx} + 2B \omega_{xy} + C \omega_{yy} + (A_x + B_y - Ru) \omega_x \\ + (B_x + C_y - Rv) \omega_y - W[(u_x - v_y)(\sigma_{xy} \\ + \gamma_{xy} + \tau_{xx} + \tau_{yy}) + (u_y + v_x)(\gamma_{yy} - \sigma_{xx}) \\ + \sigma_{yy} u_{xx} + 2\tau_{xy} u_{xy} + \gamma_{xy} u_{yy} - \sigma_{xx} v_{yy} - 2\tau_{xy} v_{xy} \\ - \gamma_{xy} v_{yy}] = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\sigma(1 - W u_x) + W(u \sigma_x + v \sigma_y) - 2W \tau u_x = 2u_x \quad (8)$$

$$\tau + W(u \tau_x + v \tau_y) - W(\sigma v_x + \gamma u_y) = u_y + v_x \quad (9)$$

$$\gamma(1 - 2W v_y) + W(u \gamma_x + v \gamma_y) - 2W \tau v_x = 2v_y \quad (10)$$

여기에서 $A = 1 + W\sigma - RWu^2$, $B = W\tau - RWuv$, $C = 1 + W\gamma - RWv^2$ 이며, 하첨자는 미분을 나타낸다. 식 (6)의 형태로부터 우리는 쉽게, 와도방정식의 형식이

$$\sum \frac{\partial}{\partial x} B^2 - AC$$

$$= W^2 \tau^2 - 2RW^2 \tau uv - (1 + W\gamma)(1 + W\sigma)$$

$$+ RWv^2(1 + W\sigma) + RWu^2(1 + W\gamma) > 0 \quad (11)$$

을 만족하면 쌍곡선형, 그렇지 않으면 타원형이 됨을 알 수 있다. 이러한 판별함수 \sum 의 의미를 결론하기 위하여 우선, Yoo 와 Joseph⁽⁴⁾에 논의된 UCM 유체의 평면 Poiseuille 유동을 간단히 고찰하고 난 다음, 같은 방식으로 평면 4:1 수축을 지나는 유동을 취급한다.

2.1 평면 Poiseuille 유동

L 을 채널 폭의 $1/2$, U 를 중심선 속도로 택하자. 중심선에서의 대칭조건과 벽에서의 점착조건을 사용하여 식 (6)~(10) 을 만족하는 해를 구하면, 잘 알려진 바

와 같이 : $u=1-y^2$, $v=0$, $p=-2x$, $\tau=-2y$, $\sigma=8Wy^2$, $r=0$, $\omega=2y$ 가 된다. 이 해를 관별함수 (11)의 좌변에 대입하면 아래와 같다.

$$\Sigma = -1 - 4W^2y^2 + RW(1-y^2)^2 \quad (12)$$

$0 \leq RW \leq 1$ 인 경우에는, 부등식 (11)은 만족되지 않으며 따라서 교란된 와도는 유동장의 전구역에서 타원형 방정식을 만족하게 된다. $RW > 1$ 인 경우에는, 중심선 부근의 속도가 빠른 구역에서 부등식 (11)이 만족되므로 와도방정식이 쌍곡선형이 되며, 벽 부근의 속도가 느린 구역에서는 부등식 (11)이 만족되지 않아 타원형이 된다. 그러므로 이 경우에는 $\sum(y^{*2})=0$ 을 만족하는 $y=y^*(R, W)$ 가 항상 존재한다.

2.2 평면 4:1 수축을 지나는 유동

점탄성 유동의 수치해석에서 빈번하게 다루어지는 평면 4:1 수축을 지나는 유동^(1,8,9)을 고려한다. L 을 출구폭, U 를 출구의 평균속도로 택한다. 수축부로부터 면 입구와 출구의 유동은 평면 Poiseuille 유동으로 근사될 수 있으므로 위의 논의를 연장할 수 있다. $RW > 64/9$ 에 대하여는, $\Sigma=0$ 인 경계가 Fig. 1(a)처럼 양쪽

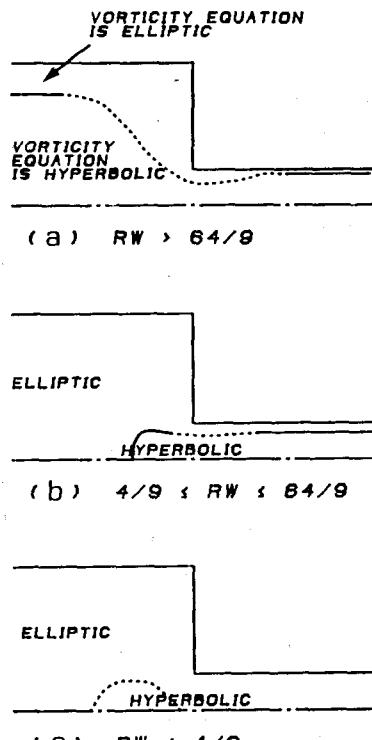


Fig. 1 Planar 4:1 contraction flows: (a) $RW > \frac{64}{9}$,
(b) $\frac{4}{9} \leq RW \leq \frac{64}{9}$; (c) $RW < \frac{4}{9}$

으로 열려 있다. 그림에는 대칭성에 의해 월 부분만 도시하였다. $4/9 < RW < 64/9$ 에 대하여는, Fig. 1(b)처럼 $\Sigma=0$ 인 경계는 유동장 내부로부터 시작되어 하류 방향으로 열리게 된다. 마찬가지로 $RW < 4/9$ 에 대하여는, $\Sigma=0$ 인 경계가 없거나, 있다면 Fig. 1(c)에서처럼 폐곡선 형태가 될 것이다. 즉 RW 가 아주 작은 경우를 제외하고는, 분명히 $\Sigma=0$ 인 경계가 정의될 수 있는 것이다. 따라서 UCM 유체와 유사하게 순간적인 탄성을 가지는 점탄성 유체의 돌연 수축을 지나는 유동을 수치모사하고자 할 때에는, 반드시 $\Sigma=0$ 가 되는 경계를 가로질러 와도방정식은 형식변화되는 것을 고려하여야 한다. 대부분의 점탄성 유동의 수치모사 연구에서는 R 이 작으므로, 본 연구에서는 Fig. 1(b), (c) 경우만을 다루고자 한다.

3. 수치해석 방법

UCM 유체의 평면 4:1 수축을 지나는 유동을 수치해석하기 위하여 크기 1/8인 균일한 격자계를 유동장에 설정하는데, 이는 Davies, Lee 와 Webster⁽¹⁾에서 사용된 격자계 FD2 와 동일하다.

3.1 지배방정식의 차분근사

유동함수 방정식은 Poisson 방정식이므로 전형적인 5점 차분법으로 차분근사한다. 격자점의 번호를 순차적으로 잘 배열하면, 이 방정식에 대한 차분근사 행렬식은 대각선 지배형 3중 대각선(tridiagonal)구조가 된다. 와도방정식 (7)의 형식은 일반적으로 유동방향, 즉 Fig. 1의 (b)와 (c)에서와 같이 x 축을 따라 변화되므로 와도방정식을 다음과 같이 재배치하고 수치근사를 하였다.

$$\frac{(A\omega_x)_x}{TDD(CD \text{ or } UD)} + \frac{(C\omega_x)_x}{CD} - \frac{Ru\omega_x - Rv\omega_y}{UD1} = -\frac{(B\omega_x)_x - (B\omega_x)_y + F}{CD(\text{source term})} \quad (7)*$$

여기에서 $F = W(2u_x\tau_x - v_x\sigma_x - v_y\sigma_y)_x$

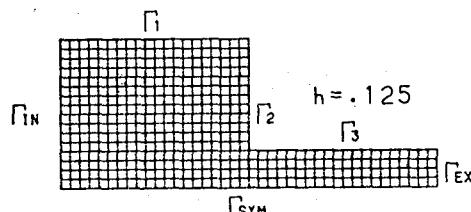
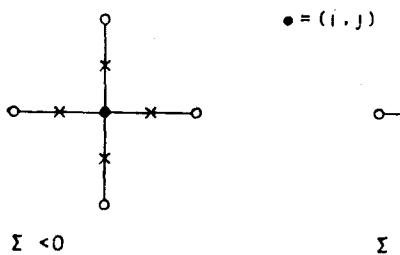


Fig. 2 Square grid system and boundaries of the flow field

Fig. 3 Computational molecules for $(A\omega_x)_x + (C\omega_y)_y$,

$$+ W(2u_x\tau_y + \gamma_u u_y + \gamma_x u_x)_y \\ + W(u_x\gamma_{xy} + v_x\gamma_{yy} - v_y\sigma_{xy} - u_y\sigma_{xx})$$

좌변의 첫번째 항은 Murman과 Cole⁽⁵⁾의 형식에 따른 차분법을 원용하여 근사하는데, 즉 $\Sigma > 0$ 일 경우에는 후진차분으로, $\Sigma < 0$ 일 경우에는 중심차분 근사하는 것이다. 이로부터 1, 2 항에 대한 차분 근사식은 다음과 같다.

$$[(A\omega_x)_x + (C\omega_y)_y](x_i, y_j) \\ \simeq (1-\mu) \frac{1}{h^2} [A_{i+1/2, j}\omega_{i+1, j} - (A_{i+1/2, j} \\ + A_{i-1/2, j})\omega_{i, j} + A_{i-1/2, j}\omega_{i-1, j}] \\ + \mu \frac{1}{h^2} [A_{i-1/2, j}\omega_{i, j} - (A_{i-1/2, j} + A_{i-3/2, j})\omega_{i-1, j} \\ + A_{i-3/2, j}\omega_{i-2, j}] \\ + \frac{1}{h^2} [C_{i, j+1/2}\omega_{i, j+1} - (C_{i, j+1/2} + C_{i, j-1/2})\omega_{i, j} \\ + C_{i, j-1/2}\omega_{i, j-1}] \quad (13)$$

여기에서 μ 는 $AC > B^2 (\Sigma < 0)$ 인 경우에는 0, $AC < B^2 (\Sigma > 0)$ 인 경우에는 1의 값을 가지며, 이에 따른 계산격자점은 Fig. 3과 같다. 좌변의 3, 4 항은 상류차분 근사를 하였다. 즉 ω 의 계수 속도가 양이 되면 후진차분근사, 속도가 음이 되면 전진차분근사를 하는 것이다. 아래와 같은 변수를 도입하면

$$\alpha_{i, j} = \frac{1}{4} R(\phi_{i+1, j} - \phi_{i-1, j}),$$

$$\beta_{i, j} = \frac{1}{4} R(\phi_{i, j+1} - \phi_{i, j-1})$$

좌변에 대한 근사식은 다음과 같이 된다.

$$[(A\omega_x)_x + (C\omega_y)_y - Ru\omega_x - Rv\omega_y](x_i, y_j) \\ \simeq \frac{1}{h^2} (K_0\omega_{i, j} - K_1\omega_{i+1, j} - K_2\omega_{i-1, j} - K_3\omega_{i, j+1} \\ - K_4\omega_{i, j-1} - K_5\omega_{i-2, j}) \quad (14)$$

여기에서

$$K_1 = (1-\mu) A_{i+1/2, j} - \beta_{i, j} + |\beta_{i, j}|$$

$$K_2 = (1-2\mu) A_{i-1/2, j} - \mu A_{i-3/2, j} + \beta_{i, j} + |\beta_{i, j}|$$

$$K_3 = C_{i, j+1/2} + \alpha_{i, j} + |\alpha_{i, j}|$$

$$K_4 = C_{i, j-1/2} - \alpha_{i, j} + |\alpha_{i, j}|$$

$$K_5 = \mu A_{i-3/2}$$

$$K_0 = (1-\mu) A_{i+1/2, j} + (1-2\mu) A_{i-1/2, j} + C_{i, j+1/2} \\ + C_{i, j-1/2} + 2|\beta_{i, j}| + 2|\alpha_{i, j}|$$

$$A_{i+1/2, j} = \frac{1}{2}(A_{i, j} + A_{i+1, j}) \\ A_{i-1/2, j} = \frac{1}{2}(A_{i, j} + A_{i-1, j}) \\ A_{i-3/2, j} = \frac{1}{2}(A_{i-1, j} + A_{i-2, j}) \\ C_{i, j+1/2} = \frac{1}{2}(C_{i, j} + C_{i, j+1}) \\ C_{i, j-1/2} = \frac{1}{2}(C_{i, j} + C_{i, j-1})$$

식 (14)의 근사식은 1차 근사 정확도를 가지나, 이에 대한 차분근사 행렬식은 대각선 지배형이 된다. 우변의 모든 항은 원천향으로 처리하였으며 중심차분 근사하였다. 자세한 차분 근사식은 참고문헌⁽¹⁰⁾을 참조하기 바란다. 응력 방정식에 대해서는, 방정식을 아래와 같이 재배치하고 Crochet, Davies와 Walters⁽⁶⁾의 방법 1을 따랐다.

$$A_1\sigma + WL\sigma = 2D\tau + F_1, \\ A_2\tau + WL\tau = E\sigma + D\gamma + F_2, \\ A_3\gamma + WL\gamma = 2E\tau + F_3, \quad (15)$$

여기에서 $L(.) \equiv \psi_{(.)x} - \psi_{x(.)}$,

$$A_1 = 1 - 2W\psi_{xx}, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = 1 + 2W\psi_{xx},$$

$$D = W\psi_{yy}, \quad E = -W\psi_{xx}$$

$$F_1 = 2\phi_{xy}, \quad F_2 = \phi_{yy} - \phi_{xx}, \quad F_3 = -2\phi_{xy},$$

실제로 이들은, 와도방정식에서는 S를, 응력 방정식에서는 t를 다루어야 하므로 컴퓨터 기억용량을 많이 차지하게 되기 때문에 이 방법을 권하고 있지는 않다. 그러나 와도방정식 (7)을 사용하면 이러한 번거로움이 배제됨을 쉽게 알 수 있으며, 따라서 식 (7)은 수치계산을 하기에도 편리한 형태라 할 수 있겠다.

3.2 경계 조건

유동의 해를 구하려면 각 방정식의 성격에 알맞는 경계조건을 부여하여야 한다. Crochet, Davies와 Walters⁽⁶⁾의 § 6.2.3~6.2.5에 기술되는 방법을 따라 경계조건을 주었으며, 다만 출구에서 ψ 및 ω 에 대해서만 Neumann 조건을 부여하는 것으로 변경하였다. Table 1에 간략하게 경계조건이 기술되어 있다.

3.3 비선형 연립방정식에 대한 해법

지배방정식을 차분근사하면, 비선형 연립 행렬 방정식을 얻게 된다. 이를 풀기 위해서, 각 방정식을 독립시킨 후 선형화하는 Picard 형 반복 계산법을 사용하였다⁽⁶⁾. 유동변수 각각에 대하여 선형화된 행렬방정식은 Gauss-Seidel 반복법을 이용하여 푼다. 외부 반복계산에서는 적절한 완화계수 0.3을 사용하였다. 높은 W 의 계산에서는, 낮은 W 에서의 기지의 수치해를 초기

Table 1 Boundary conditions

	Γ_{in}	$\Gamma_1 \& \Gamma_3$	Γ_2	Γ_{sym}	Γ_{ex}	Re-entrant corner
ϕ	$\frac{3}{8} \left(y - \frac{1}{12} y^3 \right)$	0.5		0	$\phi_x = 0$	0.5
ω	$\frac{3}{16} y$	first-order approximation in terms of ϕ		0	$\omega_x = 0$	Kawaguti's Method
σ	$2W\omega^2$	$2W\omega^2$	0	Backward Euler Method	—	use of ϕ_{xx} , ϕ_{yy} and ϕ_{xy} , obtained by Kawaguti's Method
γ	0	0	$2W\omega^2$			
τ	$-\omega$	$-\omega$	ω	0		

치로 사용하였다.

4. 결과 및 검토

Walters 와 Webster⁽⁸⁾, Walters 와 Rawlinson⁽⁷⁾의 실험에 의해, UCM 유체와 간주될 수 있는 Boger 유체의 수축을 지나는 유동에 있어서는, 평면유동에서는 모서리 와류(corner vortex)가 발견되지 않는 반면, 축대칭 유동에서는 크기가 큰 모서리 와류가 발생되는 것이 잘 알려져 있다. 그러나, 최근 Evans 와 Walters⁽¹¹⁾는 Boger 유체와 Polyacrylamide 수용액의 평면 및 사각형 수축유동에서 모서리 와류 생성이 다양한 기구에 의존함을 보였다. 특히 이들은 평면 80 : 1 수축유동에서 모서리와류가 크게 발생되는 것을 관찰하였다. 또한 Boger, Hur 와 Binnington⁽¹²⁾은 동일한 응력이 왼 시간을 가지며 점성계수가 일정한 두 종류의 유체가 축대칭 4 : 1 수축을 지나면서 서로 상이한 유동 현상을 보임을 보고하였다. 따라서 점탄성유체의 수축 유동은 종래에 예견되었던 것보다 확실히 복잡한 현상을 내포하고 있는 것이다. 일정한 점성계수를 가지는 점탄성 유체의 수축을 지나는 유동을 수치해석 하는데 있어서, 형식에 따른 차분법을 적용하는 것은 의미있는 일일 것이다. 왜냐하면 이 방법을 사용하려는 시도가 전무하였기 때문이다. 이를 위해 본연구에서는 4 : 1 수축을 지나는 유동을 수치해석하고, 이를 Davies, Lee 와 Webster⁽¹⁾의 계산결과 및 Walters 와 Rawlinson⁽⁷⁾의 실험과 비교하고자 한다.

4.1 유동함수

4 : 1 수축을 지나는 유동에 대한 종래의 수치해석 연구^{(1), (9)}에서는 운동량 방정식에서 팬성항을 무시하였으므로, 우선 $R=0$ 의 경우를 고려한다. W 의 변화에 따른 유동함수의 분포가 Fig. 4에 도시되어 있다. 본 연

구의 계산결과를 Davies, Lee 와 Webster⁽¹⁾의 계산결과와 비교하였더니, 동일한 W 에서 더 작은 모서리와류를 보이고 있으며, 수치계산의 수렴범위도 3배 정도 증가함을 알 수 있었다. 다음으로 Walters 와 Rawlinson⁽⁷⁾에 의하여 수행되었던 Boger 유체를 사용한 헤이저 가시화 실험의 수치 시뮬레이션을 시도하였다. $R=2.28, 4.2$ 에 대해 W 의 변화에 따른 유동함수의 분포는 Fig. 5와 같다. 비록, 그들의 실험조건인 $(R, W)=(2.28, 2.56)$, $(R, W)=(4.2, 0.96)$ 까지 수치계산이 수렴되지는 않았으나, 모서리와류가 눈에 띄게 감소함으로써, 본 연구의 수치해석 방법이 타당함을 시사하고 있다. 즉, R 이 증가함에 따라, 모서리와류가 감소하며, 수축부 상류의 유선이 입구벽에 평행하게 나타남으로써 실험결과와 정성적으로 일치하는 것이다.

4.2 판별함수 Σ 의 분포

유동함수는 $R=2.28$ 및 4.2 에 대해 $W=0.8$ 까지 매끄러운 분포를 보인다. 그러나, 다른 유동변수의 분포가 적절하게 구해졌는지를 살펴볼 필요가 있다. 이를 위해, 우선 Fig. 6에 보는 바와같이 Σ 의 분포를 고찰한다. $W < 0.4$ 에서는 미리 예상된 Fig. 1(b)의 형태와 잘 일치하고 있다. 그러나 W 가 증가함에 따라 예를들면 W 가 0.6 이상에서는, $\Sigma=0$ 인 경계가 상류쪽으로 기울어져 있다. 유동변수들의 대칭성이 의하면 이는 불리적으로 불합리한 해이다. 이에 대한 원인 중의 하나는, 응력방정식이 1차근사 되었으며 근사오차가 W 에 비례한다는 사실로부터 설명될 수 있을 것이다.⁽⁶⁾

4.3 와도의 분포

점탄성 마하수는 유동의 속도와 유체의 물성치인 전단파의 전파속도, $c = \sqrt{\frac{\eta}{\lambda\rho}}$ 와의 비이다⁽⁴⁾. 탄성이 와도의 전파에 미치는 영향을 고찰하기 위하여, $(R, W)=(0, 0)$, $(0, 0.4)$, $(4.2, 0)$ 및 $(4.2, 0.4)$ 에 해당하는

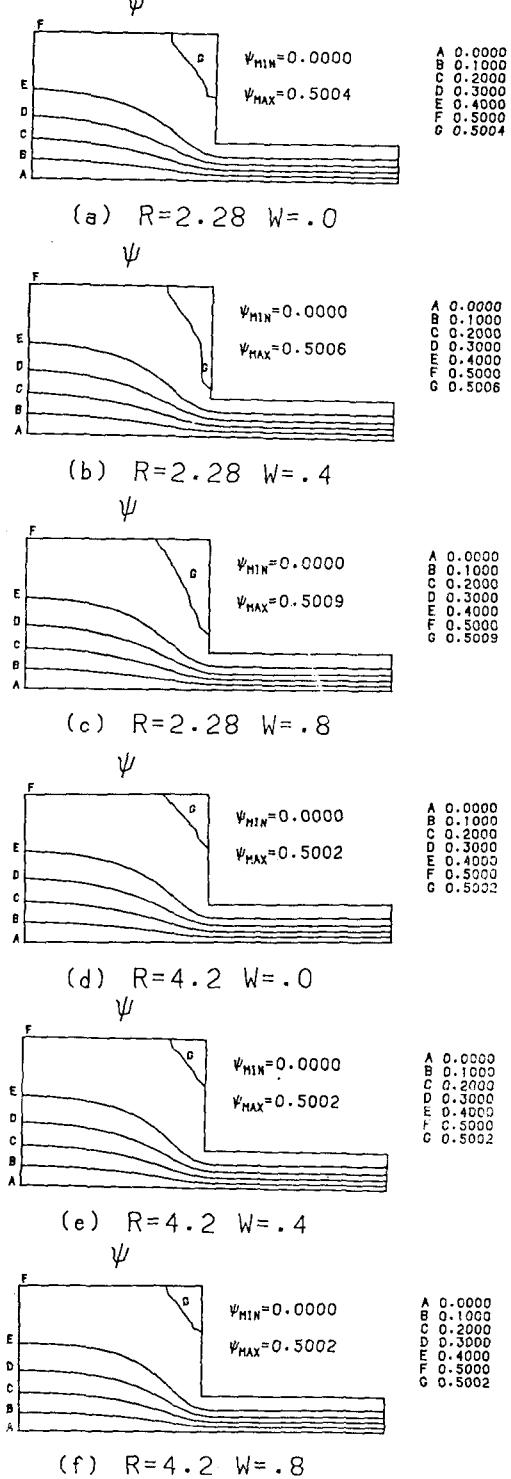
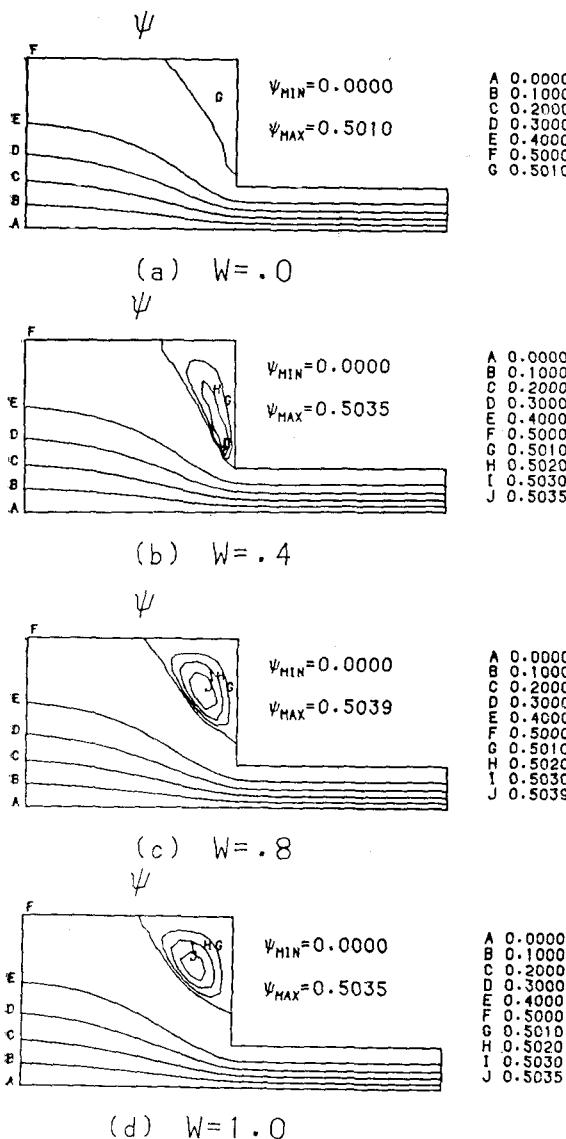


Fig. 4 Streamlines for creeping planar 4:1 contraction flows: (a) Newtonian fluid; (b)~(d) upper convected Maxwell fluid, $W_{\text{limit}}=1.0$

와도의 분포가 Fig. 7에 도시되어 있다. 저속유동은 $\rho = 0$ 에, 뉴튼유체는 $\lambda=0$ 에 해당하므로 Fig. 7(a), (b), (c)에서 전단파의 속도는 무한하다. 따라서, (c) 이외의 경우에는 재돌입 모서리에서 발생되는 와도는 수축부의 상류까지 전파되며, (c)에서는 상류로부터 유입되는 유체의 관성에 의해 등와도선이 하류쪽으로 약간 밀리게 된다. 그러나, (d)의 경우에 전단파의 속도는, 유한하여 특히 중심면 근방에서는 유동의 속도보다 작

Fig. 5 Streamlines for planar 4:1 contraction flows of UCM fluid: (a)~(c) $R=2.28$; (d)~(f) $R=4.2$

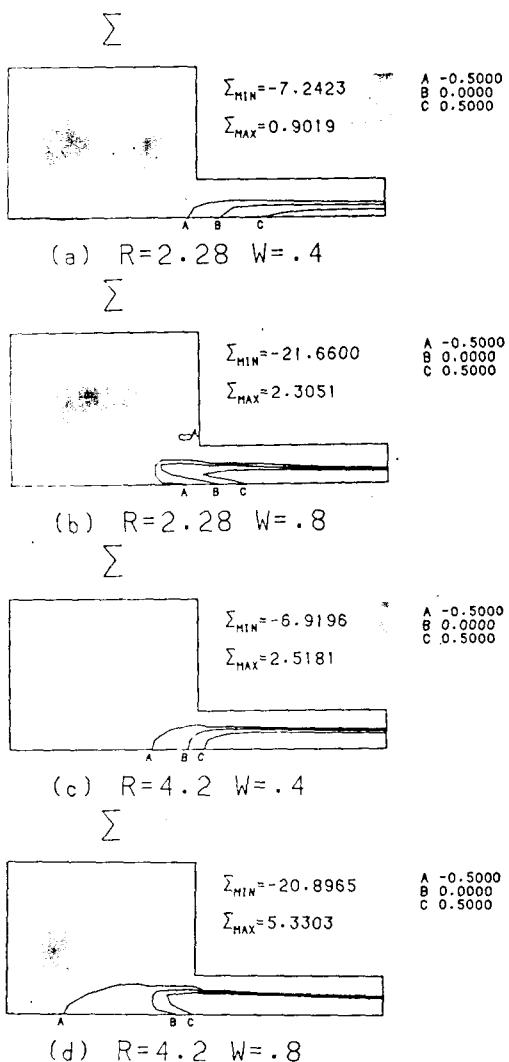


Fig. 6 Level lines of Σ for planar 4 : 1 contraction flows of UCM fluid: (a), (b) $R=2.28$; (c), (d) $R=4.2$

은 값을 가지게 된다. 따라서, 재돌입 모서리에서 발생되는 와도는 상류에 영향을 끼치지 못하며, 게다가 관성의 영향을 많이 받게되는 것이다. 다시 말하면, 이는 초음속 유동에서와 유사하게, 상류로부터 접근하는 유체 입자는 추축부에 도착할 때까지, 마치 하류에 수축부가 있음을 알지 못하는듯이 상류에서 가졌던 것과 동일한 와도를 유지한 채로 접근하는 듯한 거동을 보이는 것이다. 이는 형식에 따른 차분법이 잘 작용되고

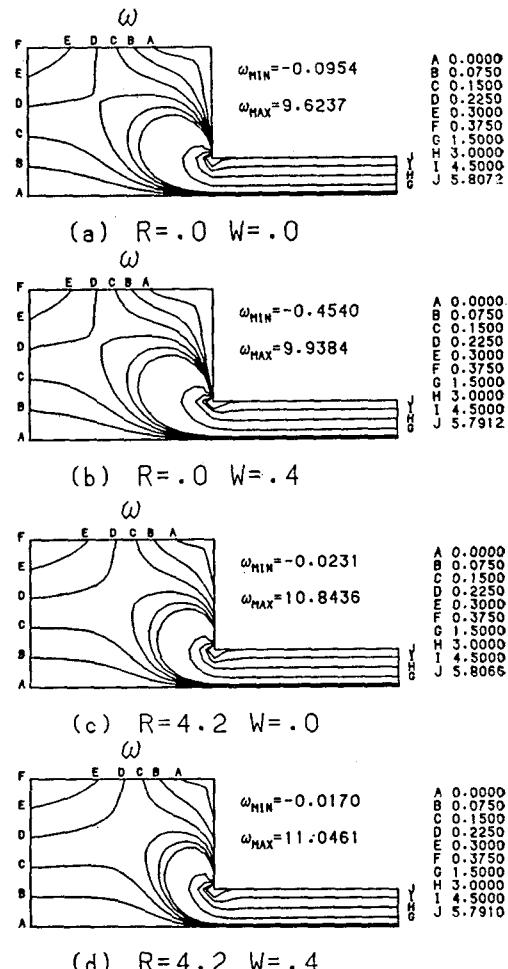


Fig. 7 Level lines of vorticity: (a) $R=0, W=0$;
 (b) $R=0, W=0.4$; (c) $R=4.2, W=0$; (d)
 $R=4.2, W=0.4$

있음을 의미하기도 한다.

4.4 응력의 분포

수치계산의 수렴성이 파괴되는 W 의 한계값 부근에서, 중심선 속도, 중심면을 따른 제 1법선응력 차이의 분포, 유동장내의 응력분포 등을 검토하였다. 자세한 내용은 참고문헌⁽¹⁰⁾을 참조하기 바란다. W 가 증가되면서, 다른 응력들은 비교적 규칙적인데 비하여, 법선응력 γ 는 불규칙한 분포를 보인다. Fig. 8에서 알 수 있는 바와같이, W 가 작을 경우에는 재돌입 모서리 부근에서 γ 는 양의 값을 가지나, W 가 커지면서 재돌입 모서리 부근에서 γ 는 비현실적으로 음의 값을 가지게

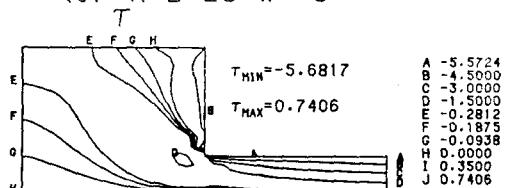
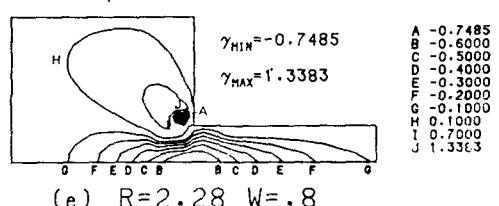
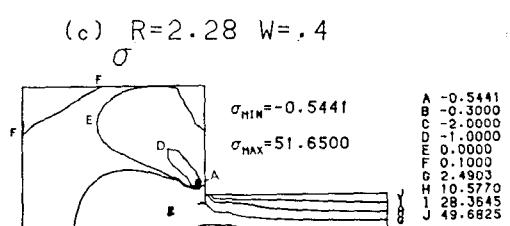
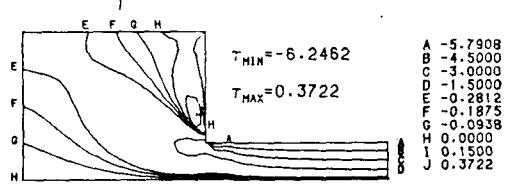
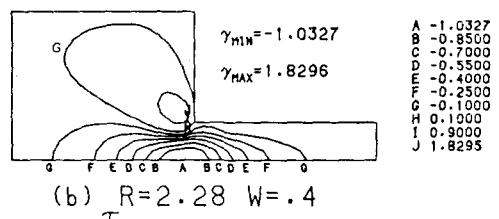
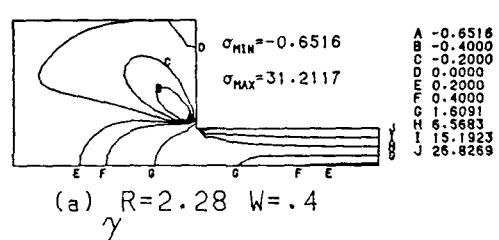


Fig. 8 Level lines of stresses for $R=2.28$: (a) σ ; (b) γ ; (c) τ ; (d) σ ; (e) γ ; (f) τ . The black spot in the neighborhood of re-entrant corner in (e) into which many negative level lines are simply collapsed shows the occurrence of unlikely strong negative γ values there.

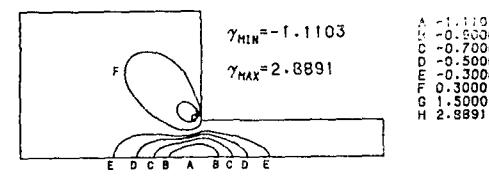
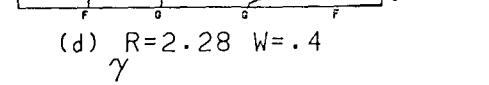
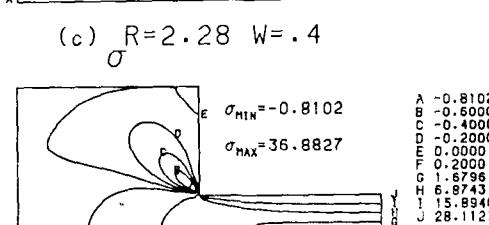
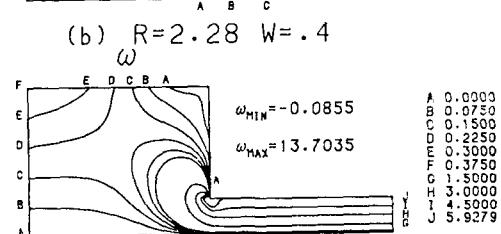
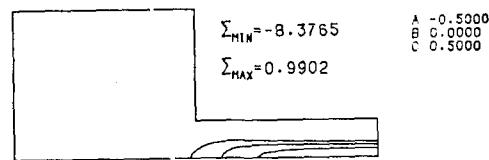
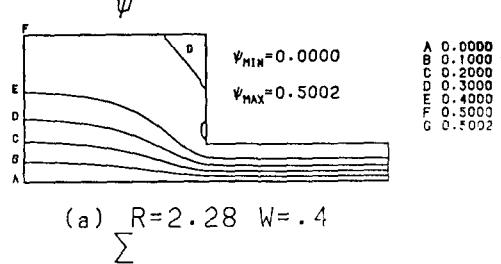


Fig. 9 Planar 4:1 contraction flows of UCM fluid for $R=2.28$ and $W=0.4$ calculated on FD3 (a) streamlines; (b) level lines of Σ ; (c) level lines of ω ; (d) level lines of σ ; (e) level lines of γ ; (f) level lines of τ .

된다. 이러한 현상이 수치계산의 수렴성 파괴와 관련이 있는 것으로 여겨지는데, 좀더 큰 W 에서는, 예를 들면 $W=1.0$ 이상에서는 γ 가 더욱 큰 음의 값을 가지면서 계산이 진동하게 된다. 이러한 현상의 원인은, 재돌입 모서리에서 응력을 합당하게 균사하지 않음으로써 유발되는 비현실적인 와도방정식의 형식변화에 있다고 여겨진다. 이에 대한 자세한 논의는 4.6 절에서 다루겠다.

4.5 격자계의 영향

앞에서는 Davies, Lee 와 Webster⁽¹⁾의 FD2 격자계를 사용하여 계산을 수행하였다. 격자계의 영향에 따른 해의 거동을 살펴기 위해, 두배 만큼 세밀한 이들의 FD3 격자계를 사용하여 동일한 계산을 수행하였다. 좀더 자세한 내용은 참고문헌⁽¹⁰⁾을 참조하기 바란다. Fig. 9에는 간략하게, $R=2.28$, $W=0.4$ 인 경우의 결과가 제시되어 있다. $R=0.0$ 에 대한, Davies, Lee 와 Webster⁽¹⁾에서처럼, 모서리 와류의 크기가 FD2 경우에 비해 작아지고, W 의 한계치도 작아졌다. 이러한 현상은 $R=0$ 에 대하여 뿐만 아니라, $R=2.28$, 4.2의 경우에도 동일하였다. 즉 $R=0$ 에 대하여, FD2 격자계를 사용하였을 때는 W 의 한계값이 1이었던 반면에 FD3에서는 0.7이며, $R=2.28$, 4.2의 경우에는 각각 0.4, 0.3이었다. 또한, 재돌입모서리 부근에서 γ 의 분포가 FD2의 경우보다 더 큰 음의 값을 가짐으로써, 4.3 절에서 논의된 바와 같이 γ 의 분포와 수치계산의 수렴성 파괴가 연관이 있음을 알 수 있었다.

4.6 수치계산의 수렴성 파괴

비록 본연구에서는 종전의 연구에서보다 높은 W 의 범위에서 안정된 해를 구하였으나, 역시 수치계산의 수렴성 파괴라는 문제에 봉착하기는 마찬가지다. 이러한 의미에서 본 연구가 수렴성 파괴의 문제를 극복한 것은 아니다. 이를 극복하기 위한 다양한 시도로서, 예를 들면, 좀더 적절한 구성방정식의 도입, 응력방정식에 대한 2차근사 정확도를 가지는 수치해석 방법의 개발, 재돌입 모서리에서의 응력근사 방법의 개선 등이 있겠으나, 이 중에서 특히 재돌입 모서리의 처리와 이에 따른 수렴성파괴원인을 형식변화의 관점에서 살펴보자 한다. 최근, Dupret, Marchal 와 Crochet⁽⁹⁾, Beries, Armstrong 과 Brown⁽¹³⁾등은 $R=0$ 인 가정을 사용한 그들의 연구에서, UCM 유체의 지배방정식은, $T = \lambda\tau + \eta_1$ 로 표시되는 행렬이 양의 정부호 행렬이어야만 잘 정의된다고 주장하였다. 다시 말하면, 그들의 연구

구에서는, 수치오차에 의해 위의 조건이 만족되지 않으면 수렴성이 파괴된다는 것이었다. 이조건은 정확히 와도방정식이 타원형이 되는 조건이며, (11)식에 $R=0$ 를 대입하면 얻어진다.

$$\Sigma = W^2\tau^2 - (1 + W\gamma)(1 + W\sigma) < 0 \quad (16)$$

물론 R 이 0이 아닐 경우에도, 고체벽에서 위의 조건이 만족된다. Table 1의 경계조건을 대입하면 아래와 같이, 고체벽에서 $1 + W\gamma = 1 + 2W^2\omega^2 > 0$, $\sigma = 0$ 혹은 $\gamma = 0$, $1 + W\sigma = 1 + 2W^2\omega^2 > 0$ 로부터

$$\Sigma = W^2\tau^2 - (1 + W\gamma)(1 + W\sigma) = -1 - W^2\omega^2 < 0$$

이 만족된다. 즉 재돌입 모서리를 포함한 고체벽에서 와도방정식은 항상 타원형이 되는 것이다. 그러나 재돌입 모서리에서 응력이 잘 정의되지 않으며, 따라서 Kawaguti 방법에 의해 가상적인 속도구배를 균사하여 응력을 구하게 되는데, 이 방법에 의하면 앞절에서 논의된 바와 같이 W 가 커지면서, 재돌입 모서리 부근에서 $W\gamma + 1 < 0$ 이 되며 동시에 수치계산의 수렴성이 파괴되는 것이다. 즉, 와도방정식이 재돌입 모서리 부근에서 비현실적으로 형식변화되며 이로 인하여 수렴성 파괴가 발생되는 것이다. 이러한 논의로부터 세밀한 격자계에서 W 의 한계값이 작아지는 이유도 설명될 수 있다. 따라서, 재돌입 모서리에서의 응력근사 방법의 개선이 필수 불가결함을 알 수 있다.

4.7 제언

본 연구에서보다 높은 R 의 유동을 수치해석하려면, 입·출구의 길이를 늘이거나, 비균일 격자계를 사용하여야 할 것이다. 그러나, 본 연구의 범위내에서 R 의 변화에 따른 유동함수의 분포나 W 의 한계값은 별 변화가 없었다⁽¹⁰⁾. 본 연구의 수치해석 알고리즘을 축대칭 4:1 수축의 경우로 확장하는 것은 흥미로운 일일 것이다. 우리의 예비적인 계산에 의하면, 평면유동의 경우에 비해 크기 및 강도가 훨씬 큰 모서리 와류가 발생하여, 실험과 정성적으로 잘 일치하고 있다. 만약 구혹은 원통 주위의 유동을 고려한다면, Fig. 1과는 달리, $\Sigma = 0$ 인 경계가 폐곡선이 되리라 예상되는데 이를 고려하기 위해서는 본 연구의 수치해석 알고리즘이 개선되어야 할 것이다. 앞에서 논의된 바와 같이, 본 연구에서는 x 도함수를 포함하는 항의 형식변화 만을 고려하였으나, y 도함수를 포함하는 항의 형식변화도 고려할 수 있도록 개선된, 형식에 따른 차분법의 적용이 필요하다. 이를 위해, Jameson⁽¹⁴⁾의 회전 차분법(rotated difference scheme)이 적용될 수 있겠으나, UCM 유체의 와도방정식과 천음속 포텐셜 방정식의 구조가

판이 하므로 충분한 연구가 필요하다. 마지막으로, 본 연구의 알고리즘을 다른 일정한 점성계수를 가지는 유체모형, 즉 Giesekus 유체, Phan-Tien Tanner 유체 등에 적용하는 것도 흥미로운 일이다.

5. 결 론

본 연구에서는, 평면 4:1 수축을 지나는 UCM 유체의 유동을 수치해석하는데 있어서, 유동장내에서 형식변화를 잘 고려할 수 있는, 보다 정확하고 적절한 형태의 와도방정식을 사용하였다. Crochet, Davies 와 Walters의 수치해석 알고리즘을 Murman 과 Cole의 형식에 따른 차분법을 이용하여 개선함으로써, 와도방정식의 형식변화를 고려하였다. 즉 와도방정식이 타원형인 곳에서는 중심차분 근사를, 와도방정식이 쌍곡선형인 곳에서는 후진차분 근사하였다. 운동량 방정식에서 관성항을 무시했을 경우, 종래보다 넓은 W 의 범위에서 안정된 해를 얻을 수 있었다. 관성항을 무시할 수 없을 경우에는, 모서리와류가 사라지는 것을 최초로 수치근사하였으며 기존의 실험과 일치되는 결과를 얻었다. 따라서, 순간적인 탄성을 가지는 점탄성 유동을 수치해석하고자 할 때는 와도방정식의 형식변화가 고려되어야함을 알 수 있다.

후 기

본 연구의 수행과정 중 도움을 주신 D.D. Joseph 교수와 이승종교수님께 감사드리며, 아울러 이 연구는 한국과학재단의 지원을 받아 수행되었으므로 이에 심심한 감사를 표합니다.

참 고 문 현

- (1) A.R. Davies, S.J. Lee and M.F. Webster, Numerical Simulations of Viscoelastic Flow: The Effect of Mesh Size, *J. non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 16, pp. 117~139, 1984
- (2) D.D. Joseph, M. Renardy and J.C. Saut, Hyperbolicity and Change of Type in the Flow of Viscoelastic Fluids, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, Vol. 87, No. 3, pp. 213~251, 1984
- (3) J.Y. Yoo, M. Ahrens and D.D. Joseph, Hyperbolicity and Change of Type in Sink Flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 153, pp. 203~214, 1985
- (4) J.Y. Yoo and D.D. Joseph, Hyperbolicity and Change of Type in the Flow of Viscoelastic Fluids through Channels, *J. non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 19, pp. 15~41, 1985
- (5) E.M. Murman and J. D. Cole, Calculation of Plane Steady Transonic Flows, *AIAA J.*, Vol. 9, No. 1, pp. 114~121, 1971
- (6) M.J. Crochet, A.R. Davies and K. Walters, Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow, Elsevier, Amsterdam, 1984
- (7) K. Walters and D. M. Rawlinson, On Some Contraction Flows for Boger Fluids, *Rheol. Acta*, Vol. 21, pp. 547~552, 1982
- (8) K. Walters and M.F. Webster, On Dominating Elastico-Viscous Response in Some Complex Flows, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A308*, pp. 199~218, 1982
- (9) F. Dupret, J.M. Marchal and M.J. Crochet, On the Consequence of Discretization Errors in the Numerical Calculation of Viscoelastic Flow, *J. non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 18, pp. 173~186, 1985
- (10) J.H. Song, Numerical Simulation of Viscoelastic Flows Considering Change of Type of Governing Equations, Ph.D. Thesis (in Korean), Seoul National University, 1986
- (11) R.E. Evans and K. Walters, Flow Characteristics Associated with Abrupt Changes in Geometry in the Case of Highly Elastic Liquids, *J. non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 20, pp. 11~29, 1986
- (12) D.V. Boger, D.U. Hur and R.J. Binnington, Further Observations of Elastic Effects in Tubular Entry Flows, *J. non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 20, pp. 31~49, 1986
- (13) A.N. Beris, R.C. Armstrong and R.A. Brown, Finite Element Calculation of Viscoelastic Flow in Journal Bearing: II. Moderate Eccentricity, *J. non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 19, pp. 323~347, 1986
- (14) A. Jameson, Transonic Flow Calculations. In H. J. Witz and J.J. Smoldern (ed.), Numerical Methods in Fluid Dynamics, McGraw Hill/Hemisphere, Washington, 1978