

< 論 文 >

線荷重을 받는 直交異方性 圓筒셀의 Novozhilov 셀 理論에 의한 應力解析

李 永 臣* · 崔 秉 斗**

(1987年 5月 6日 接受)

Stress Analysis for the Orthotropic Cylindrical Shells Subjected to Line Load Based on Novozhilov's Shell Theory

Young-Shin Lee and Byung-Doo Choi

Key Words: Stress Analysis(應力解析), Orthotropic(直交異方性), Cylindrical Shell(圓筒셀), Line Load(線荷重), Novozhilov's Shell Theory(Novozhilov 셀 理論), Complex Potential Function(復素 포텐셀 函數)

Abstract

The stress state and displacement for the orthotropic cylindrical shell subjected to line load along a generator is presented.

It is assumed that the behavior of the material is specially-orthotropic.

The governing equation for orthotropic cylindrical shell is derived on the basis of Novozhilov's shell theory. General solution is obtained by extending the Naghdi's method for the isotropic cylindrical shell under the line load.

Numerical examples are presented for circular cylindrical shells having various orthotropic material properties and geometries.

記 號 說 明

A_{ij} : 伸張剛性行列

A_n : 復素積分常數

$b^*(B^*)$: $3H^*(1-\nu_x\nu_\phi)(R/t)^2$

C_n : 復素積分常數

d : x 方向 荷重作用길이

D_{ij} : 굽힘剛性行列

E_x, E_ϕ : x, ϕ 방향 彈性係數

$G_{x\phi}$: 剪斷彈性係數

H^* : E_ϕ/E_x

K : 비틀림 모우멘트

$K_x, K_\phi, K_{x\phi}$: 曲率變化 및 비틀림

L : 圓筒셀 길이

$M_x, M_\phi, M_{x\phi}$: 합모우멘트

m : $n\pi R/L$

n : 整數(integer)

* 正會員, 忠南大學校 工科學 機械設計學科

** 正會員, 忠南大學校 大學院(現 大田機械廠)

- P : z 방향의 단위面積當의 荷重 $P=P_z$
 P_x, P_ϕ, P_z : x, ϕ, z 방향 단위面積當의 荷重
 P_n^* : 단위길이當의 線荷重
 \bar{P} : 단위길이當 線荷重強度
 Q_x, Q_ϕ : 橫剪斷力
 R : 殼半徑
 S : 合應力
 $T_x, T_\phi, T_{x\phi}$: 合應力
 $\bar{T}, \bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{S}$: 復素포텐셜함수
 t : 殼두께
 u, v, w : 無次元 x, ϕ, z 方向變位
 X, Y : 直角座標
 x, ϕ, z : 無次元軸方向, 圓周方向, 半徑方向座標 $x = X/R, \phi = Y/R, z = Z/R$
 α_n, β_n : 常數
 ν_x, ν_ϕ : x, ϕ 방향 포아송비
 σ_x, σ_ϕ : 軸應力
 Δ : $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$
 Δ_0 : $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + H^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$
 $\phi^{(n)}$: 函數
 $\epsilon_x, \epsilon_\phi, T_{x\phi}$: 變形率
 $\delta(\phi)$: 單位 impulse 函數 또는 델타함수

1. 序 論

圓筒殼은 強度對重量比가 特히 높은 構造的 特性에 의하여 壓力容器, 보일러, 送油管을 비롯하여 航空機, 潛水艦 및 原子爐等的 構造要素로 使用되고 있으며, 特히 母線을 따라 線荷重을 받는 圓筒殼은 配管系(pipelines), 콘베이어갤러리(conveyer gallery), 튜브밀(tube mill), 로우터리킬른(rotary kilns) 및 製紙機械 등에서 主要構造要素로 活用되고 있다⁽¹⁾.

圓筒殼理論은 Love⁽²⁾, Donnell⁽³⁾, Flügge⁽⁴⁾, Morley-Koiter⁽⁵⁾, Vlasov⁽⁶⁾, Sanders⁽⁷⁾, Novozhilov⁽⁸⁾ 및 Cheng⁽⁹⁾ 理論등으로 代表되고 있다. 等方性圓筒殼의 境遇 1933年 Donnell 이 代當한 假定에 基礎하여 單純化시킨 圓筒殼理論을 提示한 以來 많은 研究자들에 의하여 活潑한 研究가 수행되어 왔다. Hoff⁽¹⁰⁻¹²⁾ 등은 Donnell 方程式을 利用하여 一般解와 適用限界를 提示하였고, Kempner⁽¹³⁾는 Flügge 方程式을 利用하여 固有值를 유도하고 Donnell 式과 比較하였으나, Flügge 方程式의 解의 形態가 相當히 複雜한 短點이 있음은

보이었다. 한편 Naghdi^(14,15)는 Novozhilov 殼理論을 利用하여 等方性圓筒殼의 支配方程式을 復素微分方程式으로 表現하고 線荷重에 대한 一般解와 數值結果를 提示하였다. 1978年 Microys⁽¹⁶⁾는 Morley-Koiter의 8階微分方程式을 利用하여 一般解를 誘導하고 線荷重이 作用하는 圓筒殼의 解析을 보이었다.

最近에 이르러 圓筒殼은 높은 굽힘剛성과 座屈에 對한 抵抗力을 높이기 위하여 주름성형殼(corrugated shell), 補強殼(stiffened shell), 補強強化殼(reinforced shell) 및 複合材料殼(composite material shell) 등으로 製作되고 있으며, 이들의 擧動은 異方性을 보이나 많은 경우에 準直交異方性 또는 直交異方性으로 取扱된다^(11,17).

1979年 Schwaighofer⁽¹⁾는 等方性圓筒殼의 Donnell 및 Flügge 方程式에 對應하는 直交異方性圓筒殼의 基本方程式을 提示하고, 母線全體에 걸쳐 均一線荷重問題의 數值例를 보였으며, 1983年 Chawla⁽¹⁸⁾는 Vlasov 形態의 8階偏微分 方程式을 利用하여 有限差分法으로 上記例를 解析하였다. 한편 Cheng⁽⁹⁾은 直交異方性圓筒殼의 支配方程式을 한쌍의 復素共軛四階偏微分方程式으로 提示하고, 몇가지 近似化를 通하여 既存의 等方性圓筒殼에 相當하는 直交異方性 Donnell, Morley, Novozhilov 方程式으로 變換될 수 있음을 보였다. 그는 여러 直交異方性材料에 대한 固有值를 比較하였으나 一般解는 알려져 있지 않다. 李永臣^(19,20)은 Morley-Koiter의 等方性殼理論에 基礎하여 直交異方性圓筒殼의 支配方程式을 誘導하고, 局部荷重 및 線荷重에 對한 解析結果를 提示하였다.

本 研究에서는 既存研究에 比하여 解의 形態가 簡單한 閉形解로 주어지는 嚴密한 解를 求하기 위해, 直交異方性圓筒殼의 支配方程式을 Novozhilov 形復素微分方程式으로 誘導하였다. 數值例로서 母線全體 및 部分의 作用하는 線荷重下에서 圓筒殼의 變位 및 應力狀態를 解析하여 既存의 研究와 比較하였으며, 直交異方特性과 殼幾何學的 媒介變數에 따르는 影響을 考察하였다.

2. 圓筒殼 理論

2.1 解析모델(Shell Geometry)

Fig. 1에서는 殼形狀과 單位길이當의 變位, 內力 및 모우멘트에 대한 符號規約을 나타낸다.

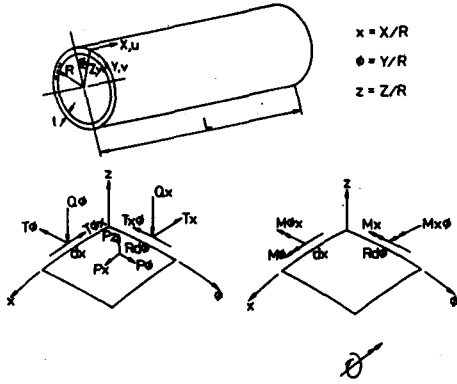


Fig. 1 Shell geometry and sign convention

2.2 基本方程式

(1) 平衡方程式⁽⁹⁾

Fig. 1에서 보여지는 圓筒殼 요소의 平衡方程式은 式 (1)과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{x\phi}}{\partial \phi} + RP_x &= 0 \\ \frac{\partial T_{\phi x}}{\partial x} + \frac{\partial T_\phi}{\partial \phi} + Q_\phi + RP_\phi &= 0 \\ T_\phi - \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} - RP_x &= 0 \\ \frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x} - \frac{\partial M_\phi}{\partial x} - RQ_\phi &= 0 \\ \frac{\partial M_{\phi x}}{\partial \phi} - \frac{\partial M_\phi}{\partial x} - RQ_x &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

여기서 $T_x, T_\phi, T_{x\phi}, T_{\phi x}$: 合應力成分

$M_x, M_\phi, M_{x\phi}, M_{\phi x}$: 合모우멘트成分

Q_x, Q_ϕ : 剪斷力成分

P_x, P_ϕ, P_z : x, ϕ, z 方向 單位面積當荷重

이다.

(2) 變形率-變位關係式(strain-displacement relation)⁽⁹⁾

圓筒殼이 平面應力狀態에 있으면 變位-變形率式은

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_\phi &= \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{w}{R} \\ \gamma_{x\phi} &= \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} (2)$$

이고 殼中央面(middle surface)에서의 變形率成分을 $\epsilon_x^0, \epsilon_\phi^0, \gamma_{x\phi}^0$ 로 표시하면 任意的 一點에서의 變形率成分은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_x^0 + zK_x \\ \epsilon_\phi &= \epsilon_\phi^0 + zK_\phi \\ \gamma_{x\phi} &= \gamma_{x\phi}^0 + zK_{x\phi} \end{aligned} \right\} (3)$$

여기서 $K_x, K_\phi, K_{x\phi}$ 는 曲率變化로서

$$\left. \begin{aligned} K_x &= -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ K_\phi &= -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \phi^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \phi} \right) \\ K_{x\phi} &= -\frac{2}{R} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \phi} - \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} (4)$$

이다.

(3) 應力-變形率關係式(stress-strain relations)⁽⁹⁾

圓筒殼의 主方向이 平面應力狀態에서 座標軸과 일치할 경우 應力-變形率式은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= E_1 \epsilon_x + \nu_x E_2 \epsilon_\phi \\ \sigma_\phi &= \nu_\phi E_1 \epsilon_x + E_2 \epsilon_\phi \\ \tau_{x\phi} &= G_{x\phi} \gamma_{x\phi} \end{aligned} \right\} (5)$$

여기서 $E_1 = E_x / (1 - \nu_x \nu_\phi), E_2 = E_\phi / (1 - \nu_x \nu_\phi)$ 이다.

(4) 支配方程式(governing equations)

直交異方性圓筒殼의 支配方程式을 Novozhilov⁽⁸⁾ 形態의 復素微分方程式으로 表現하기 위하여 다음과 같은 復素函數를 導入한다.

$$\left. \begin{aligned} \tilde{T}_1 &= T_x - i \frac{2b^2 (M_\phi - \nu_x M_x)}{R(1 - \nu_x \nu_\phi) H^2} \\ \tilde{T}_2 &= T_\phi - i \frac{2b^2 (M_x - \nu_\phi M_\phi)}{R(1 - \nu_x \nu_\phi) H^2} \\ \tilde{S} &= S + i \frac{2b^2 K}{R(1 - \nu_x \nu_\phi) H^2} \end{aligned} \right\} (6)$$

여기서

$$\left. \begin{aligned} S &= T_{x\phi} - \frac{M_{\phi x}}{R} = T_{\phi x} \\ K &= M_{x\phi} = M_{\phi x} \\ H^2 &= E_\phi / E_x \end{aligned} \right\} (7)$$

이다.

橫剪斷力成分은

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\phi x}}{\partial \phi} \right) \\ Q_\phi &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} (8)$$

이다.

式 (1) (6) (8)에서 Novozhilov 形態의 支配方程式이 아래와 같이 유도된다.

$$\Delta_0 \Delta_0 \tilde{T} + H^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \phi^2} + 2ib^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} = 2ib^2 R \Delta_0 P_x \quad (9)$$

(단, $P_x = P_\phi = 0$)

여기서

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + H^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\ b^2 &= \frac{R}{t} \sqrt{3H^2(1-\nu_x\nu_\phi)}, \quad i = \sqrt{-1} \end{aligned} \right\} (9a)$$

이다.

支配方程式 (9)의 유도과정에서 材料의 舉動은 特殊 直交異方性 (special orthotropy)^(9, 13, 23)으로 간주하였으며 이때의 剪斷彈性係數는 아래와 같이 가정하였다.

$$G_{x\phi} = \frac{\sqrt{E_x E_\phi}}{2(1 + \sqrt{\nu_x \nu_\phi})} \quad (10)$$

復素函數 \tilde{T}_1, \tilde{T}_2 , 및 \tilde{S} 사이의 關係式은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \tilde{T}_1 &= \tilde{T} - \frac{i}{2b^2} \Delta_0 \tilde{T} - R P_x \\ \tilde{T}_2 &= \tilde{T} - \tilde{T}_1 \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} &= -\frac{i}{2b^2} \left(\frac{\partial \Delta_0 \tilde{T}}{\partial \phi} + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \phi} \right) - R \frac{\partial P_x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \phi} &= -\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \frac{i}{2b^2} \frac{\partial \Delta_0 \tilde{T}}{\partial x} + R \frac{\partial P_x}{\partial x} \end{aligned} \right\} (11)$$

式 (6)의 合應力, 合모우멘트 및 剪斷力을 復素函數로 나타내면

$$\left. \begin{aligned} T_x &= R_x(\tilde{T}_1) \\ T_\phi &= R_\phi(\tilde{T}_2) \\ M_x &= -CH^2 I_n(\tilde{T}_1 + \nu_x \tilde{T}_1) \\ M_\phi &= -CH^2 I_n(\tilde{T}_1 + \nu_x \tilde{T}_1) \\ K &= CH^2(1 - \sqrt{\nu_x \nu_\phi}) I_n(\tilde{S}) \end{aligned} \right\} (12)$$

가 되고 여기서 R_x 는 實數部 (Real), I_n 은 虛數部 (Imaginary)를 나타내며 $C = R/2b^2$ 이다.

(5) 合應力, 合모우멘트-變位關係式 (stress resultants, couples-displacement relations)

直交異方性 圓筒殼에서 合應力, 合모우멘트와 變形率과의 關係式은 다음과 같다.⁽²³⁾

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_\phi \\ T_{x\phi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\phi \\ \gamma_{x\phi} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_\phi \\ M_{x\phi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_\phi \\ K_{x\phi} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

여기서

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{E_x t}{1 - \nu_x \nu_\phi} \\ A_{12} &= \frac{\nu_x E_x t}{1 - \nu_x \nu_\phi} = \frac{\nu_\phi E_\phi t}{1 - \nu_x \nu_\phi} \\ A_{22} &= \frac{E_\phi t}{1 - \nu_x \nu_\phi}, \quad A_{66} = G_{x\phi} t \\ D_{11} &= \frac{E_x t^3}{12(1 - \nu_x \nu_\phi)} \\ D_{12} &= \frac{\nu_x E_x t^3}{12(1 - \nu_x \nu_\phi)} = \frac{\nu_\phi E_\phi t^3}{12(1 - \nu_x \nu_\phi)} \\ D_{22} &= \frac{E_\phi t^3}{12(1 - \nu_x \nu_\phi)} \\ D_{66} &= \frac{G_{x\phi} t^3}{12} \end{aligned} \right\} (15)$$

이다.

變位成分 u, v, w 와 合應力, 合모우멘트와의 關係는 式 (3), (13) (14)에서

$$\left. \begin{aligned} M_x - \nu_x M_\phi &= -\frac{E_x t^3}{12R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ M_\phi - \nu_x M_x &= -\frac{E_\phi t^3}{12R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} - \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) \\ T_x - \nu_x T_\phi &= \frac{E_x t}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ T_\phi - \nu_x T_x &= \frac{E_\phi t}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} + w \right) \end{aligned} \right\} (16)$$

로 表示된다.

3. 一般解의 誘導

直交異方性 圓筒殼의 支配微分方程式 (9)의 一般解를 等方性 圓筒殼에 대한 Naghdi^(14, 15)의 解析方法을 擴張하여 誘導한다. 여기서 圓筒殼의 兩端은 單純支持狀態이고 原點은 圓筒殼의 一端으로 취하고, 作用荷重은 半徑方向 線荷重으로 취한다.

Fig. 2에서 보여지는 半徑方向 線荷重은 다음과 같이 표현된다.

$$P_n(x, \phi) = P_n^* \delta(\phi) \sin mx \quad (17)$$

여기서

P_n^* : 單位 길이 당 半徑方向 線荷重

$\delta(\phi)$: 單位 impulse 函數 (unit impulse function, delta function)

$m = n\pi R/L$ 이다.

式 (17)을 支配方程式 (9)에 代入하면

$$\begin{aligned} \Delta_0 \Delta_0 \tilde{T} + H^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \phi^2} + 2ib^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} \\ = 2ib^2 R P_n^* \Delta_0 \delta(\phi) \sin mx \end{aligned} \quad (18)$$

이 되고 式 (18)의 一般解를 다음과 같이 가정한다.

$$\tilde{T}^{(n)} = \phi^{(n)}(\phi) \sin mx \quad (19)$$

式 (19)을 式 (18)에 代입하여 特性方程式을 구하면

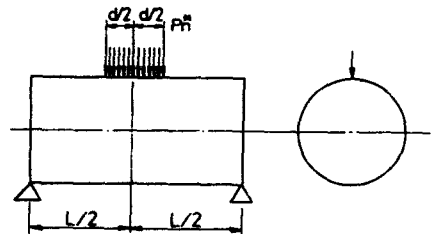


Fig. 2 Circular cylindrical shell subjected to segmental line load

$$H^2 \frac{d^4 \phi^{(n)}}{d\phi^4} + H^2(H^2 - 2m^2) \frac{d^2 \phi^{(n)}}{d\phi^2} + (m^4 - i2b^2 m^2) \phi^{(n)} = f_n(\phi) \quad (20)$$

여기서

$$f_n(\phi) = 2ib^2 RP_n^* \left[H^2 \frac{d^2}{d\phi^2} - m^2 \right] \delta(\phi) \quad (20a)$$

이다.

常微分方程式 (20)의 補數解(complementary solution)는 다음과 같다.

$$\phi_n^{(c)} = A_n \cosh \alpha_n \phi + C_n \cosh \beta_n \phi \quad (21)$$

여기서 A_n, C_n 은 復素積分常數로 境界條件에서 구해진다.

또한 特殊解(particular solution)은 다음과 같이 표현된다.

$$\phi_n^{(p)} = \frac{2ib^2 RP_n^* H^{-4} \epsilon(\phi)}{D_n} \left[\frac{H^2 \alpha_n^2 - m^2}{2\alpha_n} \sinh \alpha_n \phi - \frac{H^2 \beta_n^2 - m^2}{2\beta_n} \sinh \beta_n \phi \right] \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & (-\pi \leq \phi \leq \pi) \\ & \text{단 } \begin{cases} \epsilon(\phi) = + & \text{for } \phi > 0 \\ \epsilon(\phi) = - & \text{for } \phi < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (22a)$$

여기서 계수 α_n, β_n 및 D_n 은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= \left\{ -\frac{(H^4 - 2H^2 m^2)}{4H^4} + \frac{1}{4H^4} \sqrt{\frac{P+Q}{2}} \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{H^2} m^2 + \frac{1}{2H^4} \sqrt{\frac{P+Q}{2}} \right)^2 \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{8H^6} (P-Q) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &+ i \left\{ \frac{(H^4 - 2H^2 m^2)}{4H^4} - \frac{1}{4H^4} \sqrt{\frac{P+Q}{2}} \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{H^2} m^2 + \frac{1}{2H^4} \sqrt{\frac{P+Q}{2}} \right)^2 \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{8H^6} (P-Q) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \beta_n &= \left\{ -\frac{(H^4 - 2H^2 m^2)}{4H^4} - \frac{1}{4H^4} \sqrt{\frac{P+Q}{2}} \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{H^2} m^2 - \frac{1}{2H^4} \sqrt{\frac{P+Q}{2}} \right)^2 \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{8H^6} (P-Q) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &- i \left\{ \frac{(H^4 - 2H^2 m^2)}{4H^4} + \frac{1}{4H^4} \sqrt{\frac{P+Q}{2}} \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{H^2} m^2 - \frac{1}{2H^4} \sqrt{\frac{P+Q}{2}} \right)^2 \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{8H^6} (P-Q) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ D_n &= \alpha_n^2 - \beta_n^2 \\ P &= [(H^2 - 4H^4 m^2)^2 + (8H^4 b^2 m^2)^2]^{\frac{1}{2}} \\ Q &= H^2 - 4H^4 m^2 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

따라서 式 (19)의 復素函數 $\tilde{T}^{(n)}$ 은 다음과 같이 표

현된다.

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{(n)} &= [A_n \cosh \alpha_n \phi + C_n \cosh \beta_n \phi \\ &+ \frac{2ib^2 RP_n^* H^{-4} \epsilon(\phi)}{D_n} \left(\frac{H^2 \alpha_n^2 - m^2}{2\alpha_n} \sinh \alpha_n \phi \right. \\ &\left. - \frac{H^2 \beta_n^2 - m^2}{2\beta_n} \sinh \beta_n \phi \right)] \sin mx \quad (24) \\ & (n=1, 2, 3, \dots, -\pi < \phi < \pi) \end{aligned}$$

式 (11), (24)를 이용하면 復素函數 \tilde{T}_1, \tilde{T}_2 는

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1^{(n)} &= \left\{ A_n \cosh \alpha_n \phi \left[1 - \frac{i}{2b^2} (H^2 \alpha_n^2 - m^2) \right] \right. \\ &+ C_n \cosh \beta_n \phi \left[1 - \frac{i}{2b^2} (H^2 \beta_n^2 - m^2) \right] \\ &+ \frac{RP_n^* H^{-4} \epsilon(\phi)}{D_n} \left\{ \frac{H^2}{2} \alpha_n (H^2 \alpha_n^2 - m^2) \right. \\ &+ \left. \frac{ib^2}{\alpha_n} \left(1 + \frac{im^2}{2b^2} \right) (H^2 \alpha_n^2 - m^2) \right\} \sinh \alpha_n \phi \\ &- \frac{RP_n^* H^{-4} \epsilon(\phi)}{D_n} \left\{ \frac{H^2}{2} \beta_n (H^2 \beta_n^2 - m^2) \right. \\ &+ \left. \frac{ib^2}{\beta_n} \left(1 + \frac{im^2}{2b^2} \right) (H^2 \beta_n^2 - m^2) \right\} \sinh \beta_n \phi \left. \right\} \sin mx \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_2^{(n)} &= \left[\frac{i}{2b^2} (H^2 \alpha_n^2 - m^2) A_n \cosh \alpha_n \phi \right. \\ &+ \frac{i}{2b^2} (H^2 \beta_n^2 - m^2) C_n \cosh \beta_n \phi \\ &- \frac{\epsilon(\phi) RP_n^* (H^2 \alpha_n^2 - m^2)^2 H^{-4}}{2\alpha_n D_n} \sinh \alpha_n \phi \\ &+ \left. \frac{\epsilon(\phi) RP_n^* (H^2 \beta_n^2 - m^2)^2 H^{-4}}{2\beta_n D_n} \sinh \beta_n \phi \right] \sin mx \quad (26) \end{aligned}$$

이다.

지금 圓筒殼의 양단이 單純支持되었다면 境界條件은

$$v=w=T_x=M_x=0 \quad (\text{at } x=0, L/R) \quad (27)$$

이 조건은 式 (13), (27)의 관계에서 다음과 같이 表示된다.

$$T_x = T_\phi = M_x = M_\phi = 0 \quad (\text{at } x=0, L/R) \quad (28)$$

또한 (6)(10)式을 이용하여 境界조건을 復素函數로 표시하면

$$\tilde{T} = \tilde{T}_2 = 0 \quad (\text{at } x=0, L/R) \quad (29)$$

이다.

따라서 境界條件 (29)을 이용하여 式 (21)의 復素積分常數 A_n, C_n 을 구하면

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{-ib^2 RP_n^* H^{-4} (H^2 \alpha_n^2 - m^2) \coth \alpha_n \pi}{\alpha_n D_n} \\ C_n &= \frac{ib^2 RP_n^* H^{-4} (H^2 \beta_n^2 - m^2) \coth \beta_n \pi}{\beta_n D_n} \end{aligned} \quad (30)$$

이 된다.

지금 單位길이당 荷重 $\bar{P}(x)$ 을 級數展開하면

Table 1 Shell geometric parameters and orthotropic properties

Shell material and identification	Length L	Mean Radius R	Thickness t	Load P	E_x	E_θ	E_θ/E_x	ν_x	ν_θ	L/R	B
Isotropic aluminum (Al-1)	1346.2mm (53.0in)	43.2mm (1.7in)	3.0mm (0.119in)	2372N (533 32lbf)	71.7GPa (10.4×10^4 psi)	71.7GPa (10.4×10^4 psi)	1.0	0.34	0.34	31.18	4.82
Reinforced plastic ⁽¹⁾	2465mm	135.9mm	6.1mm	2210N	18.2GPa	3.0GPa	0.1648	0.0593	0.3598	18.14	3.94
	560mm	135.9mm	6.1mm	1320N	18.2GPa	3.0GPa	0.1648	0.0593	0.3598	4.12	3.94
Orthotropic material (15 cases)	—	135.9mm	1.359mm	2210N	—	—	0.55	—	—	2.4	—
							2.05			6.8	
							9.0			10	

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}(x) &= P_n^* \sin mx \\ P_n^* &= \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \bar{P}(x) \sin\left(\frac{n\pi R x}{L}\right) dx \end{aligned} \right\} (31)$$

여기서

$$\bar{P}(x) = \begin{cases} \bar{P} = \text{const} \left(\frac{L}{2R} - \frac{d}{2R} < x < \frac{L}{2R} + \frac{d}{2R} \right) \\ 0 & \left(x < \frac{L}{2R} - \frac{d}{2R}, x > \frac{L}{2R} + \frac{d}{2R} \right) \end{cases} (31a)$$

따라서 P_n^* 는 다음식이 된다.

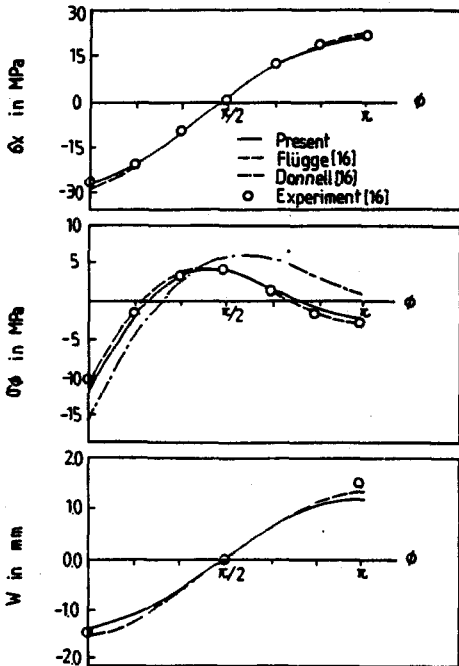


Fig. 3(a) Stress and displacement for the isotropic cylindrical shell Al-1 under the line load

$$P_n^* = -\frac{4\bar{P}}{n\pi R} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi d}{2L} \quad (n=1, 2, 3, \dots) (32)$$

한편 垂直變位 w_n 은 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$w_n = w_n(\phi) \sin mx (33)$$

따라서 (33)을 (16)에 대입하면

$$w_n = \frac{12R^2 [M_x^{(n)} - \nu_\theta M_\theta^{(n)}]}{E_x t^3 m^2} (34)$$

이다.

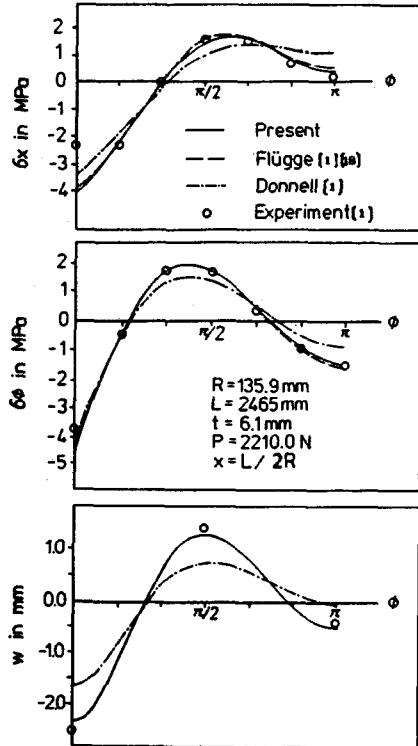


Fig. 3(b) Stresses and displacement for the reinforced-plastic orthotropic cylindrical shell under the line load, $L/R=18.14$, $d=L$.

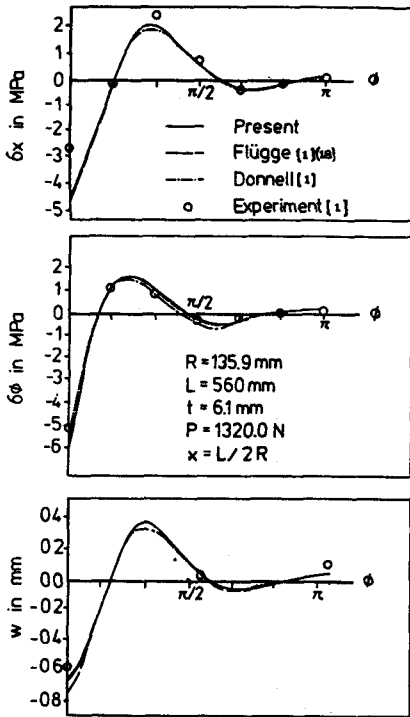


Fig. 3(c) Stresses and displacement for the reinforced-plastic orthotropic cylindrical shell under the line load, $L/R=4.12$, $d=L$

4. 數值例 및 考察

本 研究에서 고려한 圓筒殼의 幾何學的 變數와 直交異方特性들은 Table 1과 같으며 等方性殼도 비교를 위해 동시에 고려되었다.

本 解析에 의한 均一線荷重을 받는 圓筒殼의 應力成分 σ_x , σ_ϕ 및 半徑方向變位 w 에 대한 數值例를 Fig. 3에서 보였으며, 圓筒殼의 中央에서의 應力 및 變位를 圖示하였다. 解의 精密度를 檢討하기 위하여 等方性圓筒殼의 境遇 Micros⁽¹⁶⁾의 結果를, 直交異方性圓筒殼의 境遇는 Schwaighofer⁽¹¹⁾ 및 Chawla⁽¹⁸⁾의 研究結果도 함께 圖示하여 比較되었다.

本 解析結果는 흔히 比較의 標準으로 採用되는 Donnell 및 Flügge 理論을 使用한 Schwaighofer⁽¹¹⁾ 및 Vlasov 理論을 使用한 Chawla⁽¹⁸⁾의 研究結果와 잘 一致하였다.

Fig. 4~9에서는 均一 및 部分線荷重을 받는 直交異方性圓筒殼을 解析하기 위해 無次元線荷重變數들을 導入하였으며 直交異方特性을 보이기 위해 H^* ($=E_\phi/E_x$)는

실용적재료에서 채용되는 0.1648, 0.55, 1.0, 2.05, 9.0으로 취하였고 (Table 1), L/R (길이/반경)은 2, 4, 6, 8, 10으로 선정하여 無次元合應力 및 變位들을 圖表化하였다.

Fig. 4~7에서는 母線全體에 걸쳐 均一線荷重이 作用하는 圓筒殼에서 L/R 와 直交異方特性 H^* 및 B 의 변화에 따르는 變位와 合應力의 變動을 보여준다. L/R 와 H^* 이 증가할수록 T_x 는 증가하고, T_ϕ 는 減小함을 알 수 있다. 半徑方向變位 w 는 L/R 이 증가하고 H^*

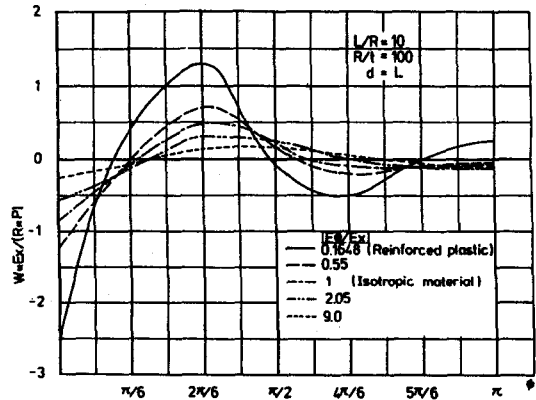


Fig. 4 Radial displacement of orthotropic cylindrical shells

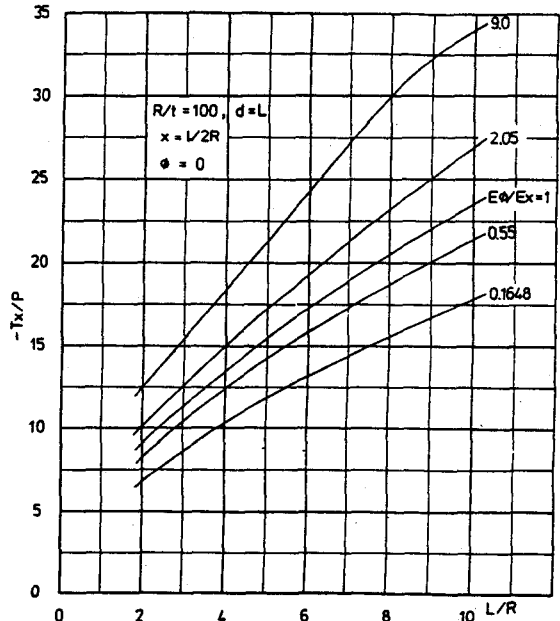


Fig. 5(a) Axial stress resultant versus various L/R of the orthotropic cylindrical shells under the line load

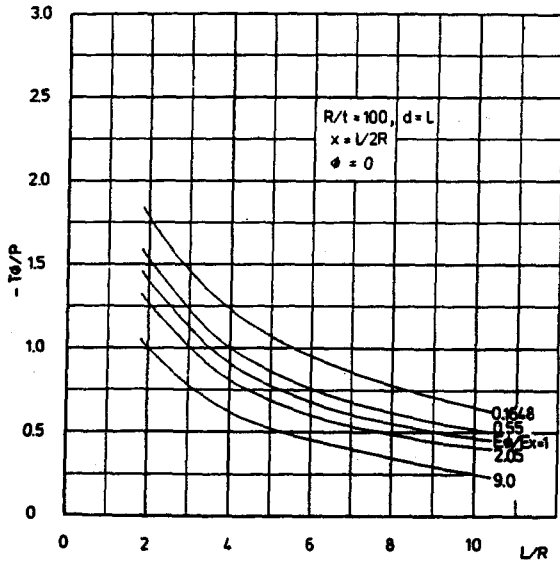


Fig. 5(b) Circumferential stress resultant versus various L/R of the orthotropic cylindrical shells under the line load

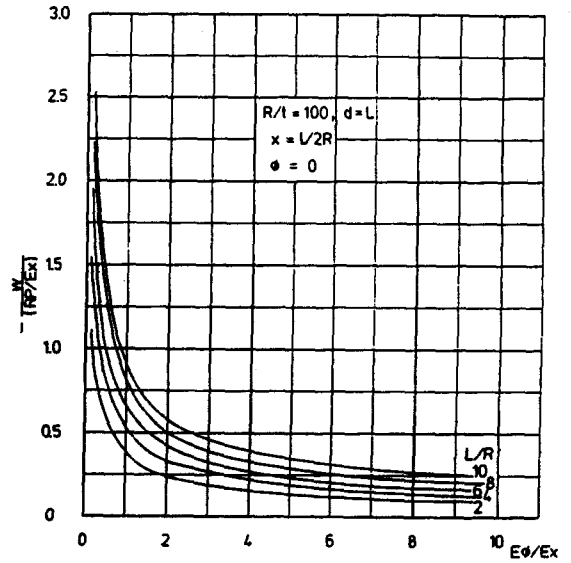


Fig. 6 Radial displacement versus orthotropic parameter at center of the orthotropic cylindrical shells under the line load

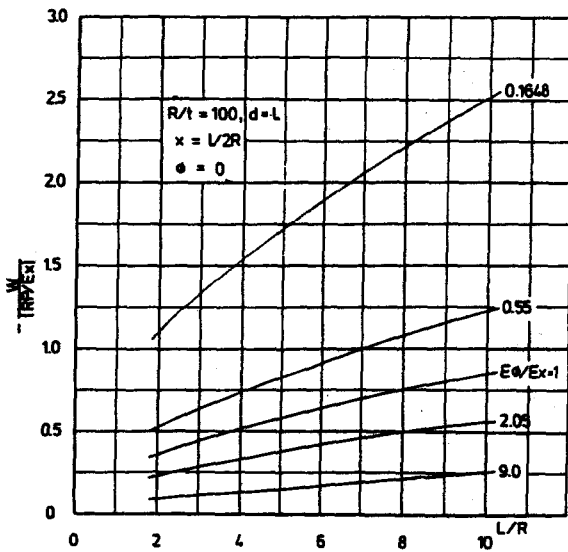


Fig. 5(c) Radial displacement versus various L/R of the orthotropic cylindrical shells under the line load

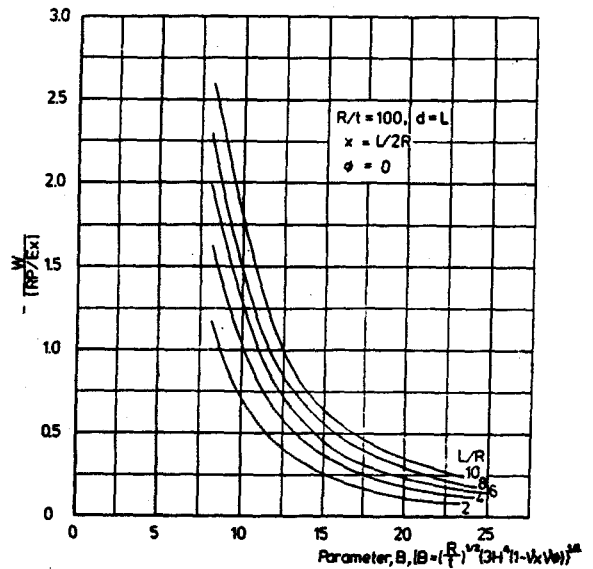


Fig. 7 Radial displacement versus orthotropic parameter B at center of the orthotropic cylindrical shells under the line load

와 B 가 減小할때 증가하는 경향을 보인다.

Fig. 8, 9에서는 部分線荷重($d=L/8, L/40$)이 作用하는 경우의 해석결과를 보여주고 있으며, 均一線荷重의 경우와 類似한 傾向을 나타낸다.

Fig. 10에서는 本解析에서 考慮한 級數解의 收斂傾向을 $AI-1$ 殼에 대해 考察한 結果이다. 한편 一般으로 工學에서 許容하는 誤差를 0.5% 以內로 設定할 때에 L/R 의 變化에 따르는 級數項을 Fig. 11에 圖示되었다. $L/R=2$ 인 殼에서는 25項程度에서 有用한 結果를 얻을 수 있으며 L/R 이 增加할수록 級數解의 收斂速度는 매우 빨라져서 L/R 이 20以上인 경우에는 15項이내로 充分한 精密度가 維持됨을 알 수 있다.

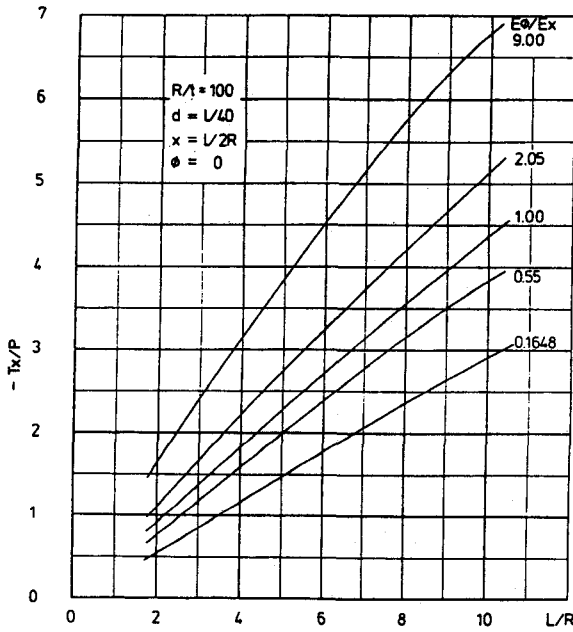


Fig. 8(a) Axial stress resultant vs. L/R for the orthotropic cylindrical shells under segmental line load

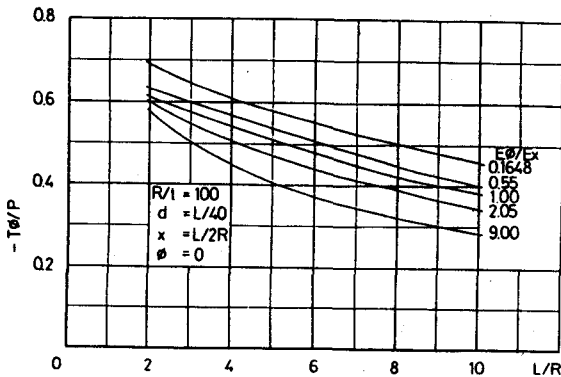


Fig. 8(b) Circumferential stress resultant vs. L/R for the orthotropic cylindrical shells under segmental line load

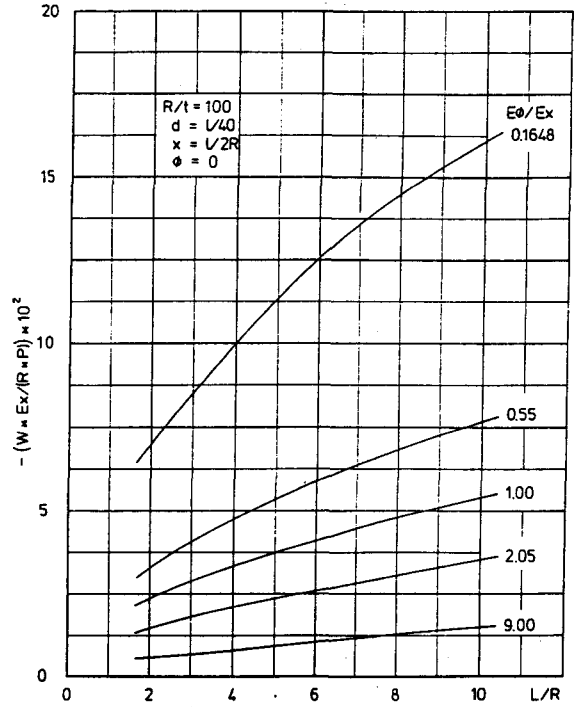


Fig. 8(c) Radial displacement vs. L/R for the orthotropic cylindrical shells under the segmental line load

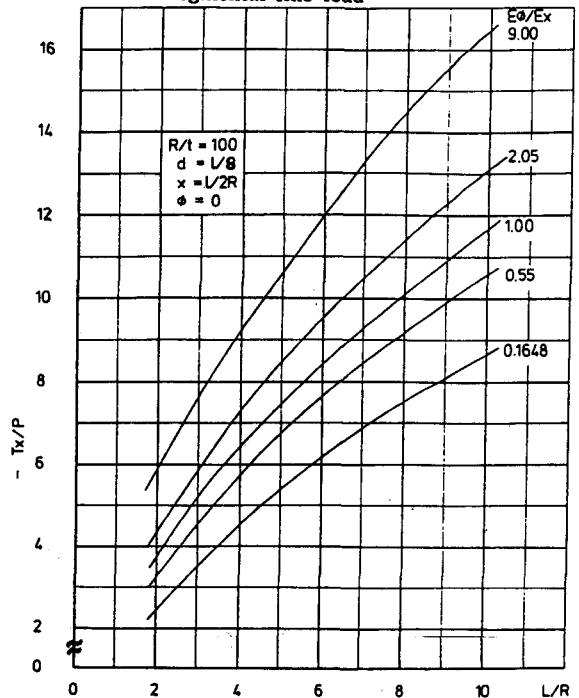


Fig. 9(a) Axial stress resultant vs. L/R for the orthotropic cylindrical shells under the segmental line load

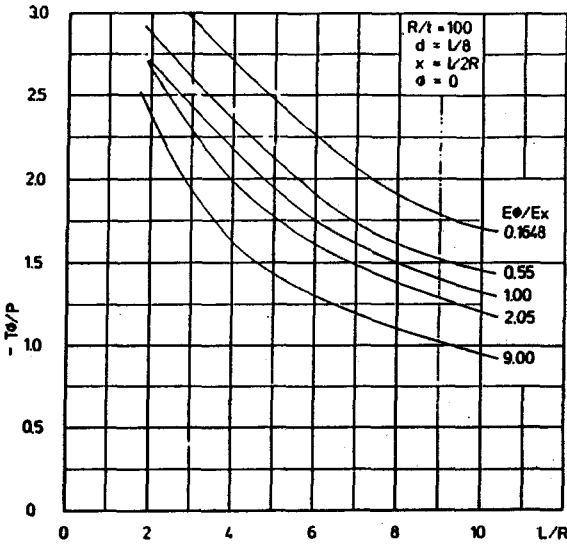


Fig. 9(b) Circumferential stress resultant vs. L/R for the orthotropic cylindrical shells under the segmental line load

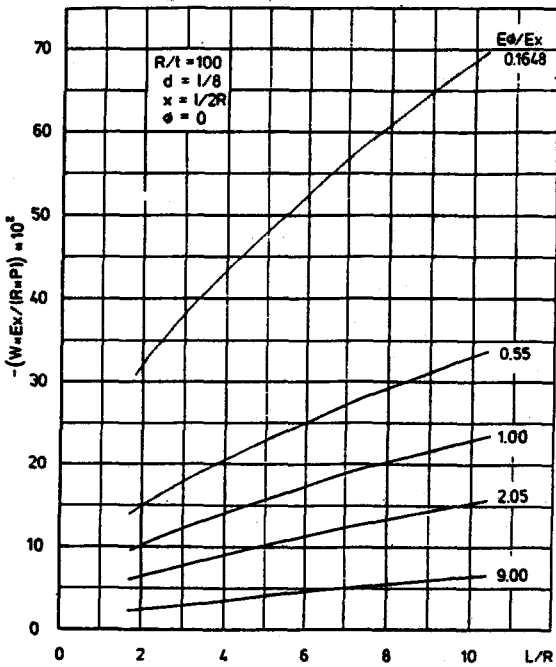


Fig. 9(c) Radial displacement vs. L/R for the orthotropic cylindrical shells under the segmental line load

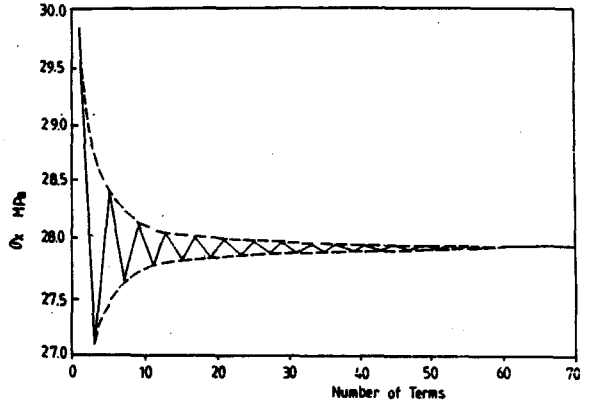


Fig. 10 A trend of convergence for shell A1-1

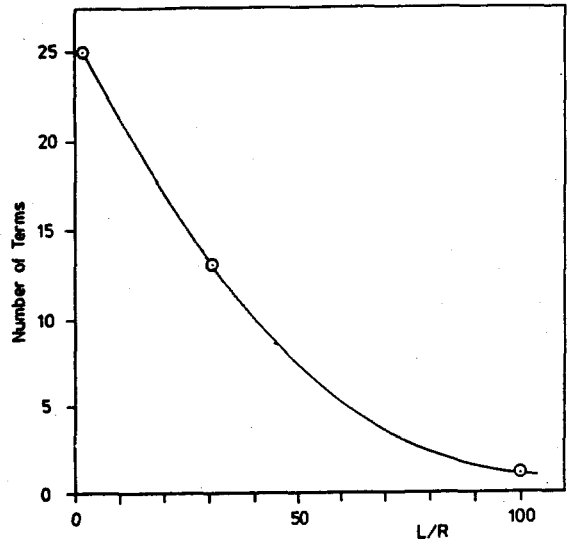


Fig. 11 No. of terms versus L/R within error 0.5%

5. 結 論

線荷重을 받는 直交異方性 圓筒殼의 應力解析에 관한 本 研究結果를 要約하면 다음과 같다.

(1) Novozhilov 殼理論에 基礎한 直交異方性 圓筒殼의 支配方程式을 誘導하였으며, 線荷重에 대한 一般解를 유도하였다.

(2) 本 解析方法의 適用例 및 精密度는 既存研究와 同一한 數值例를 通하여 檢證하여, 解의 收斂速度가 매우 빠르고 충분히 嚴密하였다.

(3) 本 解析은 局部荷重, 面積荷重(pad loading) 문제 到 적용할 수 있다.

參 考 文 獻

- (1) Schwaighofer, J. and Microys, H.F. 1979, "Orthotropic Cylindrical Shells Under Line Load", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 46, pp. 356~382.
- (2) Love, A.E.H., 1888, "On the Small Free Vibrations and Deformations of Thin Elastic Shells", *Phil. Trans. Royal Society (London)*, 17A, pp. 491~546.
- (3) Donnell, L.H. 1933, "Stability of Thin-Walled Tubes under Torsion", NACA-TR-479.
- (4) Flügge, W., 1934, "Statik and Dynamik Schalen", Springer-Verlag, Berlin.
- (5) Mangelsdorf, C.P., 1973, "The Morley-Koiter Equations for Thin Walled Circular Cylindrical Shells", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 40, pp. 961~965.
- (6) Vlasov, V.Z., 1964, "General Theory of Shells and its Application in Engineering", NASA TT F-99.
- (7) Sanders, J.L., 1959, "An Improved First-Approximation Theory for Thin Shells", NASA Technical Report R-24.
- (8) Novozhilov, V.V., 1970, "Thin Shell Theory", 2nd Edition, Noordhoff, Grönigen, The Netherlands.
- (9) Cheng, S. and He, F.B., 1984, "Theory of Orthotropic and Composite Cylindrical Shells, Accurate and Simple Fourth-Order Governing Equations", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, pp. 736~744.
- (10) Hoff, N.J., 1954, "Boundary-Value Problems of Thin-Walled Circular Cylinders", *Journal of the Applied Mechanics*, Vol. 21, pp. 343~350.
- (11) Hoff, N.J., 1955, "The Accuracy of Donnell Equations", *Journal of the Applied Mechanics*, Vol. 22, pp. 326~334.
- (12) Hoff, N.J., Kempner, J.K. and Pohle, F.V., 1954, "Line Load Applied Along Generators of Thin Walled Cylindrical Shells of Finite Length," *Quarterly Applied Mechanics*, Vol. II pp. 411~425.
- (13) Kempner, J.K., 1955, "Remarks on Donnell's Equations", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 22, pp. 117~118.
- (14) Naghdi, A.K., 1968, "Bending of a Simply Supported Circular Cylindrical Shell Subjected to Uniform Line Load Along a Generator", *International Journal of Solid & Structures*, Vol. 4, No. 11, pp. 1067~1080.
- (15) Naghdi, A.K., 1970, "Cylindrical Shell Subjected to Longitudinal Line Load", *Proc. of ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 96, No. EM5, pp. 653~666.
- (16) Microys, F., and Schwaighofer, J., 1978, "Isotropic Cylindrical Shells Under Line Load", *Proc. of ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 104, No. EM2, pp. 301~316.
- (17) Vinson, J.R. and Chou, T.W., 1975, "Composite Materials and Their Use in Structures", Applied Science Publication.
- (18) Chawla, U.S., 1983, "Orthotropic Cylindrical Shells Under Line Load Along a Generator", *Computers and Structures*, Vol. 17, No. 2, pp. 211~216.
- (19) 李永臣 等, 1984, "局部荷重을 받는 直交異方性 圓筒殼의 解析", *大韓機械學會論文集*, 第 8 卷, 第 5 號, pp. 408~415.
- (20) 李永臣, 1985, "母線을 따라 線荷重을 받는 直交異方性 複合材料 圓筒殼의 解析", *大韓機械學會 '85 年度 春季學術大會抄錄集*, pp. 298~302.
- (21) Erdogan, F., Ratwani, M. and Yüceoglu, U., 1974, "On the Effects of Orthotropy in a Cracked Cylindrical Shells", *International Journal of Fracture*, Vol. 10, No. 3, pp. 369~374.
- (22) Jones, R.M., 1975, "Mechanics of Composite Materials", Scripta Book Co.
- (23) Bert, C.W., 1985, "Theory of Orthotropic and Composite Cylindrical Shells, Accurate and Simple Fourth-Order Governing Equations", *Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, No. 4, pp. 982~983.