〈研究論文〉

Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers Vol. 12, No. 1, June 1986

陳腐化 製品에 대한 動的롯트 決定 模型에 관한 硏究

(A Study on the Dynamic Lot Size Model for Deteriorating Items)

孫 權 翼*
盧 載 晧*

Abstract

A dynamic lot size model is developed for the deteriorating items. The amount of deterioration during a period is assumed to be proportional to the inventory at the end of the period. It is further assumed that deterioration rates can differ among periods. This new model is shown to be equivalent to the general one by simple transformation of some variables. A numerical example is given to illustrate the derived results.

1. 序 論

食品 醫藥品, 古紙(waste paper) 등과 같이 時間이 경과함에 따라 그 效用價値나 機能이 低下되는 陳腐化 製品에 대해 많은 學者들이 多數의 在庫모형을 여러 상황하에서 硏究하여 왔다.

이중 Dave 는 時間을 離散的(discrete)으로 量의 單位를 連續的(continuous)으로 보는 視角에서 在庫模型을 開發하였다. [1, 2] Rengarajan 과 Vartak [4]은 期間 중 需要率 (demand rate)이 一定한 靜的 在庫시스템을 다룬 Dave 의 論文[1]을 需要率이 每 期間마다 變化하는 動的인 경우(dynamic case)로 擴張하였다. 그러나 그도 롯트의 크기(lot size)가 一定하다는 假定으로 接近하였다.

本 硏究에서는 롯트의 크기가 每 注文마다 다를 수 있는, 즉 陳腐化 製品에 대한 動的롯트決定模型(dynamic lot size model)을 定立하여 이를 解決할 수 있는 解法을 求하고저 한다.

陳腐化하지 않는 製品에 대한 動的롯트決定問題는 Wagner 와 Whitin [5] 以後로 다수의 論文이 發表되었다. 本 硏究에서는 그 중 每期間마다 購入價格이 變化하는 一般的인 問題를 다룬 Eppen 등의 論文[3]의 模型을 기초로

*江原大学校 工科大学 産業工学科

하여 陳腐化 效果(deteriorating effect)를 고려한 模型으로 擴張 定立하고저 한다. 아울러, 模型을 좀 더 現實的으로 一般化하기 위하여 每 期間마다 陳腐化 效果가 다르게 나타나는 상황을 고려한 模型을 세워 最適注文量(롯트크기)을 求하는 解法을 얻고자 한다. 陳腐化 效果가 每 期間마다 變化할 수 있다는 것은, 例를 들어 여름과 같이 製品이 腐敗하기 쉬운 시기에는 陳腐化率(deteriorating rate)을 높이고, 겨울처럼 부패현상이 거의 없는 시기에는 陳腐化率을 낮춤으로써 좀 더 現實에 充實한 模型을 세워 問題에 接近할 수 있게 한다.

2절에서는 陳腐化 製品에 대한 動的롯트決定模型을 定立하고, 3절에서는 最適解의 特性을 利用하여 解法을 求하며 이 過程에서 變數變換을 통하여 一般的인 動的롯트決定問題로 歸着될 수 있다는 사실을 보여준다. 이어 마지막 절에서는 簡單한 例題問題와 本 硏究의 結論이 주어진다.

2. 模型의 定立

模型의 定立을 위한 假定은 다음과 같다.

(1) 計劃期間(planning horizon) N 은 有限(finite)하다.

(2) 在庫의 品切(shortage)은 허용되지 않는다.

(3) 需要의 發生과 在庫調達은 每 期間 初에 發生한다.

(4) 注文 즉시 製品은 調達된다.

(5) 計劃期間의 初期와 期末의 在庫는 없다.

(6) 陳腐化率은 單位期間동안 在庫중 陳腐化된 量의 在庫量에 대한 比率을 나타내며 每 期間마다 다를 수 있다.

(7) 在庫중 陳腐化된 것은 交替하거나 修理하지 않고 次期 移越되면서 除去한다.

假定 (3)과 (6)에 의해서 한 期間동안 陳腐化된 量은 그 期間 末의 在庫量에 比例한다고 생각하여 줄 수 있다.

使用되는 記號의 說明은 다음과 같다.

(1) d_t : 期間 t 에서의 需要量.

(2) p_t : 期間 t 에서의 單位當 購買費用.

(3) S_t : 期間 t 에서의 注文費用.

(4) h_t : 期間 t 에서 期間 (t +1)로 移越되는 在庫에 대한 單位當 在庫費用.

(5) θ_t : 期間 t 에서 期間 (t +1)로 移越되는 在庫에 대한 陳腐化率. $(0 \le \theta_t < 1)$

(6) Q_t : 期間 t 에서의 注文量.

(7) I_t : 期間 t 末의 在庫水準.

위에서 假定한 問題의 模型은 다음과 같이 定立된다.

$$(P) \quad \underset{Q_t}{\mathrm{Min}} \sum_{t=1}^{N} [S_t \cdot \delta(Q_t) + p_t \cdot Q_t + h_t \cdot I_t] \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad I_t = (1-\theta_{t-1}) \cdot I_{t-1} + Q_t - d_t, \quad t=1,2,\cdots,N, \quad (2)$$

$$I_t > 0, \quad t=1,2,\cdots,N-1, \quad (3)$$

$$I_0 = I_N = 0, \quad (4)$$

$$\text{여기서, } \delta(Q_t) = \begin{cases} 1 & Q_t > 0, \\ 0 & Q_t = 0. \end{cases}$$

3. 解法

우선 效果的인 解法을 찾기 위하여 問題(P)에 대한 最適解(optimal solution)의 特性을 考察한다.

定理1 : 모든 t 에 대하여 $I_{t-1} \cdot Q_t = 0$의 最適解가 存在한다.

證明) 어떤 期間 v 에 대해, $I_{v-1} > 0$이고, $Q_v > 0$인 最適解가 存在한다고 假定하고 이때의 總費用을 TC 라 하자. u 를 v 直前에 注文이 發生한 時期라 하자. (이 假定은 $I_0 = 0$라는 假定에 의해 妥當함) 여기서, $I_{v-1} > 0$이고 $Q_v > 0$인 解는 最適解해가 될 수 없음을 矛盾이 되는 것을 보임으로써 證明하여 보자.

1) 現在의 解를 바꾸어 u時點의 注文量을 (陳腐化率이 고려된) Q_u와 Q_v의 합으로 하고 v時點에는 注文을 하지 않는다. [즉, $Q_u \to Q_u + \{\prod_{t=u}^{v-1}(1-\theta_t)^{-1}\} \cdot Q_v$, $Q_v \to 0$]

이 變化에 따른 새로운 總費用 TC_1은

$$TC_1 = TC + p_u \cdot \{\prod_{t=u}^{v-1}(1-\theta_t)^{-1}\} \cdot Q_v + \sum_{t=u}^{v-1} h_t \cdot \{\prod_{i=t}^{v-1}(1-\theta_i)^{-1}\} \cdot Q_v - S_v - p_v \cdot Q_v \quad (5)$$

TC는 最適費用이므로 $TC_1 \geq TC$ 이다.

따라서,

$$Q_v \cdot [p_u \cdot \{\prod_{t=u}^{v-1}(1-\theta_t)^{-1}\} + \sum_{t=u}^{v-1} h_t \cdot \{\prod_{i=t}^{v-1}(1-\theta_i)^{-1}\} - p_v] - S_v \geq 0 \quad (6)$$

2) Q_u를 減少시켜 v-1 時點의 在庫水準을 0이 되도록 하고, 대신에(陳腐化率을 고려하여) Q_v를 I_{v-1} 만큼 增加시킨다. [즉, $Q_u \to Q_u - \{\prod_{t=u}^{v-2}(1-\theta_t)^{-1}\} \cdot I_{v-1}$, $I_{v-1} \to 0$, $Q_v \to Q_v + (1-\theta_{v-1}) \cdot I_{v-1}$]

이 變化에 따른 總費用 TC_2는

$$TC_2 = TC - p_u \cdot \{\prod_{t=u}^{v-2}(1-\theta_t)^{-1}\} \cdot I_{v-1} - \sum_{t=u}^{v-1} h_t \cdot \{\prod_{i=t}^{v-2}(1-\theta_i)^{-1}\} \cdot I_{v-1} + p_v \cdot (1-\theta_{v-1}) \cdot I_{v-1} \quad (7)$$

(단, a > b이면, $\prod_{i=a}^{b}(1-\theta_i)^{-1} = 1$ 로 定義한다.)

$TC_2 \geq TC$ 이므로,

$$(1-\theta_{v-1}) \cdot I_{v-1} \cdot [p_u \cdot \{\prod_{t=u}^{v-2}(1-\theta_t)^{-1}\} + \sum_{t=u}^{v-1} h_t \cdot \{\prod_{i=t}^{v-1}(1-\theta_i)^{-1}\} - p_v] \leq 0 \quad (8)$$

1)의 式(6)과 2)의 式(8)은 矛盾이므로 定理1은 成立한다.

定理1은 一般的인 動的롯트決定問題[3,5]와 같이 在庫가 남아 있으면 追加 注文을 하지 않는 것이 最適임을 보여주고 있다.

다음 定理들은 定理1로 부터 쉽게 誘導되므로 證明을 省略하고 記述한다.

定理2 : v 時點의 需要가 Q_u, ($u<v$)에 의해서 만족되면, u와 v사이의 모든 需要들이 Q_u에 의해서 만족되는 最適解가 存在한다.

定理3 : 모든 t에 대하여 $Q_t = 0$ 또는 어떤 k, $t \leq k \leq N$에 대하여 $Q_t = \sum_{j=t}^{k}\{\prod_{i=t}^{j-1}(1-\theta_i)^{-1}\} \cdot d_j$인 最適解가 存在한다.

定理4 : $I_t = 0$가 주어지면 問題는 두 個의 작은 問題로 分離된다. 즉 1부터 t까지와 (t+1)부터 N까지의 두 問題로 나누어지고, 이들 각각에 대해 最適解를 求하면,이들은 全體問題의 最適解가 된다.

이상의 定理들에 의해서 問題(P)는 注文時期만 決定되면, 注文量이 決定되어지므로 解를 求할 수 있다. 따라서, 問題(P)를 前進的(forward)으로 풀 수 있는 動的計劃法(dynamic programming)으로 變換시킬 수 있다.

이를 위해 使用되는 記號는 다음과 같이 定義한다.

(1) F(t) : 1부터 t期間 問題에 대한 最小費用.

(2) $l(t)$: 1부터 t期間 問題의 最適解에서 마지막 注文時期.

(3) $f(l, t)$: 마지막 注文時期가 l인 1부터 t期間 問題에 대한 最小費用.

그러면,

$$f(l,t) = F(l-1) + S_l + p_l \cdot \sum_{j=l}^{t}\{\prod_{i=l}^{j-1}(1-\theta_i)^{-1}\} \cdot d_j + \sum_{j=l}^{t-1} h_j \cdot \sum_{k=j+1}^{t}[\{\prod_{i=j}^{k-1}(1-\theta_i)^{-1}\} \cdot d_k] \quad (9)$$

$$F(t) = \operatorname*{Min}_{l} f(l,t) = f(l(t), t) \quad (10)$$

여기서,式(9)를 操作이 容易하게 하기 위하여 다시 고쳐쓰면,

$$f(l,t)=F(l-1)+S_l+p_l\cdot\{\prod_{i=1}^{l-1}(1-\theta_i)\}\cdot\sum_{j=l}^{t}\{\prod_{i=1}^{j-1}(1-\theta_i)^{-1}\}\cdot d_j+\sum_{j=l}^{t-1}h_j\cdot\{\prod_{i=1}^{j-1}(1-\theta_i)\}\sum_{k=j+1}^{t}[\{\prod_{i=1}^{k-1}(1-\theta_i)^{-1}\}\cdot d_k] \quad (9-1)$$

여기서,

$$P_j=p_j\cdot\prod_{i=1}^{j-1}(1-\theta_i) \quad (11)$$

$$H_j=h_j\cdot\prod_{i=1}^{j-1}(1-\theta_i) \quad (12)$$

$$D_j=d_j\cdot\prod_{i=1}^{j-1}(1-\theta_i)^{-1} \quad (13)$$

라 하면, 式(9)와 (10)은 다음과 같이 簡單히 變換된다.

$$F(t)=\underset{1\le l\le t}{\mathrm{Min}}[F(l-1)+S_l+P_l\cdot\sum_{j=l}^{t}D_j+\sum_{j=l}^{t-1}H_j\cdot\sum_{k=j+1}^{t}D_k] \quad (14)$$

여기서, $F(0)=0$.

式(14)는 Eppen [3]의 式(1), (2)와 同一하다.

따라서 더 이상의 進行에 있어서는 Eppen [3]의 結果가 그대로 適用될 수 있다.

단지, 定理3의 Q_t는 p_j, h_j, d_j와 같은 方法으로 다음과 같이 變形될 수 있다.

어떤 k, $t\le k\le N$, 에 대하여,

$$Q_t=\{\prod_{i=1}^{t-1}(1-\theta_i)\}\cdot\sum_{j=t}^{k}\{\prod_{i=1}^{j-1}(1-\theta_i)^{-1}\}\cdot d_j \quad (15)$$

$$=\{\prod_{i=1}^{t-1}(1-\theta_i)\}\cdot\sum_{j=t}^{k}D_j \quad (16)$$

여기서,

$$q_t=\sum_{j=t}^{k}D_j \quad (17)$$

라 하면,

$$Q_t=\{\prod_{i=1}^{t-1}(1-\theta_i)\}\cdot q_t \quad (18)$$

이다.

만일, 모든 期間에 있어서 陳腐化率이 0 이라면, 즉 $\theta_i=0$, $\forall i$ 이면, 식(11), (12), (13), (18)의 P_j, H_j, D_j, Q_t는 각각 p_j, h_j, d_j, 및 q_t로 귀착되므로 Eppen [3]의 結果와 一致된다.

지금 까지의 結果를 利用하면, 陳腐化 製品에 대한 動的롯트決定問題의 解法은 다음과 같이 要約할 수 있다.

1) 式(11), (12), (13)에 따라 p_j, h_j, d_j를 變形한다.

2) 一般的인 롯트決定問題의 解法(Eppen 등의 論文[3], p.276)을 利用하여 $F(t)$와 $l(t)$ 등을 求한다.

3) $q_{l(t)}=\sum_{j=l(t)}^{t}D_j$ 여기서, t는 처음에는 N에서 시작하여, 그 다음에는 $t=l(N)-1$로 하여 $l(t)$가 1이 될 때까지 뒤에서 부터 注文時點 및 注文量을 決定한다.

4) 실제 注文量 Q_t는 式(18)에 의해서 求한다.

4. 例題 및 結論

[표1]에서 처럼 資料가 주어진 경우 지금 까지의 結果를 適用하여 보자. 陳腐化率을 除外한 나머지 資料는 Eppen 등[3]의 例題와 同一하다.

[표 1] Data for Sample Problem

t	1	2	3	4	5
d_t	120	30	140	120	200
p_t	8	10	4	3	8
S_t	15	50	900	600	100
h_t	1	1	1	1	1
θ_t	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2

[표1]의 값 중에서 p_t, h_t, d_t,를 式(11), (12), (13)에 따라 變換하면 [표2]와 같다.

[표 2] Transformed Data

t	1	2	3	4	5
D_t	120	33.33	172.84	164.61	342.94
P_t	8	9	3.24	2.19	4.67
H_t	1	0.9	0.81	0.73	0.58
S_t	15	50	900	600	100

〔표2〕의 變換 資料에 대하여 一般的인 方法을 適用하여 求한 값을 式(18)에 의해 換算한 結果와 Eppen 등의 結果(陳腐化率을 고려하지 않은 경우)가 〔표3〕에 주어져 있다.

〔표 3〕 Computational Results

t	1	2	3	4	5
q_t	153	0	173	508	0
Q_t	153	0	140	370	0
Eppen's Results	290	0	0	320	0

前者의 最適費用은 4,695이다. 이것은 Eppen의 結果(4,405)보다 陳腐化 効果가 고려되어서 다소 높아졌으며, 結果를 比較해 보면 陳腐化率 때문에 색다른 解가 얻어짐을 볼 수 있다.

本 硏究에서 旣存의 한 動的롯트決定模型을 陳腐化 製品에 관한 模型으로 擴張하여, 그 解法을 求해 본 結果 每期間當 需要(d_t), 單位購買費用(p_t), 在庫費用(h_t)등에 陳腐化率을 고려해 주어 變換시켜 줌으로써 一般的인 動的롯트決定模型에 대한 解法을 그대로 適用시켜 解를 쉽고 容易하게 求할 수 있다는 結果를 얻었다. 이러한 結果는 陳腐化 製品에 대한 動的롯트決定問題에 상당히 有用하리라 思料되며, 이상의 結果를 製品의 品切이 허용되는 在庫模型으로 擴張시켜 보면 더욱 바람직하리라 思料된다.

References

1. Dave, U., "On a Discrete-In-Time Order-Level Inventory Model for Deteriorating Items," *Journal of Operational Research Society,* Vol. 30, No. 4, pp. 349-354, 1979.
2. Dave, U. and Jaiswal, M. C., "A Discrete-In-Time Probabilistic Inventory Model for Deteriorating Items," *Decision Science,* Vol. 11, No. 1, pp. 110-120, 1980.
3. Eppen, G. D., et al., "Extensions of the Planning Horizon Theorem in the Dynamic Lot Size Model," *Management Science,* Vol 15, No. 5, pp. 268-277, 1969.
4. Rengarajan, S. and Vartak, M. N., "A Note on Dave's Inventory Model for Deteriorating Items," *Journal of Operational Research Society,* Vol. 34, No. 6, pp. 543-546, 1983.
5. Wagner, H. M. and Whitin, T. M., "Dynamic Version of the Economic Lot Size Model," *Management Science,* Vol. 5, No. 1, pp. 89-96, 1958.