像座標에 포함된 過大誤差의 除去方法에 관한 研究

A Study on the Gross Error Elimination of Image Coordinates

朴 弘 祺* 柳 福 模**
Park Hong-Gi Yeu Bock-Mo

要 旨

線形모델의 最小제곱調整에서 관측값에 포함된 過大誤差는 상관관계가 있는 다른 殘差들에 영향을 준다. 따라서 標準化殘差를 기초로 하는 Baarda의 方法은 수정되고 변화되어 왔다. 本 研究에서는 多過大誤差를 除去하기 위해 발표된 方法들을 比較分析하고, 像座標의 過大誤差除去에 적용하는데 目的을 두고 있다.

ABSTRACT

A gross error of the observation, in least squares abjustment from the linear model, have an effect on the residuals which are correlated. Therefore the testing procedure by Baarda, which is based on the standardized residual, is modified and varied. In this paper, presented methods which have been suggested for multiple gross error elimination are analized, and applied to the gross error elimination of image coordinates.

1. 序 論

오늘날의 寫眞測量에서는 定誤差의 消去를 위한 誤差모델이 개발되어 보다 정확한 결과값을 제공할 수 있게 되었다. 그러나 觀測途中 또는 入力過程에서 발생할 수 있는 過大誤差 (Gros Error)의 영향은 깊게 연구되지 못한 실정이다. 寫眞測量에서의 過大誤差를 El-Hakim은 다음의 4가지로 구분하고 있다.[1] 分類 1은 左右寫眞의 像座標를 바꿔 기록하는 誤差, 分類 2는 基準點座標에서의 誤差, 分類 3은 근접한 點들을 서로 바꾼 경우로서 위의 분류들 보다 오차크기가 작다. 또한 分類 4는 앞의 분류들 보다 오차가 크기가

* 延世大學校 大學院 博士課程
** 延世大學校 工科大學 教授

더욱 작아 定誤差와 구별이 잘안되는 觀測上의 誤差이다. Förstner는 이들 過大誤差($\nabla \ell$)를 크기에 따라 3가지(큰크기 : $|\nabla \ell| \geq$ 基線距離, 중간크기 : $20\delta \leq |\nabla \ell| <$ 基線距離, 작은 크기 : $4\delta \leq |\nabla \ell| < 20\delta$)로 나누고 있다.[2] 이들 過大誤差들은 座標調整의 결과값에 큰 영향을 미치므로 정확하고 신뢰할 수 있는 결과값을 얻기 위해서는 調整前에 過大誤差들을 探知하고 除去하여야만 한다.

寫眞測量에서의 過大誤差除去는 Baarda가 제시한 方法(B-method)에 기초하고 있으며,[3] Grün,[4] Förstner,[5] Molenaar,[6] Stefanovic,[7] El-Hakim[8] 등에 의해 연구발표되고 있다. 그러나 Baarda의 방법은 오직 한개의 過大誤差가 포함된 경우에만 정확한 분석이 가능하며, 殘差들간의 相關關係를 무시한 短點을 갖고 있으므로, 이를 보완하기 위한 연구가 계속되고 있다.

本 研究에서는 여러 過大誤差들이 관측값에 포함된 경우에 적용토록 旣發表된 방법들을 비교분석하고, 座標調整前의 像座標觀測단계에 이를 적용하는 데 목적을 두고 있다.

2. B-method의 問題點

Baarda는 過大誤差를 제거하는 데 다음의 두 단계를 이용하도록 제시했다.[3],[5] 첫번째는 관측값에 과대오차가 포함되어 있는 가를 조사하기 위한 Global Testing이며, 두번째는 假設檢定으로 各관측값들을 검정하여 과대오차가 포함된 관측값을 탐지하는 Data Snooping단계이다.

Global Testing을 위한 檢定統計量T가

$$T=\frac{V^TPV}{(n-u)\cdot\sigma_0^2}=\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \leq F_{(1-\alpha;\, n-u),\, \infty)} \qquad (1)$$

여기에서 V는 잔차행렬, P는 경중율행렬, $(n-u)$는 잉여관측수, σ_0^2은 사전분산, $\hat{\sigma}_0^2$는 사후분산이다.

이면 歸無假說(過大誤差가 없음)이 채택되며, $T>F$이면 기각된다.

過大誤差를 탐지하기 위해 종래에 사용되었던 방법인 一般殘差의 크기를 일정한 許容限界값과 비교하는 방법에서는 최소제곱법의 Masking Effect에 의해 틀린 결과를 초래할 수 있다. 따라서 Baarda는 일반 잔차대신 시스템의 기하조건이 포함된 標準化殘差(Standardiged Residual)를 사용하여 다음(2)식과 같은 檢定값 Wi를 조사한다.

$$W_i=\frac{V_i}{\sigma_{V_i}} = \frac{V_i}{\sigma_0\sqrt{(Q_{VV})_{ii}}}\sim N(0,1) \qquad (2)$$

여기에서 $(Q_{VV})_{ii}$는 다음 (3)식으로 표시되는 殘差의 輕重率係數行列의 i번째 對角要素이다.

$$Q_{VV}=I-A(A^TPA)^{-1}A^TP \qquad (3)$$

여기에서 I는 단위행렬, A는 관측방정식의 design 행렬이다.

檢定統計量 W_i는 棄却값K와 비교하여 $W_i > K$이면 관측값 li에 過大誤差가 포함되었다는 對立假說을 채택한다. 棄却값 K를 Baarda는 4.123 Förstner는 3.29로 제안하였다.

過大誤差 $\nabla\ell_i$가 W_i에 미치는 실제 영향은

$$\delta_i = \nabla W_i = \frac{\nabla V_i}{\sigma_{V_i}} = \frac{\nabla V_i}{\sigma_0\sqrt{(Q_{VV})_{ii}}} = \frac{\nabla\ell_i}{\sigma_0}\sqrt{(Q_{VV})_{ii}} \qquad (4)$$

이 되며, 이 δ_i를 非中心母數(Non-centrality Parameter)라 한다. 귀무가설과 대립가설사이의 偏인 δ_i의 下限界δ_0는

$$\delta_0(\alpha_0,\beta_0)\approx\phi^{-1}(1-\alpha_0/2)+\phi^{-1}(\beta_0) \qquad (5)$$

로서, $\alpha_0=0.1\%$, $\beta_0=80\%$ 일때 $\delta_0=4.13$이며, $\delta_0=1\%$, $\beta_0=80\%$ 일 때 $\delta_0=3.42$이다. 따라서 (4)식의 δ_i를 하한계δ_0로 대치하면 관측값에서의 과대오차의 하한계 $\nabla_0\ell_i$를 구할 수 있다.

$$\nabla_0\ell_i=\sigma_0\frac{\delta_0}{\sqrt{(Q_{VV})_{ii}}} \qquad (6)$$

Baarda는 앞에서 기술한 바와같이 Global Testing을 통해 過大誤差의 有無를 확인한 후 Data Snooping을 적용하도록 제안하고 있으나, 전체관측수에 비해 過大誤差의 數가 매우 작은 경우 Masking Effect 때문에 Global Testing으로는 확인할 수가 없으며, 사전분산 σ_0^2의 추정에 대한 不確實性이 매우 크기 때문에 Grün[4] 등은 Grobal Testing이 어떤 결과를 보이던지 간에 적어도 한개이상의 過大誤差가 포함될 확률이 거의 100%

인 실제문제에서는 Data Snooping을 적용하여야 한다고 발표하였다.

표-1은 $E(y)=-2-x$, $P=I$인 표본자료(1)로서 $\sigma_y=0.5$인 우연오차를 y_1에서 y_5까지에 포함시키고 y_6에 $+5$ ($=10\sigma_y$)의 과대오차를 포함시켰을 때 즉 $y_i=E(y)+\varepsilon_i$일 때의 Data Snooping 결과이다.

표-1에서 Q_{VV} 행렬의 대각요소는 6점에서 0.06으로 다른 값들에 비해 매우 작으므로 y_6에 포함된 과대오차의 영향이 대응하는 殘差에 거의 나타나지 않고 있다. y_6에 포함된 과대오차 5.0만이 各殘差들에 미치는 영향을 분석하면

$\nabla_5 V=[0.14\ 0.06\ -0.01\ -0.09\ -0.17\ 0.06]^T\cdot(5.0)$

$=[0.70\ 0.30\ -0.05\ -0.45\ -0.85\ 0.30]^T$

로서 5점에서 最大殘差가 발생해야하지만 과대오차가 $10\sigma_y$인 자료(1)에서도 다른 偶然誤差들에 의한 Masking Effect 때문에 最大殘差는 1점에서 발생하였다.

誤差의 크기를 추정하는 데 이용되고 있는 豫想殘差 (Predicted Residual) $\nabla y_i(=V_i/(Q_{VV})_{ii})$ 를 이용하여 6점에 포함된 오차를 추정하면 5.48로서 주어진 값5.0에 근사함을 알 수 있다.

또한 標準化殘差에 기초한 檢定統計量 W_i 에서도 가장 큰 값이 $W_1=2.83$으로서 過大誤差를 포함한 6점에서 발생하고 있지 않으며, 그 크기도 有意水準$\alpha=0.1\%$일 때의 棄却값$K(=3.29)$보다 작음을 알 수 있다. 탐지할 수 있는 과대오차의 下限界∇_{0y_i}의 크기는 6점에서 8.14 로서 過大誤差 5.0보다 크므로 Data Snooping 으로는 유의적인 검정이 불가능하며, 이 원인은 6점의 기하조건이 나쁘기 때문이다.

6점의 조건을 향상시키기 위해 인접한 곳의 관측값($x_7=8$, $y_7=-9.8$)을 추가한 표본자료(2)의 결과는 다음 표-2와 같다.

표-2의 결과 6점에서의 Q_{VV}행렬의 대각요소 값이 0.43으로 표-1에 비해 커졌으며, 이 영향으로 검정통계량W_i의 최대값이 6점에서 발생하였고 K값(3.29)보다 커서 유의수준 0.1%로 탐지할 수 있다.

또한 ∇_{0y_i}도 3.13으로 낮아져 시스템의 기하조건이 크게 향상되었음을 알 수 있다.

Baarda가 제시한 Data Snooping으로 過大誤差가 포함된 관측값을 정확하게 지적하기 위한 이상적인 조건은 오직 한개의 過大誤差만이 존재하며, 다른 偶然誤差들은 존재하지 않고, 잔차들간의 相關關係가 작아야 함을 알 수 있다.

표-1. 표본자료(1)의 Data Snooping 결과

No.	x_i	$E(y_i)$	ε_i	y_i	V_i	$(Q_{VV})_{ii}$	$\hat{\nabla} y_i$	W_i	∇_{0y_i}
1	-4	2	0.5	2.5	1.19	0.71	1.68	2.83	2.45
2	-3	1	-0.3	0.7	0.01	0.76	0.01	0.03	2.36
3	-2	0	-0.1	-0.1	-0.17	0.80	-0.21	-0.38	2.30
4	-1	-1	-0.5	-1.5	-0.05	0.83	-1.15	-2.09	2.67
5	0	-2	0.4	-1.6	-0.43	0.83	-0.52	-0.95	2.26
6	10	-12	5.0	-7.0	0.35	0.06	5.48	2.77	8.14

표-2. 표본자료(2)의 Data Snooping 결과

No.	x_i	$E(y_i)$	ε_i	y_i	V_i	$(Q_{VV})_{ii}$	$\hat{\nabla} y_i$	W_i	∇_{0y_i}
1	-4	2	0.5	2.5	1.02	0.71	1.42	2.41	2.44
2	-3	1	-0.3	0.7	-0.03	0.76	-0.04	-0.07	2.36
3	-2	0	-0.1	-0.1	-0.07	0.80	-0.09	-0.16	2.30
4	-1	-1	-0.5	-1.5	-0.72	0.83	-0.86	-1.57	2.26
5	0	-2	0.4	-1.6	-0.06	0.85	-0.07	-0.14	2.24
6	10	-12	5.0	-7.0	2.09	0.43	4.83	6.35	3.13
7	8	-10	0.2	-9.8	-2.22	0.60	-3.69	-5.72	2.66

3. 多過大誤差의 除去方法

여러개의 過大誤差가 관측값들에 포함된 경우 이들을 除去하기 위한 가장 간단한 접근방법은 Data Snooping을 반복하는 것이다. 즉 모든 檢定統計量W_i가 허용범위내에 들어올 때까지 가장 큰 $|W_i|$를 갖는 관측값을 하나씩 제거하는 방법이다. Kok[9]이 제시한 반복 Data Snooping (Iterated Data Snooping : 이하 IDS로 표기) 방법은 $|W_i|$를 棄却값$K(=3.29)$로 조사하여 초과하면 대응하는 관측값을 제거하고 Global Testing을 수행하여 반복수행의 여부를 결정한다. 이때 Global Testing을 위한 통계량T에 대한 棄却값F는 관측값의 除去에 따라 自有度가 달라지고 이에 따라 有意水準이 달라지게 되므로, $F(1-\alpha'; n-u-c, \infty)$ 값이 이용되며, α'는 $\delta_0=\delta(\alpha', \beta_0, n-u-c, \infty)=\delta(\alpha_0, \beta_0, 1, \infty)$의 관계로 부터 계산된다. 여기에서 c는 除去된 관측값의 갯수이다. 이와 같은 IDS방법은 간단하기 때문에 실제 많이 이용하고 있으나 표-1에서와 같은 문제점은 항상 내포하고 있다. 또한 σ_0의 추정의 불확실성은 결과에 큰 영향을 미친다. 즉 σ_0의 추정이 너무 크면 過大誤差가 탐지되지 못하고 남을 確率이 크게 되며, 너무 작으면 有意한 관측값들은 除去할 確率이 크게 된다.

Pope[10]은 관측값들의 精密度에 대한 사전정보가 없어 σ_0를 알 수 없을 때 이용하기 위한 檢定統計量W_i를 제시하였다.

$$W_i=\frac{V_i}{\sigma_0\sqrt{(Q_{VV})_{ii}}}\sim t(n-u-1) \tag{7}$$

W_i는 歸無假說下에서 $(n-u-1)$自有度의 Student-t分布를 따르지만, 自有度가 작은 경우에는 Pope에 의해 제시된 τ分布를 따른다.

또 다른 접근방법은 過大誤差가 포함된 관측값의 갯수에 대한 사전정보에 의존할 수 있다. 이에 대해 제시된 방법으로 b/n이 過大誤差의 最大許容比라면 1,2,…b개의 殘差그룹으로 반복검정하는 방법이 있다. Stefanovic[7]은 모든 가능한 組合을 χ^2檢定으로 비교하는 방법을 제시했다. 이 방법은 相關性이 큰 관측값들을 組合하여 檢定할 수 있다는 장점은 있으나 실제적용에는 組合數가 너무 많아져 수행하기 어렵다. 이에 대해 Benciolini[11] 등이 제시한 循環殘差除去法(Recursive Residual Rejection : 이하 RRR로 표기)은 불량관측값이라고 의심되는 관측값들을 골라내는 단계와 그들 중 우량관측값을 다시 채택하는 단계의 두단계로 이루어 진다.

RRR法에서는 ρ번 반복하며 가장 큰 $|\nabla\ell_i|$ $(=V_i/(Q_{VV})_{ii})$를 채택하여 ρ개의 의심스런 관측값들을 선택한다. ρ의 결정은 殘差들에 Masking Effect가 존재하므로 $\rho \geq b$이어야 하며, Benciolini 등은 $b/n=0.05$, $0.15<\frac{\rho}{n-u}<0.20$을 사진측량에서 이용하고 있다. ρ개 관측값 그룹중에서 우량관측값을 채택하기 위한 檢定條件은

$$H_{exp}=\frac{\nabla\ell^2_{n-\rho+1}}{\sum_{i=u+1}^{n-\rho+1}\nabla\ell_i^2}<H \tag{8}$$

인 경우이며, $H_{exp}\geq H$이면 過大誤差가 포함된 관측값임을 나타낸다. 이때 棄却값H는 Hawkins가 제시한 分布에 따른다.

표본자료(1)에 RRR法을 적용하면 6번 관측값에 대한 $H_{exp}=0.996$이며 이때의 有意水準 $\alpha=0.1\%$의 H값은 0.993이므로 過大誤差를 제거할 수 있었다.

4. 像座標의 過大誤差除去

寫眞測量의 座標調整에서 정확한 결과값을 얻기 위해서는 像座標값의 精密性이 요구된다. 반복관측의 개념으로 像座標 觀測時 반복관측으로 불량관측값을 제거할 수 있으리라 생각되지만, 반복관측시에도 관측값에 똑같은 크기의 過大誤差가 발생할 수 있으며, 오히려 더 큰 過大誤差들이 포함될 수도 있다. 따라서 재측이 가장 효과적이라고는 볼 수 없다.

立體모델의 두사진을 이용한 座標變換은 像座標에 포함된 過大誤差를 제거하는 데 적용할 수 있다. 왼쪽像座標를 오른쪽像座標로 座標變換하기 위해 Helmert 變換式을 이용한다. 이와 같은 座標變換으로 像번호의 잘못기록 및 寫眞크기를 초과하는 座標값들에 대해 일차적으로 매우 큰

過大誤差를 除去할 수 있다.

표-3은 대상물의 기복에 의해 寫眞上에 起伏變位가 3점에서 최대 4mm 발생한 像座標를 이용한 결과이다.

표-3에서 Data 1은 5번점의 오른쪽 像座標의 x, y값에 2mm, 9번점의 오른쪽 像座標의 x값에 4mm의 過大誤差를 포함시킨 경우이며, Data 2는 5번점의 오른쪽 x, y좌표에 4mm, 9번점오른쪽 x좌표에 5mm를, Data 3는 5번점 x, y 좌표와 9번점 x좌표에 5mm의 過大誤差를 포함시킨 경우이다. 표에서 過大誤差의 크기가 起伏變位量과 같거나 큰 경우는 x좌표의 殘差上에 나타남을 알 수 있으며, y좌표의 殘差는 y좌표에 過大誤差가 있고 없음이 그대로 반영됨을 알 수있다.

표-3의 관측값들에 앞에서 기술한 過大誤差의 除去方法을 적용한 결과는 표-4와 같다. IDS方法의 적용은 起伏變位가 포함된 像座標變換의 사전분산값 σ_0를 추정하기가 어렵기 때문에 제외하였다.

표-4에서 過大誤差의 크기를 起伏變位量보다 크게 한 경우 Pope의 方法은 殘差들의 Masking Effect와 그에 따른 사후 분산추정량의 증대에 의해 過大誤差를 탐지하지 못하는 데 비해, RRR法은 有意水準 $\alpha=0.1\%$로서 過大誤差를 정확하게 탐지하였다. 그러나 기복변위량 보다 과대오차가 작게 발생하는 경우에는 두가지 방법이 모두 최대기복변위가 발생하는 관측값에도 過大誤差가 포함된 것으로 판단하고 있다. 따라서 座標調整前단계에서 像座標에 포함된 過大誤差를 탐지하여 그 관측값을 除去하기 위해서는 잔차분석이나 RRR法을 이용하는 것이 효과적이며, 그 크기는 起伏變位量의 최대값보다 큰過大誤差만을 정확하게 제거할 수 있었다.

5. 結　論

本 硏究는 관측값에 포함된 過大誤差들을 除去하기 위한 方法들을 比較分析하고 像座標觀測값에 이를 적용한 것으로, 다음과 같은 結論을 얻을 수 있었다.

첫째, Data Snooping을 반복수행하는 方法은

표-3. 像座標의 殘差分析

(단위 : mm)

No.	상 좌 표 관 측 값				Data 1		Data 2		Data 3	
	X_L	Y_L	X_R	Y_R	V_X	V_Y	V_X	V_Y	V_X	V_Y
1	97.673	180.515	75.083	80.475	-0.053	-0.121	-0.139	-0.343	-0.256	-0.453
2	128.692	180.423	105.792	80.359	-0.557	-0.453	-0.854	-0.748	-0.966	-0.855
3	158.014	180.618	134.627	80.543	-1.324	-0.758	-1.720	-1.122	-1.827	-1.228
4	93.523	160.744	70.903	60.735	-0.134	0.142	-0.359	-0.004	-0.475	-0.117
5	124.946	160.523	102.244	60.468	1.479	1.785	3.148	3.566	4.037	4.455
6	156.755	159.548	133.771	59.456	-1.119	-0.560	-1.560	-0.850	-1.666	-0.959
7	93.115	142.816	70.361	42.833	-0.443	0.345	-0.708	0.260	-0.823	0.144
8	124.410	141.949	101.549	41.913	-0.860	-0.012	-1.233	-0.167	-1.343	-0.281
9	151.576	141.152	132.787	41.063	2.904	-0.368	3.424	-0.593	3.319	-0.705

표-4. 像座標變換時의 過大誤差除去

過　大　誤　差	Pope의 方法		RRR 法
	$\alpha=0.05\%$	$\alpha=0.1\%$	($\alpha=0.1\ \%$)
5點($\nabla x=\nabla y=2$ mm), 9點($\nabla x=4$mm)	X_9	X_9, X_5, Y_5, X_3	X_9, X_5, Y_5, X_3
5點($\nabla x=\nabla y=4$ mm), 9點($\nabla x=5$ mm)	—	—	X_9, X_5, Y_5
5點($\nabla x=\nabla y=5$ mm), 9點($\nabla x=5$ mm)	—	—	X_9, X_5, Y_5
7點($\nabla x=2$ mm, $\nabla y=4$ mm)	Y_7, X_7, X_3	Y_7, X_7, X_3	Y_7, X_7, X_3

誤差들의 Masking Effect에 의해 틀린 結果를 초래할 수 있으며, σ_0추정의 正確性에 크게 좌우됨을 알 수 있었다.

둘째, RRR法은 IDS方法, Pope의 方法보다 효과적으로 過大誤差들을 탐지함을 알 수 있었다.

세째, 寫眞座標의 調整計算前에 最大起伏量보다 큰 過大誤差가 포함된 像座標는 正確하게 除去할 수 있음을 알 수 있었다.

參考文獻

1. El-Hakim, S. F., and H. Ziemann, "A Step-by-Step Strategy for Gross-Error Detection", Comm. Ⅲ, Proceedings of ISPRS, 1982, pp. 145-153.
2. Förstner, W., "Results of Test I on Gross Error Detection of ISP WG Ⅲ/1 and OEEPE", Int. Arch. of Photogrammetry, Vol. 24-Ⅲ, 1982, pp. 190-201.
3. Hottier, P., "Théorie de Baarda: Detection des Fautes et Fiabilité des Estimations et ses Applications en Photogrammétrie", S. F. P. T., Bulletine No. 84, 1981-4, pp. 5-20.
4. Grün, A., "Internal Reliability Models for Aerial Bundle System", XIVth Congress of ISP, Comm. Ⅲ, 1980, pp. 294-310.
5. Förstner, W., "The Reliabilty of Block Triangulation", P. E. & R. S., Vol. 51, No. 6, 1985, pp. 1137-1149.
6. Molenaar, M., "Essay on Empirical Accuracy Studies in Aerial Triangulation", ITC Journal, 1978-1, pp. 81-103.
7. Stefanovic, P., "Blunders and Least Squares", ITC Journal, 1978-1, pp. 122-155.
8. El-Hakim, S. F., "A Practical Study of Gross-Error Detection in Bundle Adjustment", Technical Paper of ASP, 47th Annual Meeting, 1981, pp. 1-17.
9. Kok, J. J., On Data Snooping and Multiple Outlier Testing, NOAA Technical Report NOS NGS 30, 1984.
10. Pope, A. J., The Statistics of Residuals and the Detection of Outliers, NOAA Technical Report NOS65 NGS1, 1976.
11. Benciolini, B., L. Mussio, and F. Sanso, "An Approach to Gross Error Detection more conservative than Baarda Snooping", Comm. Ⅲ, Proceedings of ISPRS, 1982, pp. 41-59.