

論 文

SEM 을 이용한 완전도체 산란체의 전류분포 해석

準會員 朴 東 熙* 正會員 李 承 浩** 正會員 金 正 祺***

The Analysis of the Current Distribution in a Perfect Conductor Scatterer Using SEM

Dong Hee PARK*, Seung Ho LEE** and Jung Ki KIM*** *Regular Members*

要 約 회전형 완전도체 scatterer의 주파수에 대한 전류분포와 natural frequencies 및 natural modes의 크기를 계산으로써 나타냈다. 방법으로써 회전형 완전도체 scatterer에 확장경계조건을 적용하므로 간략화된 E-field 적분방정식에 기본을 두고 time-응답해를 구하기 위한 수치적 방법으로써 singularity expansion 방법을 적용하였다.

ABSTRACT By solving the current distribution, natural frequencies, and the amplitude of natural modes about the perfect conducting scatterer of revolution are presented. Singularity expansion method is applied to solve the time-domain response based on the simplified E-field integral equation by the application of the extended boundary condition for the perfect conducting scatterer of revolution.

1. 서 론

1971년초에 SEM (Singularity Expansion Method)이용의 방정식이 세워졌으며, 시간영역과 주파수 영역을 잇는 Laplace(Fourier) 변환 관계로

부터 복소주파수 평면에서 전체 singularity들으로써 response를 확장시키고 광대역 주파수 응답특성을 효과적으로 계산한다⁽¹⁾.

안테나 또는 scatterer 해석에 관해 SEM을 사용하여 natural frequencies와 natural modes의 전류분포계산을 위한 방법은 Tesche⁽²⁾와 Marin⁽³⁾에 의해 제시되어졌고, 유한 완전도체로부터 scatter된 filed의 복소 주파수(s) 평면에서 해석적 성질들도 제시되었다^{(2),(3)}.

본 논문은 위와 같은 방법을 이용하여 임의의 회전형 완전도체 scatterer에 대해 같은 결과를 얻

* , *** 中央大學校大學院電子工學科
Dept. of Electronic Engineering Chungang
University Seoul, 151 Korea.

** 東洋工業專門大學電子科
Dept. of Electronic Engineering Dongyang
Technical College, 150 Korea
論文番號 : 86-34(接受 1986. 8. 1)

어넷으며, 그에 따른 과정 및 결과를 소개하고자 한다.

완전도체 scatterer 상에서 E-field 적분 방정식을 구하기 위해 time harmonic Maxwell 방정식을 복소주파수로 변환한 후 수치해석에 용이한 Pocklington 방정식으로 구성한다. Pocklington 방정식으로 구성된 E-field 적분방정식에 moment 법을 적용하여 그 전류분포 특성을 조사하고 time domain 응답을 구하는 과정으로써 SEM 을 사용하여 singularities 을 갖는 pole 점들을 계산한다.

직선형 산란체에 대해 이 결과는 좋은 일치율 보이며⁽²⁾, 회전형 대형 scatterer 인 완전 도체에 대해 Z 축을 중심으로 확장 경계 조건을 적용하여⁽⁴⁾ step wave 가 입사 했을 때 여러 주파수에 따른 전류 분포 특성 및 pole 점들과 이들 pole 점들을 이용한 natural mode 의 크기를 구하였다.

다음의 E-field 적분 방정식의 formulation 에서 time varying maxwell 방정식을 이용하여 완전 도체 표면에서 전류 밀도의 합성 벡터를 만들어 3 차원 적분 방정식을 간략화하여 수치 해석에 용이한 1 차원 적분 방정식을 유도하고, formulation 된 식에 moment 법을 적용한다.

적분 operator 의 역 operator 는 natural frequencies 로 구성되며, homogeneous 적분 방정식의 nontrivial 해를 가진다. 이들 관계를 matrix 형태로 간략히 구성한다^{(2), (5)}.

수치 해석 및 data 에서는 적분 방정식을 moment 법에 적용하는 수치 해석의 간략한 소개와 natural frequencies 를 구하기 위한 수치 해석을 보이며, data 들로써 주파수 변화에 따른 각각의 전류분포와 pole 점들 및 natural mode 크기를 보인다. 그리고 각각 그림과 표로써 이들을 나타낸다.

2. E-field 적분 방정식의 formulation

time-varying field 를 이용한 적분 방정식을 유도하기 위해 Maxwell 방정식을 Laplace 변환한 후 아래와 같이 입사 전계 $E^i(D; s)$ 에 의해 도체 표면에서의 전하 밀도 $\sigma(D; s)$ 와 전류 밀도 $J(D; s)$ 가 유기된다⁽¹⁾.

이 관계를 벡터 potential A 와 scalar potential Φ 로 나타내면 아래와 같다.

$$s \epsilon J^s = -s^2 \mu \epsilon A + \nabla (\nabla' \cdot A) \quad (1)$$

이때 vector potential $A(D, D'; s)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$A(D, D'; s) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V J(D'; s) \frac{e^{-sR}}{R} dV' \quad (2)$$

$J(D'; s)$: Source 점에서의 전류 밀도

R : 거리 함수

s : 복소 주파수

D, D' : 3 차원 좌표계에서 source 점과 field 점.

입사 field 가 회전형 완전도체에 가해질 때 도체 표면에서의 total field 는 다음과 같다.

$$E^{total} = E^i + E^s = 0 \quad (3)$$

식(3)의 관계에 따라 식(1)을 적분식으로 나타내면 다음과 같다.

$$-E^i = \frac{1}{4\pi s \epsilon} \left\{ \nabla \iiint_V \nabla' \cdot J(D'; s) \frac{e^{-sR}}{R} dV' - \frac{s^2}{c^2} \iiint_V J(D'; s) \frac{e^{-sR}}{R} dV' \right\} \quad (4)$$

회전형 완전 도체 중심축에서 확장 경계 조건을 적용하면 거리 함수 R 은 반경 함수와 Z 축 성분으로 간략화 되며, source point 와 field point 에 따라 거리에 대한 singularities 를 제거할 수 있다⁽⁴⁾.

$$R = \sqrt{(z-z')^2 + r^2(z')} \quad (5)$$

단, $r(z')$: source 점에서의 반경 함수. 입사 field 가 가해질 경우 회전형 완전 도체의 전류 밀도 성분들을 합성 벡터로써 원통좌표계로 나타낸 그림은 아래와 같다.

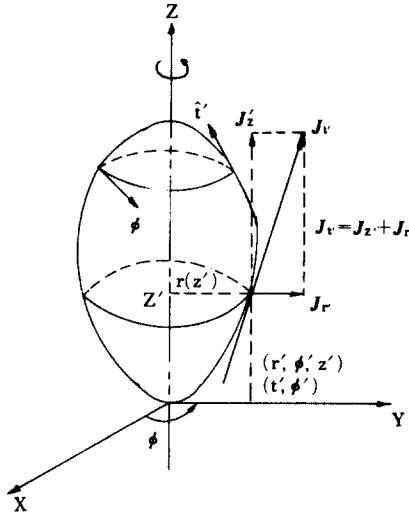


그림 1 원통좌표계와 표면좌표계 사이의 관계에서 합성
Vector addition at the relation between cylindrical and surface coordinate system.

그림 1에서 보는 바와 같이 원통좌표계에서의 완전도체표면에 유기된 전체 전류밀도는 다음과 같다.

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_r + \mathbf{J}_\phi + \mathbf{J}_z \quad (6)$$

3 차원을 2 차원으로 간략화한 전류밀도 $\mathbf{J}(D'; s)$ 는 ϕ' 와 그리고, r', z' 의 합성 벡터 t' 로 나타낸다.

식(4)에서 source에 대한 $\text{div}(\mathbf{J}(D'; s))$ 는 다음과 같다.

$$\nabla' \cdot \mathbf{J}(z'; s) = \frac{1}{r(z')} \left(\frac{\partial}{\partial \phi'} \mathbf{J}_\phi + \frac{\partial}{\partial z'} r(z') \mathbf{J}_z \right) \quad (7)$$

그러므로 식(4)의 대괄호 내의 좌측항은 다음의 2 차원 적분으로 나타낸다.

$$\nabla' \cdot \mathbf{J}(D; s) \frac{e^{-\frac{s}{c}R}}{R}$$

$$d\nu' = \nabla' \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial z'} \left(r(z') \mathbf{J}_t(z', \phi'; s) \right) \frac{e^{-\frac{s}{c}R}}{R} d\phi' dz' \quad (8)$$

회전형 완전 도체에서 총 전류는 다음과 같다.

$$I(z') = \int_0^{2\pi} \mathbf{J}_t r(z') d\phi' \quad (9)$$

식(8)에서 field 점의 gradient는 확장 경계 조건에 따라 z 축상에 놓았으므로 $\frac{\partial}{\partial z}$ 로 나타내며, 이에 따른 식(8)을 다시 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^L \frac{\partial}{\partial z'} I(z'; s) \frac{e^{-\frac{s}{c}R}}{R} dz' \quad (10)$$

식(4) 대괄호 내의 우측항은 확장 경계 조건의 관계와 회전형 완전도체의 총 전류 관계에 따라 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{s^2}{c^2} \iiint_{V'} \mathbf{J}(D'; s) \frac{e^{-\frac{s}{c}R}}{R} d\nu' \quad (11)$$

식(10)과 식(11)로 식(4)를 다시 표현한다.

$$-E' = \frac{1}{4\pi\epsilon s} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \int_0^L \frac{\partial}{\partial z'} I(z'; s) \frac{e^{-\frac{s}{c}R}}{R} dz' - \frac{s^2}{c^2} \int_0^L I(z'; s) \frac{e^{-\frac{s}{c}R}}{R} dz' \right\} \quad (12)$$

또한 회전형 완전 도체의 축을 따라 나타낸 입사전계는 다음과 같고, 그림으로써 간략히 표현한다.

$$E'(z; s) = E_o(s) \sin \theta_0 \exp\left(-\frac{s}{c} \cos \theta_0 z\right) \quad (13)$$

step wave 일때

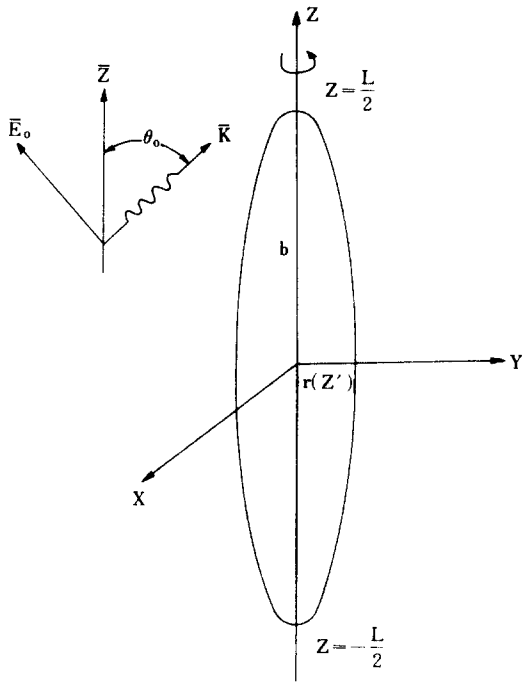


그림 2 좌표의 원점으로부터 길이 L/2인 회전형 prolate spheroid 산란체.
 $r(z')$: 반경함수, b : 장축, K : 전파상수, θ_0 : 입사각.
 The body of revolution prolate spheroid scatterer in length L/2 from origin point of coordinate.

$$E_o(s) = \frac{E_o}{s}$$

위 식 (12)에서 회전형 완전 도체 양 끝점에서 zero인 경계 조건을 직접 적용하면 최종식은 다음과 같이 얻어진다.

$$-E^t = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \left\{ \int_0^L I(z'; s) \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} + \frac{s^2}{c^2} \right) \frac{e^{-\frac{s}{c}R}}{R} dz' \right\} \quad (14)$$

이때 식(14)는 Pocklington형 적분 방정식과 같다.

식(14)을 수치적 해를 구하기 위한 방법으로 moment 법을 적용하면, 적분 operator의 역 operator는 pole 점들을 제외한 복소 주파수 평면에서

해석적이 된다.

이 적분의 연산자는 homogeneous 적분 방정식의 nontrivial 해와 adjoint homogeneous 적분 방정식의 nontrivial 해를 가지며 natural frequencies로 나타낸다⁽²⁾.

이들 관계를 matrix 형태로 간략히 나타내면 다음과 같다^{(2), (5)}.

$$[Z(s)] [I(s)] = [V(s)] \quad (15)$$

복소 주파수 s 평면에서 전류 함수 $I(z; s)$ 에 대해 natural frequencies(s_α)는 식(15)의 homogeneous version

$$[Z(s_\alpha)] [I(s_\alpha)] = 0 \quad (16)$$

를 만족하는 nontrivial 해가 된다.

위 식(16)을 만족하는 s_α 를 가질 때 전류의 natural frequencies를 결정하기 위한 방법으로 matrix $[Z(s_\alpha)]$ 의 determinant를 zero로 놓고 다항식의 근을 구한다⁽²⁾.

3. 수치 해석과 Data

가. 수치 해석

비동차 방정식을 moment 법에 적용하는 방법을 제시하면 다음과 같이 정의한다.

$$L(f) = g \quad (17)$$

L : 적분 operator

f : Response

g : Excitation

이러한 비동차 방정식에 대해 moment 법을 적용하기 위해 response 함수로써 Cubic-B Spline을 사용하였고, CPU time을 줄이기 위해 Collocation method를 사용하여 해를 구했다⁽⁶⁾.

pole 점 계산으로써 식(15)의 복소 주파수 s 평면에서 전류 함수 $I(z; s)$ 에 대해 nontrivial 해를 만족하는 식(16)은 natural frequencies를 갖는다.

식(16)을 만족하는 s_α 를 구하기 위해 impedance

matrix의 determinant를 zero로 한다.

$$\det [Z(s_a)] = \Delta(s_a) = 0 \quad (18)$$

식(18)의 determinant에 대해 pole 점들을 계산하기 위해 Taylor 급수로써 식(18)를 전개한다.

$$\begin{aligned} \Delta(s_a) = 0 &= \Delta(s_0) + \Delta'(s_0)(s_a - s_0) \\ &+ \frac{1}{2} \Delta''(s_0)(s_a - s_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

위 식(19)의 두 항만을 고려하면

$$(s_a - s_0) = -\Delta(s_0) / \Delta'(s_0) \quad (20)$$

이 된다.

iterative method로써 초기치(s_0)에 대해 Newton Raphson 방법을 적용하면 각각의 pole 점들을 구한다⁽²⁾.

나. data

E-field 적분 방정식의 formulation에서 식 (14)인 적분 방정식을 moment 법에 적용하여 thin wire 완전 도체 및 회전형 완전 도체인 prolate spheroid Scatterer에 주파수를 변화시켜 그에 따른 전류의 크기를 구해 그림으로써 나타낸다. wire의 경우에 대해 전체의 입사각이 $\theta_0 = 30^\circ$ 로

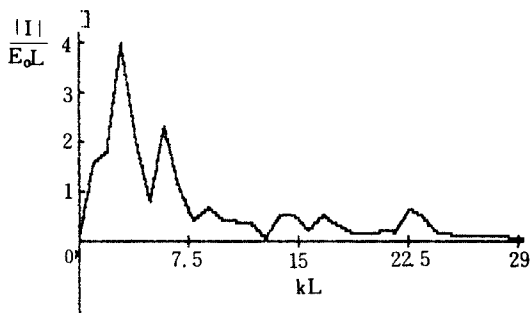


그림 3 주파수 변화에 관해 $d/L=0.01$ 인 scattering wire $Z/L=0.25$ 에서의 전류 크기(입사각 $\theta_0=30^\circ$) Current magnitude at scattering wire $Z/L=0.25$ in $d/L=0.01$ on frequencies variation.

입사하며 scatterer 전체 길이의 각각 3 점인 $Z=0.25L$, $Z=0.5L$, $Z=0.75L$ 에서 주파수변화에 따른 전류의 크기를 구했다.

이는 Tesche⁽²⁾의 결과와 좋은 일치를 보이며, 그림 3~5에서 각각 나타내었다⁽²⁾.

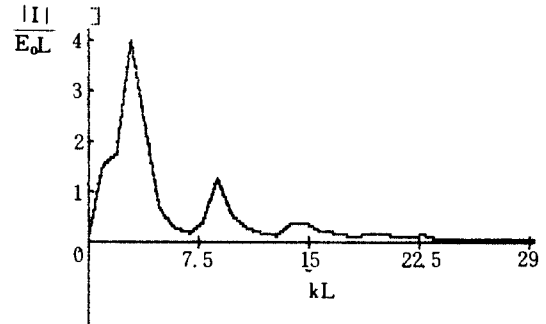


그림 4 주파수 변화에 관해 $d/L=0.01$ 인 scattering wire $Z/L=0.5$ 에서의 전류 크기(입사각 $\theta_0=30^\circ$) Current magnitude at scattering wire $Z/L=0.5$ in $d/L=0.01$ on frequencies variation.

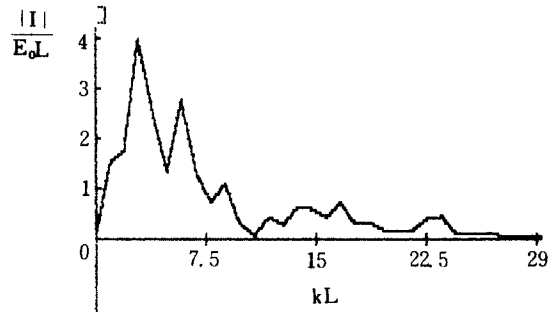


그림 5 주파수 변화에 관해 $d/L=0.01$ 인 scattering wire $Z/L=0.75$ 에서의 전류 크기(입사각 $\theta_0=30^\circ$) Current magnitude at scattering wire $Z/L=0.75$ in $d/L=0.01$ on frequencies variation.

회전형 완전 도체인 prolate spheroid scatterer에 대해서도 같은 방법으로 구하였다. 이때 prolate spheroid의 이심율은 0.990066812이며 주파수 변화에 따라 전류 크기를 비교하면, Taylor⁽⁴⁾가 구한 data와 좋은 일치를 보이며, 그에 따른 전류의 크기를 $\theta_0=30^\circ$ 와 $\theta_0=90^\circ$ 일때 각각 그림 6~11에서 보인다⁽⁴⁾.

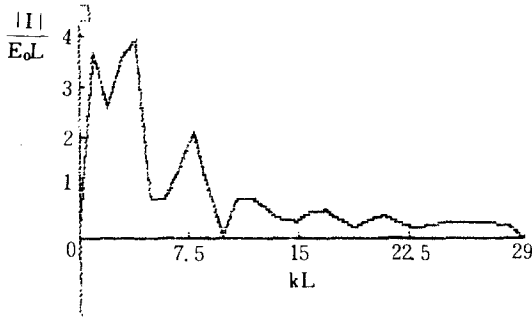


그림 6 주파수 변화에 관해 scattering prolate spheroid $Z/L = 0.25$ 에서의 전류 크기(입사각 $\theta_0 = 30^\circ$)
Current magnitude at scattering prolate spheroid $Z/L = 0.25$ on frequencies variation.

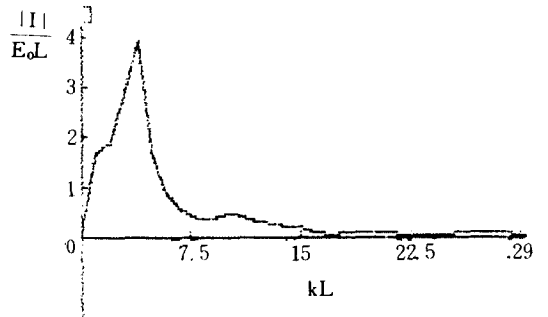


그림 9 주파수 변화에 관해 scattering prolate spheroid $Z/L = 0.25$ 에서의 전류 크기(입사각 $\theta_0 = 90^\circ$)
Current magnitude at scattering prolate spheroid $Z/L = 0.25$ on frequencies variation.

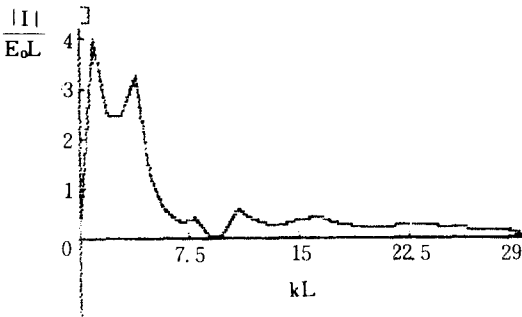


그림 7 주파수 변화에 관해 scattering prolate spheroid $Z/L = 0.5$ 에서의 전류 크기(입사각 $\theta_0 = 30^\circ$)
Current magnitude at scattering prolate spheroid $Z/L = 0.5$ on frequencies variation.

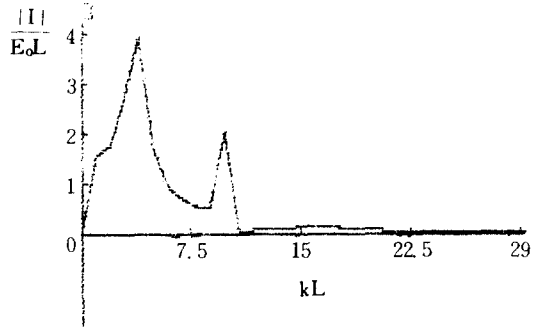


그림 10 주파수 변화에 관해 scattering prolate spheroid $Z/L = 0.5$ 에서의 전류 크기(입사각 $\theta_0 = 90^\circ$)
Current magnitude at scattering prolate spheroid $Z/L = 0.5$ on frequencies variation.

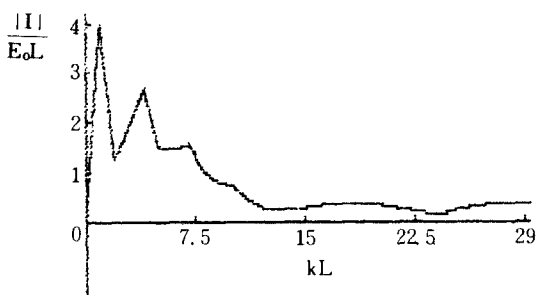


그림 8 주파수 변화에 관해 scattering prolate spheroid $Z/L = 0.75$ 에서의 전류 크기(입사각 $\theta_0 = 30^\circ$)
Current magnitude at scattering prolate spheroid $Z/L = 0.75$ on frequencies variation.

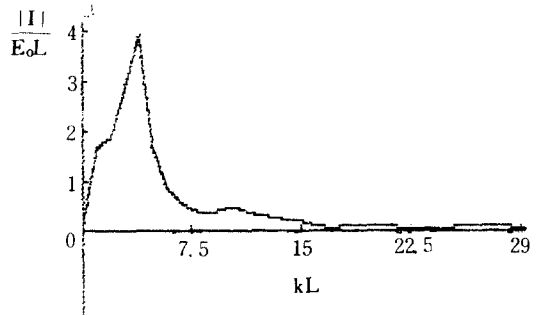


그림 11 주파수 변화에 관해 scattering prolate spheroid $Z/L = 0.75$ 에서의 전류 크기(입사각 $\theta_0 = 90^\circ$)
Current magnitude at scattering prolate spheroid $Z/L = 0.75$ on frequencies variation.

표 1은 복소 주파수 s 평면의 thin wire 완전도체에서, 표 2는 sphere 완전도체에서, 또 표 3은 회전형 완전도체 prolate spheroid에서의 pole 값들을 수치적으로 보이고 l 은 layer를 나타내며, n 는 layer 내에서 각각의 pole 값들을 나타낸다^{(2), (3), (7)}
이표들은 각각 Tesche⁽²⁾, Straton⁽⁷⁾, Marin⁽³⁾의 결과와 일치한다.

표 1 Thin wire에서 $l=1$ 인 첫 네점의 pole 값($d/L=0.01$). Pole values of first four points in thin wire scatterer at $l=1$.

l	n	$\text{Re}(sL/c\pi)$	$\text{Im}(sL/c\pi)$
1	1	-0.061	0.911
	2	-0.092	1.734
	3	-0.169	2.928
	4	-0.184	3.902

표 2 완전 구도체의 electric mode에 대해 $l=1$ 에서 첫 네점의 pole 값 Pole values of first four points in electric mode of perfectly conducting sphere scatterer at $l=1$.

l	n	$\text{Re}(sL/c\pi)$	$\text{Im}(sL/c\pi)$
1	1	-0.50	0.86
	2	-0.70	1.80
	3	-0.83	2.77
	4	-0.95	3.71

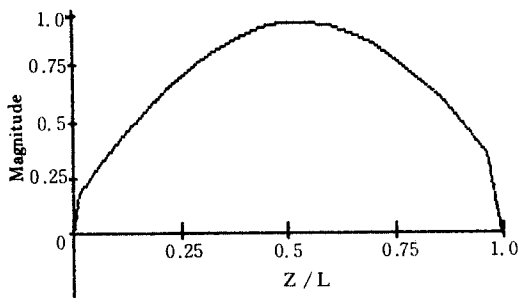


그림12 $n=1, l=1$ 에서 thin wire의 평균화된 natural mode 크기 Normalized natural mode magnitude of thin wire at $n=1, l=1$.

표 3 완전도체 prolate spheroid에 대해 $l=1$ 에서 첫네점의 pole 값 Pole values of first four points in perfectly conducting prolate spheroid scatterer at $l=1$.

l	n	$\text{Re}(sL/c\pi)$	$\text{Im}(sL/c\pi)$
1	1	-0.210	1.430
	2	-0.425	2.986
	3	-0.483	4.490
	4	-0.565	6.131

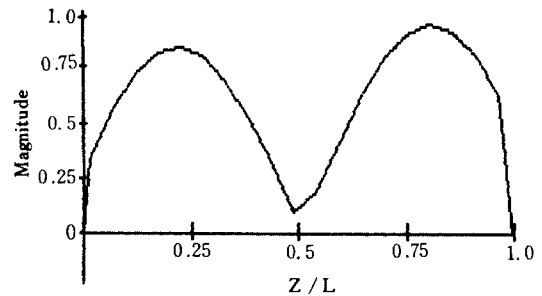


그림13 $n=2, l=1$ 에서 thin wire의 평균화된 natural mode 크기 Normalized natural mode magnitude of thin wire at $n=2, l=1$.

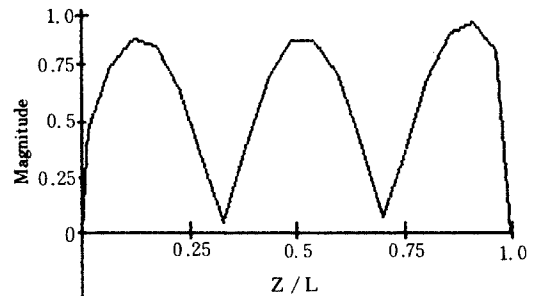


그림14 $n=3, l=1$ 에서 thin wire의 평균화된 natural mode 크기 Normalized natural mode magnitude of thin wire at $n=3, l=1$.

완전도체 thin wire와 회전형 완전도체 prolate spheroid scatterer에 대해, $l=1$ 일때 $n=1, 2, 3$ 의 각각 natural mode 전류 크기를 그림12~17에 data를 직접 나타내었다^{(2), (3)}.

이 결과는 Tesche⁽²⁾, Marin⁽³⁾의 결과와 일치한다.

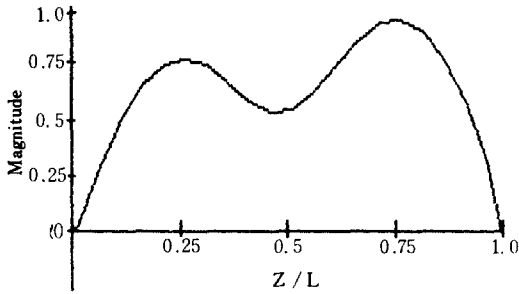


그림 15 $n=1, l=1$ 에서 prolate spheroid의 평균화된 natural mode 크기
Normalized natural mode magnitude of prolate spheroid at $n=1, l=1$.

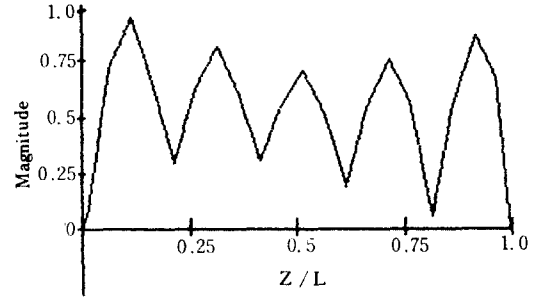


그림 17 $n=3, l=1$ 에서 prolate spheroid의 평균화된 natural mode 크기
Normalized natural mode magnitude of prolate spheroid at $n=3, l=1$.

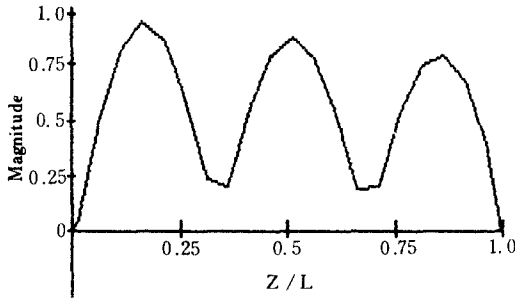


그림 16 $n=2, l=1$ 에서 prolate spheroid의 평균화된 natural mode 크기
Normalized natural mode magnitude of prolate spheroid at $n=2, l=1$.

參 考 文 獻

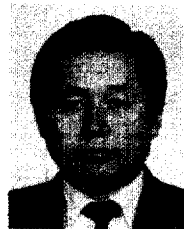
- (1) L. B. FEISEL, "Transient electromagnetic fields," Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York 1976
- (2) FREDRICK M. TESCHE, "On the analysis of Scattering and antenna problems using the singularity expansion technique," IEEE vol. AP-21, no. 1, JAN. 1973.
- (3) LENNART MARIN, "Natural-Mode representation of transient scattering from rotationally symmetric bodies," IEEE vol. AP-22, no. 2, Mar. 1974.
- (4) CLAYBORNE D. TAYLOR & DONALD R. WILTON, "The extended boundary condition solution of the dipole antenna of revolution," IEEE Trans. Antenna propagat. Nov. 1972
- (5) REGER F. HARRINGTON, "Field computation by moment methods," New York, Macmillan, 1968.
- (6) 윤재훈, 이석열, 김정기 "확장경계 조건을 이용한 회전형 안테나의 전류 분포," 대한전자공학회 하계종합학술대회 논문집, vol. 1, 1985, 6.
- (7) J. A. STRATON, "Electromagnetic theory," MCGRAW HILL, New York, 1941.
- (8) LENNART MARIN, "Natural -Mode representation of transient scattered field," IEEE vol. AP-21, no. 6, Nov. 1973.
- (9) LENNART MARIN & R. W. LATHAM, "Representation of transient scattered fields in terms of free Oscillations of bodies," PROCEEDINGS OF THE IEEE, May. 1972.
- (10) CONEL. EFTIMIU & P. L. HUDDLESTON, "The transient responses of finite Open circular cylinders," IEEE vol. AP-32, no. 4, Apr. 1984.

4. 결 론

회전형 완전 도체에 대해 복소 주파수 평면에서 SEM을 이용하여 그 전류 특성 분포 및 pole 점들을 계산하였다. 직선형 완전 도체에 대해 그 전류 특성 분포와 pole 점은 좋은 일치를 보이며, 여기에서 구한 pole 점과 residue 정리를 이용하여 time 영역 해석이 요구된다.



朴 東 熙(Dong Hee PARK) 準會員
1959年 8月 6日生
1985年 2月：清州大學校電子工學科卒業
1985年 3月～現在：中央大學校大學院電
子工學科在學中



李 承 浩(Seung Ho LEE) 正會員
1939年 9月 5日生
1965年 2月：漢陽大學校 工科大學 原子
力工學科 卒業
1977年 9月：漢陽大學校 大學院 電子通
信工學科 卒業
1980年 3月：中央大學校 大學院 電子工
學科 博士過程 入學
1965年 3月～現在：東洋工業專門大學
教授



金 正 祺(Jung Ki KIM) 正會員
1942年 5月 5日生
1965年 2月：延世大學校電氣工學科卒業
1969年 2月：延世大學校大學院電氣工學
科(工學碩士)
1975年 2月：延世大學校大學院電氣工學
科(工學博士)
1970年 3月～1977年 2月：光云工科大學
副教授

1977年 3月～現在：中央大學校電子工學科教授
1982年12月～1983年12月：美코넬大學校客員教授