

# 波動方程式 및 殘留應力에 의한 杭打支持力 推定

Prediction of Pile-Driving Resistance  
by the Wave Equation and Residual Stress

黃 正 奎\*  
Hwang, Jung-Kyn

## Abstract

A great number of different pile-driving formulas are widely used to determine the load-carrying capacity during driving. However, engineers have been unable to agree on any particular pile-driving formula because the mechanisms of pile driving action which involves many complications such as hammer-pile-soil interaction could not be solved completely in any practical manner.

This paper is presented for the purpose of giving field engineers a reliable analytical procedures for the prediction of pile-driving resistance without resort to electronic computers based on the theory of longitudinal wave transmission in conjunction with the wave equation and on the consideration of the effect of residual stresses induced by reversed friction in pile.

## 要 旨

말뚝박기에서 杭打支持力을 推定하기 위하여 수많은 杭打公式이 널리 사용되고 있으나 말뚝의 支持力은 해머-말뚝-地盤土의 복잡한 相互作用에 의하여 변화하기 때문에 어느 公式이 현장조건에 가장 적합한 公式이라 판단하기는 매우 어렵다.

本 研究에서는 波動理論과 말뚝의 殘留應力에 의하여 杭打支持力을 解析하므로써 現場에서 간편하게 推定할 수 있는 信賴度가 높은 算出式을 誘導하여 이를 考察하였다.

式이라 판단하기는 매우 어렵다.

그동안 사용되어온 支持力公式들은 衝擊理論을 근거로 한 Hiley 등의 理論式, Gates, Janbu 등의 經驗式, Smith(1962)<sup>2)</sup>, Bowles(1974)<sup>10)</sup> 등이 개발한 波動方程式을 이용한 컴퓨터 프로그램 등이 있어 해머와 말뚝의 時代的 變遷과 地域的인 特殊性에 따라 자기 적절하게 사용되어 왔다. 이 중에서도 근래에 와서 波動方程式에 의

## 1. 序 論

말뚝박기에서 그 支持力을 推定하기 위하여 수많은 公式들이 제안되고 있으나 해머-말뚝-흙의 복잡한 相互作用이 말뚝박기 條件의 변동에 따라 支持力에 민감하게 影響을 미치기 때문에 주어진 條件에 대하여 어느 것이 가장 적합한 공

\* 正會員, 홍익대학교 토목공학과 조교수.

한 解析方法이 말뚝박기의 精密解析에 널리 활용되고 있으나 대형 컴퓨터를 사용할 수 없는 現場에서는 杭打資料를 이용하여 柱석에서 支持力을 推定할 수 없는 暇이 있다.

그리고 최근 말뚝의 殘留應力에 대하여 Holloway(1975)<sup>11)</sup>, Sandhu(1982)<sup>13)</sup>, Briaud(1984)<sup>14)</sup> 등이 그 重要性을 인식하게 되었으나 아직 말뚝의 設計 및 杭打解析에 적용되기에는 미흡한 단계에 있다.

本 研究에서는 말뚝의 殘留應力을 고려한 杭打支持力을 波動方程式의 개념으로 解析하여 비교적 信賴度가 높은 간편한 算出式을 導出하고 이를 考察하고자 한다.

## 2. 波動方程式의 應用

均質 等斷面의 彈性棒에 衝擊波가 傳播될 때의 波動方程式<sup>9)</sup>은 式(1)과 같다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

여기에서  $u$ : 彈性棒의 衝擊面에서  $x$ 의 거리에 위치한 要素의 軸方向變位,  $t$ : 時間間隔,  $E$ : 彈性係數,  $\rho$ : 質量密度이다. 따라서 彈性波의 傳播速度  $c$ 는 式(2)와 같으며,

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2)$$

이 때에 斷面에 작용하는 應力을  $\sigma$ 라고 하면 그 質點速度  $v$ 는 式(3)과 같고,

$$v = \frac{\sigma}{\sqrt{E \cdot \rho}} \quad (3)$$

또 棒의 길이가  $L$ 일 때 衝擊波의 前端이 棒의 끝에 도달하는 時間  $T$ 는 式(4)와 같이 된다.

$$T = \frac{L}{c} \quad (4)$$

지금, 均質·等斷面이며 同質·同形의 길이가 다른 두개의 彈性棒  $a$  및  $b$ 가 있어, Fig. 1. (1)과 같이  $a$ 가  $v$ 의 速度로 정지하고 있는  $b$ 에 접근하여 軸方向으로 打擊하였다면, 이로 인한 壓縮應力波는  $c$ 의 速度로 접촉면  $m-n$ 을 출발하여 Fig. 1(2)와 같이 각각  $a, b$ 의 다른 끝을 향하여 진행한다. 이때에 壓縮波 前端의 質點速度  $v_x$  및 그 단면의 應力  $\sigma_x$ 는 彈性棒自體 및 그 周面に 應力波를 減衰시킬 요인이 없는 것으로

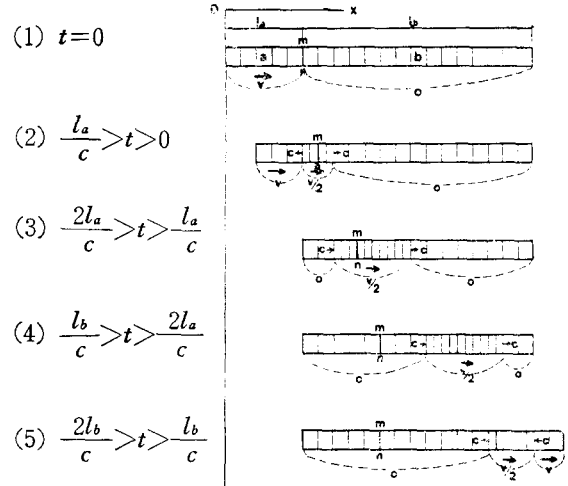


Fig. 1 Wave Propagation in Elastic Rods

가정한다면  $v_x = v/2$  및  $\sigma_x = (v/2)\sqrt{E \cdot \rho}$ 이다. 그 다음 壓縮波의 前端이  $a$ 의 끝에 도달하면 彈性棒이 伸長되면서 Fig. 1(3)과 같이 引張波로 反射되어  $c$ 의 전파속도로 되돌아온다. 그러한 후 引張波前端이  $m-n$ 을 통과하면  $a$ 의 전체속도는 0가 되고 Fig. 1(4)와 같이  $b$ 가 연달아 伸長되며, 壓縮波前端이  $b$ 의 끝에 닿으면 Fig. 1(5)와 같이 引張應力波가  $c$ 의 속도로  $m-n$ 을 향하여 되돌아가면서  $b$ 의 끝이  $v$ 의 속도로 伸長되어 引張波前端이  $m-n$ 에 도달할 때에는 결국  $b$ 의 전체속도는  $v$ 가 되므로  $a, b$ 는 速度를 교환하게 된다. 이러한 과정에서는 Fig. 1(3) 및 (4)에서 보는바와 같이 彈性棒의 壓縮部分의 길이(壓縮應力波의 길이)는  $2l_a$ 에 해당된다.

여기에서 말뚝박기解析에 波動理論을 적용하기 위하여 實際狀況을 고려하여 몇가지 假說을 다음과 같이 세우기로 한다.

(1) 해머 및 말뚝은 波動方程式을 적용할 수 있는 彈性體이다.

(2) 해머는 그 무게가 충분히 커서 말뚝머리를 打擊한 후 Newton의 衝擊理論에 의하여 上向으로 反撥하지 않고 下向으로 運動한다.

(3) 應力波의 傳播速度는 地中에 貫入된 부분에서도 自由體의 경우와 同一하다.

(4) 말뚝과 地盤土와의 접촉면에서 일어나는 動的 摩擦係數는 靜的 摩擦係數와 같다.

(5) 應力波前端的 質點速度는 應力波가 진행함에 따라 말뚝 自體 및 그 周面에서 波動에너지를 減衰시키는 여러가지 抵抗力에 의하여 그 應力이 減衰되는 만큼 점차로 減速된다.

(6) 말뚝에서 應力波가 전파하는 동안은 衝擊 후에 일어나는 해머의 下向運動 때문에 말뚝의 伸長은 抑制되어 (Fig. 1. (4)의  $m-n$  쪽의 伸長), 말뚝머리에서 應力波 前端까지의 모든 말뚝단면은 同一한 質點速度를 갖는다.

(7) 壓縮應力波로 인하여 壓縮된 말뚝은 應力波前단이 말뚝끝에 도달한 후에야 上下方向으로 抑制力과 平衡하는 상태에서 伸長된다.

(8) 해머와 말뚝머리는 打撃순간으로부터 應力波前단이 말뚝끝에 도달할 때까지 서로 分離되지 않는다.

말뚝박기에 있어서 램이 말뚝머리를 打撃하던 위와 같은 假定에 의하여 Fig. 2와 같이 壓縮應

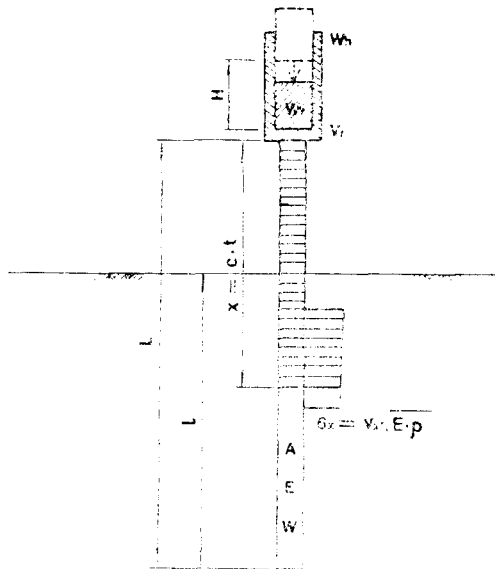


Fig. 2 Stress Wave Propagating in a Pile During Driving

力波의 前단이 말뚝끝을 향하여 진행하여 말뚝머리에서 應力波 前端까지의 모든 斷面을 압축하면서 下向運動을 하고 打撃에서  $t$  시간이 경과한 후의 應力波는 말뚝自體 및 地中에 貫入된 부분의 周面摩擦力的 抵抗 등으로 應力이 차츰 減衰되는 만큼 그 質點速度가 減衰되어 간다.

램의 打撃으로 인한 이때 ( $t=x/c$ )의 運動에 대

하여 運動量 保存則을 적용하면 다음과 같은 式 (5)를 얻는다.

$$\frac{W_r}{g} \cdot V_r = \left( \frac{W_h}{g} + \int_0^{x/c} \rho \cdot A \cdot c \cdot dt \right) v_x + \left( \text{波動減衰抵抗力에 의한 } x/c \text{ 시간 동안의 力積} \right) \quad (5)$$

여기서  $W_r$ : 램의 무게,  $V_r$ : 램의 衝擊速度,  $A$ : 말뚝의 斷面積,  $W_h$ : 해머의 무게,  $g$ : 重力加速度,  $\rho$ : 말뚝의 密度,  $v_x$ : 말뚝머리에서  $x$ 의 거리에 있는 말뚝단면의 質點速度이다.

### 3. 殘留應力

해머의 衝擊으로 인한 應力波가 말뚝머리에서 下向으로 전파하여 말뚝의 각 斷面을 차례로 압축하면서 통과할 때에 地中에 관입된 부분에서 말뚝의 周面은 地盤土의 摩擦抵抗을 받게 되며, 일단 應力波가 말뚝끝에 닿은 후에는 말뚝은 원형대로 上·下方向으로 伸長하려고 한다. 그러나 이때에 또다시 말뚝은 周面摩擦 및 先端支持로 인하여 伸長은 억제되어 말뚝의 내부에는 壓縮應力이 殘留하게 된다. 이것을 말뚝의 殘留應力<sup>13)14)</sup>이라 하며, 말뚝이 打撃될 때마다 누적되어 그 抑制하는 抵抗力이 클수록 殘留應力은 커지며, 그 分布상태의 一例는 Fig. 3<sup>14)</sup>과 같고, 그 測定方法<sup>14)</sup>은 말뚝의 載荷試驗에서 應力分布를 측정하기 위한 스트레인 게이지를 이용하여 試驗말뚝을 박기전에 計器의 눈금을 原點으로 놓고 말뚝박기 완료후에 변형을 읽음으로써 측정

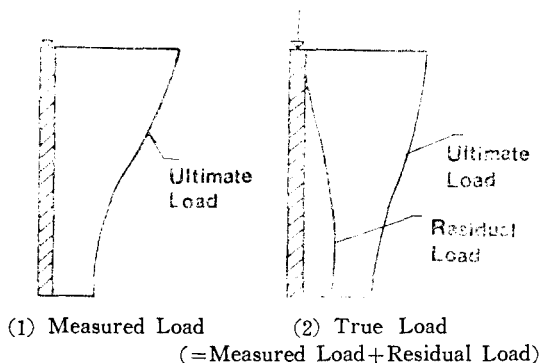


Fig. 3 Difference between Measured Load and True Load in Conventional Load Test

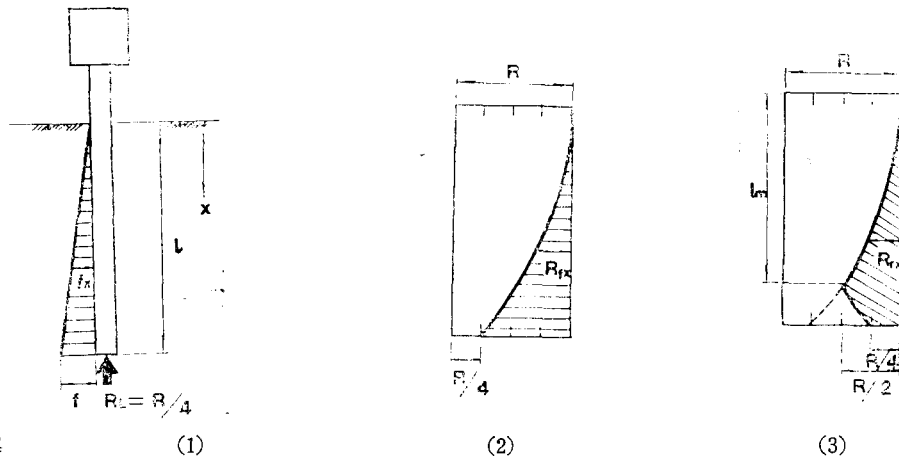
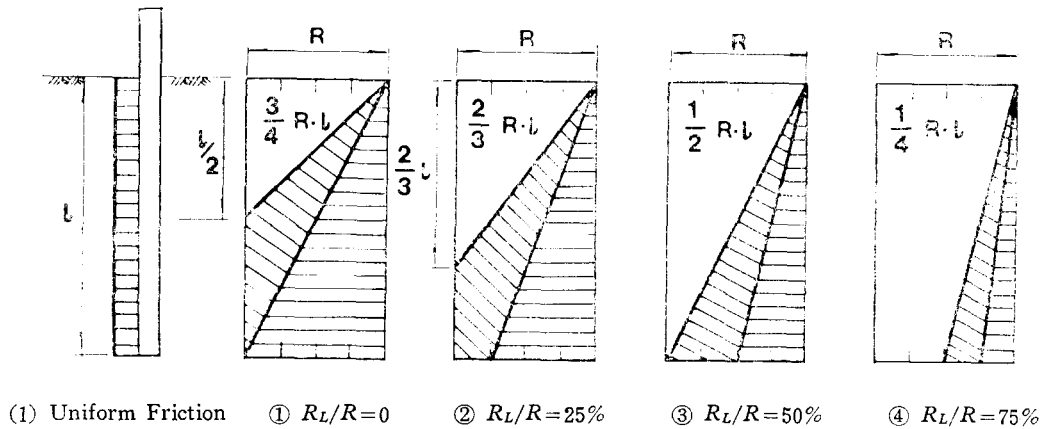
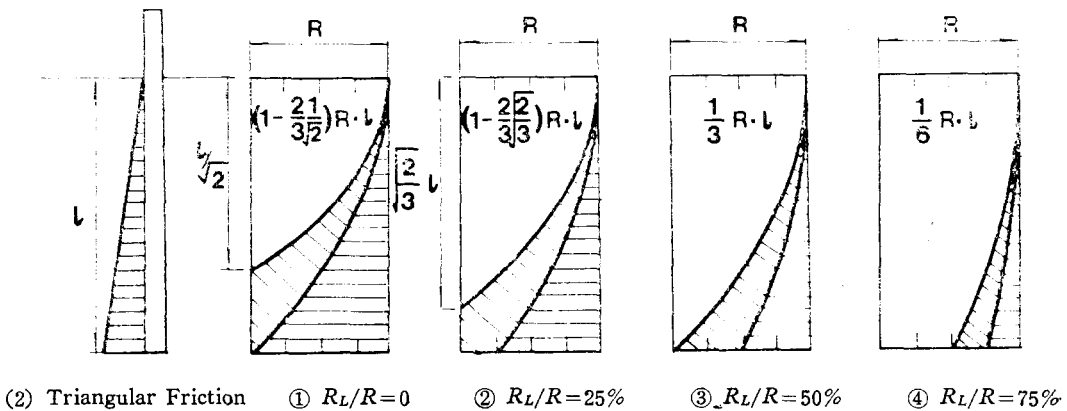


Fig. 4 (1) Pile with 25% Tip Resistance and 75% Triangular Friction (2) Distribution of Frictional Resistance in Pile during Driving (3) Distribution of Residual Resistance in Pile during Driving



(1) Uniform Friction ①  $R_L/R=0$  ②  $R_L/R=25\%$  ③  $R_L/R=50\%$  ④  $R_L/R=75\%$



(2) Triangular Friction ①  $R_L/R=0$  ②  $R_L/R=25\%$  ③  $R_L/R=50\%$  ④  $R_L/R=75\%$

Fig. 5 Distribution of Frictional Resistance plus Residual Resistance in Pile during Driving.

이 가능하다.

지금까지 말뚝의 殘留應力은 載荷試驗에서 實測에 의하여 推定하여 왔으며, 그 값을 산출하는 방법은 알려져 있지 않고 있다.<sup>14)</sup>

여기에서 殘留應力을 산출하는 방법을 생각해 보면 다음과 같다. 殘留應力의 크기는 周面摩擦力 및 先端支持力의 크기에 따라 말뚝의 伸長이 억제되는 平衡상태에서 결정될 것이므로, 계산의 복잡성을 피하기 위하여 周面摩擦力이 等分布하는 경우 및 三角分布하는 경우로 나누고, 말뚝의 支持力에 대한 先端支持力의 비율(이하 先端支持力比라 함)이 0, 25, 50, 75 및 100%인 경우로 나누어 생각하기로 한다. 일반적으로 말뚝의 周面摩擦力은 非粘着性土의 경우에는 貫入깊이에 따라 等比로 증가하는 三角分布이며, 粘着性土에서는 等分布하는 것으로 간주되고 있다.

예컨대 非粘着性土의 地盤에 관입되고 있는 말뚝에서 그때의 杭打支持力  $R$ 에 대한 先端支持力  $R_L$ 의 비율  $R_L/R$ (先端支持力比)이 25%인 경우(Fig. 4(1) 참조)에 있어 殘留應力의 산출방법을 보기로 제시한다.

Fig. 4(1)에서 말뚝끝 및 관입깊이  $x$ 점의 단위길이당 摩擦力을  $f$  및  $f_x$ 라 하면, 각각 式(6) 및 式(7)과 같이 되므로

$$f = \frac{3R}{2l} \quad (6)$$

$$f_x = \frac{3R}{2l^2} \cdot x \quad (7)$$

$x$ 점의 摩擦抵抗力  $R_{f_x}$ 는 式(8)과 같고, 이를 作圖하면 Fig. 4(2)와 같다.

$$R_{f_x} = \int_0^x \frac{3R}{2l^2} \cdot x \cdot dx \quad (0 \leq x \leq l) \quad (8)$$

$x$ 점의 殘留應力  $R_{r_x}$ 는 관입깊이가 증가함에 따라 摩擦抵抗力과 같이 증가하므로 말뚝머리에서 抑制力이 平衡을 이루는 點  $l_m$ 까지는 式(9)와 같고,

$$R_{r_x} = \int_0^x \frac{3R}{2l^2} \cdot x \cdot dx \quad (0 \leq x \leq l_m) \quad (9)$$

點  $l_m$ 에서는 上部摩擦力과 下部摩擦力 및 先端支持力이 平衡을 이룰 것이므로, 上下抑制力の 平衡條件은 式(10)과 같고, 따라서  $l_m$ 는 式(11)과 같이 된다.

$$\int_0^{l_m} \frac{3R}{2l^2} \cdot x \cdot dx - \int_{l_m}^l \frac{3R}{2l^2} \cdot x \cdot dx - \frac{R}{4} = 0 \quad (10)$$

$$l_m = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot l \quad (11)$$

平衡點  $l_m$ 의 殘留應力은 式(11)을 式(9)에 代入하여  $R_{r_x} = R/2$ 을 얻으며 平衡點으로부터 말뚝끝까지의 殘留應力은 式(12)로 표시될 수 있다.

$$R_{r_x} = \int_x^l \frac{3R}{2l^2} \cdot x \cdot dx + \frac{R}{4} \quad (l_m \leq x \leq l) \quad (12)$$

이들 式(9), (11), (12)등을 作圖하면 Fig. 4(3)과 같다.

같은 방법으로 等分布 摩擦力 및 三角分布 摩擦力의 각 경우에 先端支持力比가 0, 25, 50, 75, 100%인 말뚝에 대하여 摩擦抵抗力 및 殘留應力을 합쳐서 作圖하면 Fig. 5와 같다.

Fig. 5에서 橫線部分의 面積은 말뚝의 周面摩擦力에 의한 抵抗力이 말뚝에 대하여 한 일이며 斜線部分의 面積은 말뚝의 殘留應力에 의한 抵抗力이 한 일로서, 각각 應力波가 전파하면서 소실한 에너지의 크기에 해당하며, 두 抵抗力에 의한 合計에너지(橫線部分면적+斜線部分면적)의 크기를 그림 위부분 餘白에 표시하였다.

#### 4. 支持力 解析

램이 말뚝머리를 打擊한 후 壓縮應力波前端이 말뚝끝에 도달하면 말뚝은 伸長되면서 말뚝끝의 質點速度로 地中에 貫入된다. 그러나 말뚝의 관입은 支持力  $R$ 의 抵抗을 받으므로 貫入量  $s$ 에서 정지된다.

이때 해머의 運動에너지는 해머의 效率을  $e_f$ , 해머의 定格에너지를  $E_n$ 라 하면 式(13)과 같이 표시되며,

$$\frac{W_r}{2g} \cdot V_r^2 = e_f \cdot E_n \quad (13)$$

말뚝의 무게를  $W$ 라 하고, 말뚝의 관입에 대하여 에너지 保存則을 적용하면 式(14)과 같이 되므로,

$$\frac{W_h + W}{2g} \cdot v_L^2 = R \cdot s \quad (14)$$

이때의 運動方程式은 말뚝의 길이를  $L$ 이라 하

면 식(5)에 의하여 식(15)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{W_r}{g} \cdot V_r = \left( \frac{W_h}{g} + \int_0^{L/c} \rho \cdot A \cdot c \cdot dt \right) v_L + \left( \text{波動減衰抵抗力에 의한 } L/c \text{ 시간 동안의 力積} \right) \quad (15)$$

식(13)에서 해머의定格에너지  $E_n$ 은 식(16)과 같이 표시된다.<sup>1)</sup>

$$E_n = W_r \cdot H \cdots \cdots (\text{드름해머 또는 單動蒸氣해머})$$

$$E_n = (W_r + p \cdot A_c) H \cdots \cdots (\text{複動 또는 差動蒸氣해머}) \quad (16)$$

$$E_n = 2W_r \cdot H \cdots \cdots (\text{디젤 해머})$$

여기서,  $H$ : 램의 落下高,  $p$ : 蒸氣 또는 空氣壓力,  $A_c$ : 해머 실린더의 斷面積이다.

한편, 식(15)의 波動減衰抵抗力은 말뚝에 작용하는 摩擦抵抗力 및 殘留應力에 의한 抵抗力을 합친 合計抵抗力이며, 이에 의한  $L/c$  시간 동안의 力積은 말뚝의 관입부분의 平均抵抗力과  $L/c$  시간의 相乘積에 해당하므로 Fig. 5에 표시된 合計에너지 消失量으로부터 地中에 관입된 부분의 말뚝길이  $l$ 에 대한 平均抵抗力  $\phi \cdot R$ 을 계산하면, 三角分布 摩擦力을 받는 25%의 先端支持力比인 말뚝의 경우에는  $\phi \cdot R = [1 - (2/3)\sqrt{2/3}] \cdot R$ 로 표시될 수 있다. 여기에서  $\phi$ 는 係數이다. 일반적인 형태로 임의의 地盤土性 및 先端支持力比에 대하여 식(15)의 右邊 제 2항을 표시하면 식(17)과 같다.

(波動減衰抵抗力에 의한  $L/c$  시간

$$\text{동안의 力積}) = \int_0^{L/c} \phi \cdot R \cdot dt \quad (17)$$

그러므로, 식(13), (14), (17)을 식(15)에 代入한 후 식(18)과 같은  $\alpha$  및  $\beta$ 를 代置하여 整理하면 식(19)와 같은  $R$ 의 一元二次方程式을 얻는다.

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= s \cdot \left( \frac{W_h + W}{W_r} \right) \\ \beta &= \phi \cdot l \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{e_f \cdot E_n}{W_r} \cdot \frac{\gamma}{E}} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left( \frac{\beta^2}{4 \cdot e_f \cdot E_n} \right) \cdot R^2 - (\alpha + \beta) \cdot R + e_f \cdot E_n = 0 \quad (19)$$

여기서  $\gamma$ 는 말뚝의 단위체적중량이다.

식(19)에서는  $\beta^2/4e_f \cdot E_n$ 은 微小值이며,  $\alpha + \beta \approx 0$ 이므로, 一元二次方程式의 漸近解法에 따라  $R$ 의 根의 값을 展開하여 제 2항까지 취하면 식

(20)와 같이 나타낼 수 있으며,

$$R = \frac{e_f \cdot E_n}{\alpha + \beta} \cdot \left[ 1 + \left\{ \frac{\beta}{2(\alpha + \beta)} \right\}^2 \right] \quad (20)$$

$\{\beta/2(\alpha + \beta)\}^2$ 이 또한 극히 微小한 값이므로 식(20)은 식(21)로 표시될 수 있다.

$$R = \frac{e_f \cdot E_n}{\alpha + \beta} \quad (21)$$

식(17)에서  $\phi$ 의 값은 地盤의 土性 및 先端支持力比의 변화에 따라 Fig. 5로부터 Table 1과 같이 산출되므로 이를 圖示하면 Fig. 6과 같이 나타낼 수 있으며, 계산의 複雜性을 피하기 위하여 Fig. 6의 굵은 線을 따라 계산하거나, Table 1.의 최종값을 취하여도 實用上 무방할 것이다.

Table 1 Value of  $\phi$

$R_L/R(\%)$	Cohesive Soils ( $\phi_c$ )	Cohesionless Soils ( $\phi_s \approx \frac{2}{3}\phi_c$ )
0	3/4	$1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.53 \rightarrow 1/2$
25	2/3	$1 - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.46 \rightarrow 4/9$
50	1/2	1/3
75	1/4	1/6
100	0	0

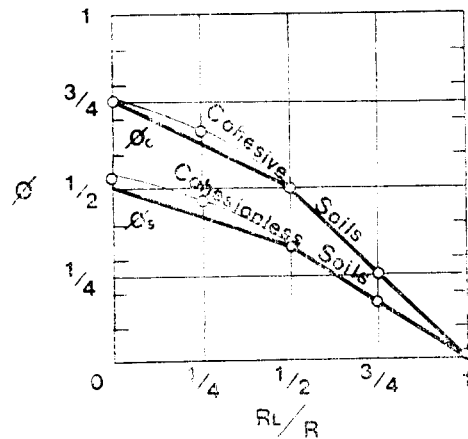


Fig. 6 Value of  $\phi$

따라서 말뚝의 杭打支持力에 대한 算出式은 식(22) 또는 식(23)으로 표시될 수 있다.

$$R = e_f \cdot E_n / \left[ s \left( \frac{W_h + W}{W_r} \right) + \phi \cdot l \sqrt{2 \cdot \frac{e_f \cdot E_n}{W_r} \cdot \frac{\gamma}{E}} \right] \quad (22)$$

$$R = e_f \cdot E_n \cdot W_r / \left[ s(W_h + W) + \phi \cdot L \sqrt{2e_f \cdot E_n \cdot W_r \cdot \frac{\gamma}{E}} \right] \quad (23)$$

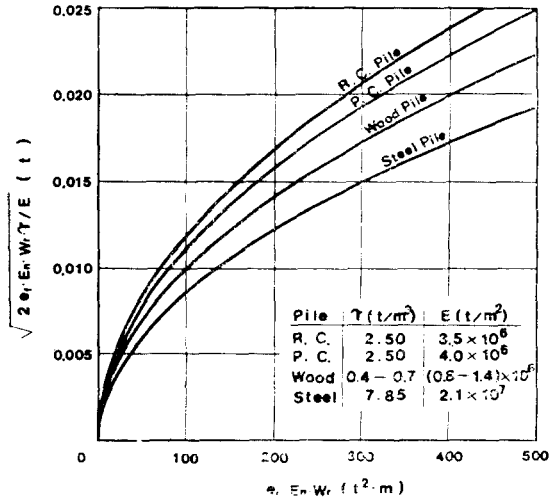


Fig. 7 Value of  $\sqrt{2e_f \cdot E_n \cdot W_r \cdot \gamma / E}$  vs.  $e_f \cdot E_n \cdot W_r$

이들 중식(22)은 Table 2에서 보는 바와 같은 일반적인 형태이고, 식(23)은 해머 제작사의諸元目録에 명시된 해머等級( $\sqrt{E_n \cdot W_r}$ )을 그대로 이용할 수 있는利點이 있다.

계산의 편의를 위해 식(23)의  $\sqrt{2e_f \cdot E_n \cdot W_r \cdot \frac{\gamma}{E}}$ 의 값에 대하여 實用的인 해머等級 범위내에서 말뚝材料별로 圖示하면 Fig. 7과 같다.

## 5. 考 察

### 5.1 變數의 影響

현재 사용되고 있는 杭打支持力公式 중에서 가장 많이 활용되고 그 信賴性을 일반적으로 인정받고 있는 公式들과 式(22)를 비교하여 열거하면 Table 2와 같다.

이중, Hiley, Engineering News, Weisbach 및 Eytelwein 公式 등은 理論式으로서 Newton의 衝

Table 2. Most Reliable Pile-Driving Formulae and Equation(22)

Formula	Driving Resistance R (Unit: cm, kg)	Safety Factor
(1) Hiley	$\frac{e_f \cdot E_n}{s + \frac{1}{2}(c_1 + c_2 + c_3)} \cdot \frac{W_r + W \cdot e^2}{W_r + W}$	3
(2) Engineering News	$\frac{E_n}{s + d} \dots \dots \left( \begin{array}{l} d=2.5 \text{ Drop Hammer} \\ d=0.25 \text{ Steam Hammer} \end{array} \right)$	6
(3) Weisbach	$\frac{A \cdot E}{l_0} \left( -s + \sqrt{s^2 + \frac{2 E_n \cdot l_0}{A \cdot E}} \right)$	3
(4) Eytelwein	$\frac{E_n}{s \left( 1 + \frac{W}{W_r} \right)} \dots \dots$ (Drop Hammer)	6
	$\frac{E_n}{s + 0.25 \frac{W}{W_r}} \dots \dots$ (Steam Hammer)	6
(5) Gates	$126 \sqrt{e_f \cdot E_n} \cdot \log_{10} \left( \frac{25}{s} \right)$	3
(6) Danish	$s + \sqrt{\frac{e_f \cdot E_n \cdot l_0}{2 A \cdot E}}$	3
(7) Janbu	$\frac{E_n}{K \cdot s} \dots \dots \left( \begin{array}{l} K = C_d \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{E_n \cdot l_0}{C_d \cdot s^2 \cdot A \cdot E}} \right) \\ C_d = 0.75 + 0.15 \frac{W}{W_r} \end{array} \right)$	3
(8) Wave Equation	Computer Program	
(9) Equation(22)	$e_f \cdot E_n / \left[ s \left( \frac{W_h + W}{W_r} \right) + \phi \cdot L \sqrt{2 \cdot \frac{e_f \cdot E_n}{W_r} \cdot \frac{\gamma}{E}} \right]$	

Legend  $c_1$ : Elastic Compression of Pile  $c_2$ : Elastic Compression of Cushion  $c_3$ : Elastic Compression of Soil  $e$ : Coefficient of Restitution  $l_0$ : Distance between Pile Head and Resultant Load

擊理論과 에너지保存則에서 유도된 Hiley 式을 기본으로 하여 사용에 편리하게 變數들을 생략 또는 가정한 公式들이며, Gates, Danish 및 Janbu 公式등은 經驗式으로서 말뚝의 載荷試驗 實測值에서 統計的으로 도출하거나 經驗的 假定에 의하여 유도된 公式들이다.

일반적으로 杭打支持力公式의 信賴性은 그 公式의 算出值를 말뚝의 載荷試驗 實測值와 비교하여 統計的으로 分析하므로 판단되는데, 文獻에 의하면 非粘着性土 地盤에서는 Janbu, Danish, Gates, Hiley 및 Weisbach 公式들<sup>3)7)</sup>이 비교적 그 信賴度가 높으며, 粘着性土 地盤에서는 Engineering News 및 Eytelwein 公式등<sup>9)</sup>이 그 信賴度가 높은 것으로 알려져 있다.

한편, 波動方程式에 의한 컴퓨터 프로그램은 해머-말뚝-흙의 복잡한 相互作用을 有限差分法에 의하여 模型化시켜 이를 波動方程式으로 解析한 것으로서, Smith(1962)<sup>2)</sup>, Samson(1963)<sup>4)</sup>, Forehand(1964)<sup>5)</sup>, Lowery(1969)<sup>8)</sup>, Bowles(1974)<sup>10)</sup> 등에 의하여 개발되어 말뚝박기의 精密解析에 많이 활용될 뿐 아니라 현재에도 활발한 研究가 이루어지고 있으며, 杭打支持力 및 打擊應力 등의 推定에 있어서는 어떠한 地盤土性에서나 그 信賴性을 인정받고 있다.

그러면, 말뚝박기에서 일어나는 해머-말뚝-흙의 복잡한 相互作用에서 여러가지 要因들이 杭打支持力의 값에 미치는 영향의 정도를 검토하기 위하여 일정한 말뚝박기 模型을 설정하고 波動方程式에 의한 Bowles(1974)<sup>10)</sup>의 컴퓨터 프로그램을 이용하여 각 入力變數를 實際狀況에 부합되는 범위에서 변화시켜 杭打支持力의 값의 변화를 圖示한 바 Fig.8 과 같다.

Fig.8에서 보는 바와 같이, 杭打支持力에 영향을 가장 크게 미치는 變數는 ① 램의 무게, ② 램의 낙하고, ③ 해머의 효율, ④ 地盤土의 댄핑(Damping), ⑤ 말뚝의 두께(혹은 단면적), ⑥ 先端支持力比, ⑦ 말뚝의 彈性係數 등이며, 中位의 영향을 미치는 變數는 ⑧ 말뚝의 단위 길이 중량 ⑨ 地盤土의 케이크(Quake), ⑩ 쿿손의 반발계수 등이며, 비교적 작게 영향을 미치는 것은 ⑪ 貫入部分의 말뚝길이, ⑫ 쿿손의 스프링상수 등이고, ⑬ 관입되지 않는 말뚝의 길

이, ⑭ 켈의 무게, ⑮ 슈의 무게 등은 거의 무시할 정도의 영향이므로 Fig.8에서 제외되었다. 그리고 最終貫入深度는 해머의 定格에너지 (式(16) 참조)와 함께 가장 큰 영향을 미치는 變數이다.

한편, Table 2의 支持力公式들에 대하여 Fig.8 중에서 주요한 變數를 비교해 보면 Table 3과 같다.

Table 3에서 ①  $E_n$ 은 式(16)과 같으며, ④  $f_x$ 는 말뚝의 周面摩擦抵抗을 나타내고, ⑧  $W/L$ 는 말뚝의 단위 길이 중량으로서  $\gamma = (W/L)/A$ 이므로 말뚝의 단위체적중량  $\gamma$ 는 말뚝의 단위 길이 중량  $W/L$  및 말뚝의 斷面積  $A$ 를 동시에 나타내는 것으로 볼 수 있다. ⑩  $e$ 는 反撥係數로서 式(22)에서는 假定(8)에 의하여  $e=0$ 이며, (4) Eytelwein 및 (7) Janbu의 公式들과 같이 不充分하게나마 反撥係數를 고려한 것으로 판단된다. 그리고 ⑨  $Q$ 는 地盤土의 케이크이며, ⑫  $K_c$ 는 쿿손의 스프링常數이다.

Table 2 및 3에서 보는 바와 같이, 式(22)는 다른 代表的인 公式들과 같이 그 형태가 간단하면서도, Wave Equation Program에 이어 支持力에 가장 크게 影響을 미치는 變數들(Table 3.의 ①  $E_n \sim ⑦ E$ )이 充分히 고려되어 있으므로 주요한 變數의 構成이 Wave Equation Program과 유사하여 杭打支持力에 큰 影響을 미치는 要因의 변화에 대하여 Wave Equation Program과 같은 경향의 應答을 나타낼 가능성이 있는 算出式으로 판단된다. 따라서 대형 컴퓨터를 사용할 수 없는 現場에서 杭打資料를 이용하여 즉석에서 Wave Equation Program에 준하는 支持力을 推定할 수 있을 것으로 기대된다.

## 5.2 統計的 分析

杭打支持力公式에 대한 信賴性은 일반적으로 그 公式의 算出值를 말뚝의 載荷試驗 實測值와 비교하여 統計的으로 分析하여 標準偏差, 安全率, 相關係數, 回歸係數 등을 평가하는 것으로 판단된다.<sup>7)</sup>

公式의 算出值를  $R$ , 載荷試驗 實測值를  $R_s$ , 許容支持力을  $R_a$ , 安全率을  $F$ 라 하면, 일반적으로 載荷試驗 實測值는 載荷重에 대한 말뚝의



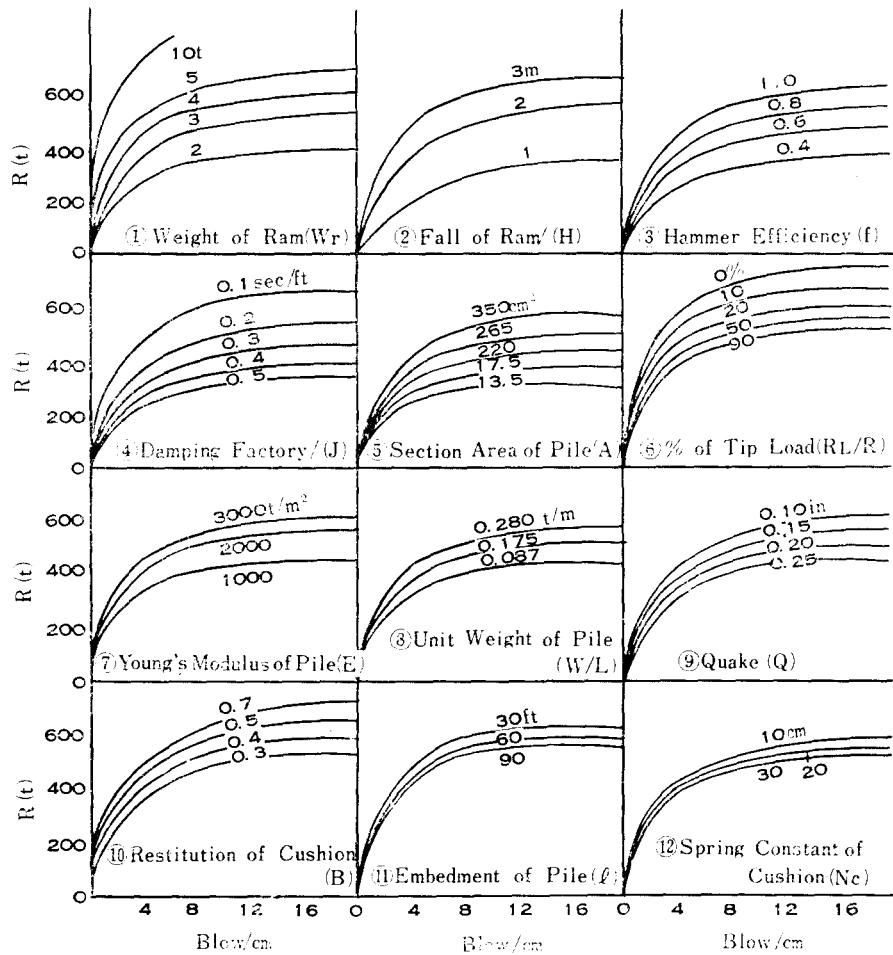


Fig. 8 Effects of Input Parameters of Wave Equation Computer Program on Pile-Driving Resistance

Table 3 Comparison of Parameters accounted for

Formula	① $E_n$	② $s$	③ $e_f$	④ $f_x$	⑤ $A$	⑥ $R_L/R$	⑦ $E$	⑧ $W/L$	⑨ $Q$	⑩ $e$	⑪ $l$	⑫ $k_c$
(1) Hiley	○	○	○				△	△	△	○	△	△
(2) Engineering News	○	○										
(3) Weisbach	○	○			○		○				○	
(4) Eytelwein	○	○						△		△		
(5) Gates	○	○	○				△		△			
(6) Danish	○	○	○		○		○				○	
(7) Jan bu	○	○			○		○	△		△	○	
(8) Wave Eq. Program	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
(9) Equation(22)	○	○	○	○	△	○	○	△		△	○	

Legend (○).....Parameter accounted for. Blank Space...Parameter not accounted for.  
 (△).....Parameter unsatisfactorily accounted for

降伏支持力에 해당되므로  $R_a = R_t/2 = R/F$  이 되고, 따라서 安全率下는 式(24)와 같이 표시된다.

$$F = 2 \cdot \frac{R}{R_t} \quad (24)$$

그리고,  $N$  개의 말뚝에 대하여  $\phi_i = R_i/R_{ti}$  라 두면,  $\phi$  의 平均值  $\bar{\phi}$ , 標準偏差  $\sigma_\phi$ , 信賴度 95% 의 安全率  $F$  는 각각 式(25), (26), (27)과 같이 표시되며,

$$\bar{\phi} = \frac{1}{N} \sum \phi_i \quad (25)$$

$$\sigma_\phi = \sqrt{\frac{\sum (\phi_i^2) - \frac{1}{N} (\sum \phi_i)^2}{N-1}} \quad (26)$$

$$F = 2(\bar{\phi} + 2\sigma_\phi) \quad (27)$$

算出值의 實測值에 대한 相關係數  $C_c$ , 回歸係數  $A$  및 截片  $B$  는 각각 式(28), (29), (30)으로 표시될 수 있다.

$$C_c = \frac{\frac{1}{N} \sum (R_{ti} \cdot R_i) - \bar{R}_t \cdot \bar{R}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum (R_{ti})^2 - (\bar{R}_t)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{N} \sum (R_i)^2 - (\bar{R})^2}} \quad (28)$$

$$A = \frac{\frac{1}{N} \sum (R_{ti} \cdot R_i) - \bar{R}_t \cdot \bar{R}}{\frac{1}{N} \sum (R_{ti})^2 - (\bar{R}_t)^2} \quad (29)$$

$$B = \bar{R} - A \cdot \bar{R}_t \quad (30)$$

式(22)를 統計的으로 평가하기 위하여 載荷試驗 및 杭打資料를 文獻中에서 非粘着性土에 關入된 摩擦말뚝을 선정하여, 式(22)의 算出值를 載荷試驗 實測值와 대비한 點散圖를 Fig. 9에 圖示하고 그 回歸線을 명시하였으며, Table 2의 公式들에 대한 標準偏差, 安全率, 相關係數, 回歸係數 및 截片을 Table 4에서 비교하였다.

Table 4에서 보는 바와 같이, 標準偏差는 Hiley, Gates, Wave Equation, 式(22), Janbu 및 Danish 公式 등이 매우 작으며, 安全率은 Hiley, 式(22) Gates, Wave Equation, Janbu 및 Danish 公式 등이 비교적 작고, 相關係數는 全公式이 모두 매우 크며, 回歸線은 Janbu, 式(22), Wave Equation 및 Danish 公式 등이 매우 양호한 편이다. 이상을 종합하면 Table 2의 公式 중에서 Janbu, Wave Equation Program, 式(22) 및 Danish 公式 등이 비교적 그 信賴度가 높은 것으로 평가될 수 있다.

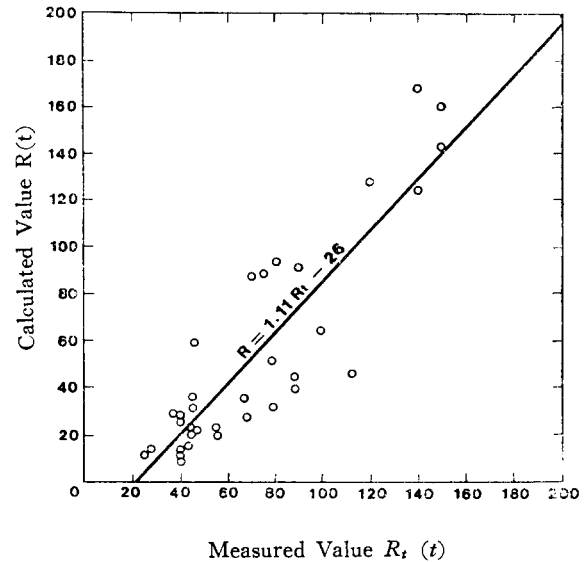


Fig. 9 Relationships between Calculated and Measured Capacities for Equation (22)

Table 4 Comparison of Statistical Values

Formula	$\sigma_\phi$	$F$	$C_c$	$A$	$B$
(1) Hiley	0.22	2.60	0.86	0.56	19
(2) Engineering News	1.40	11.00	0.85	4.75	-120
(3) Weisbach	0.49	5.58	0.85	1.40	26
(4) Eytelwein	1.12	9.68	0.87	3.93	-77
(5) Gates	0.26	3.01	0.85	0.61	20
(6) Danish	0.34	3.77	0.85	1.15	4
(7) Janbu	0.32	3.49	0.85	0.92	12
(8) Wave Equation	0.32	3.20	0.87	0.88	6
(9) Equation(22)	0.32	2.62	0.88	1.11	-26

한편, Engineering News 및 Eytelwein 公式 등의 信賴性이 매우 낮은 것으로 나타난 것은 統計資料가 非粘着性土에 關入된 摩擦말뚝을 選定한 결과로서 다른 文獻<sup>27)</sup>의 報告와 一致되는 結果인 것으로 판단된다.

## 6. 結 論

本 研究의 結果로 다음과 같은 結論을 얻을 수 있다.

(1) 波動方程式 및 말뚝의 殘留應力에 의하여 解析된 杭打支持力 算出式은 그 형태가 간단하며, Wave Equation Program에서 杭打支持力

에 가장 크게 영향을 미치는 變數들이 充分히 考慮되어 있으므로 말뚝박기에서 杭打支持力을 결정하는 주요한 要因의 변화에 대하여 Wave Equation Program 과 같은 경향의 應答을 나타낼 것이 예측된다. 따라서 대형 컴퓨터를 사용할 수 없는 現場에서 杭打資料를 이용하여 試験에서 Wave Equation Program 에 준하는 杭打支持力을 推定할 수 있을 것으로 기대된다.

(2) 本算出式을 非粘着性土에 關입된 摩擦말뚝에 대하여 統計的으로 評價한 결과 Wave Equation Program, Janbu 및 Danish 公式 등과 같이 매우 높은 水準의 信賴性을 갖는 것으로 판단된다.

그러나 粘着性土에 關입된 말뚝이나 支持말뚝의 경우에 있어서 本算出式的 信賴性을 檢定하는 것은 將次的 研究課題이다.

#### 參 考 文 獻

- 1) Chellis, R.D.: Pile Foundation, McGraw-Hill, 1961, pp. 28~33, 503~648.
- 2) Smith, E.A.L.: Pile Driving Analysis by the Wave Equation, Trans. No. 3306, Vol. 127, Part 1, ASCE, 1962, pp. 1145~1193.
- 3) Agershou, H.A.: Analysis of the Engineering News Pile Formula, Journ. of SMFD, ASCE, 88, SM5, 1962, pp. 1~11.
- 4) Samson, S.H., Hirsch, T.J. & Lowery, L.L.: Computer Study of Dynamic Behavior of Piling, Journ. of Structural Div., ASCE, Vol. 89, ST4, 1963, pp. 413~449.
- 5) Forehand, P.W. & Leese, J.L.: Prediction of Pile Capacity by the Wave Equation, Journ. of SMFD, ASCE, Vol. 90, SM2, 1964, pp. 1~25.
- 6) Housel, W.S.: Pile Load Capacity-Estimates and Test Results, Journ. of SMFD, ASCE, Vol. 92, SM4, 1966, pp. 1~30.
- 7) Olsen, R.E. & Flaate, K.S.: Pile-Driving Formulas for Friction Pile in Sands, Journ. of SMFD, ASCE, Vol. 93, SM6, 1967, pp. 279~296.
- 8) Lowery, L.L., Hirsch, T.J., Edward, T.C., Coyle, H.M. & Samson, C.H.: Use of Wave Equation to Predict Soil Resistance on a Pile During Driving, Session No. 8, 7th ICSMFE, Mexico, 1969.
- 9) Timoshenko, S.P. & Goodier, J.N.: Theory of Elasticity, McGraw-Hill, 3rd ed. 1970, pp. 485~504.
- 10) Bowles, J.E.: Analytical and Computer Methods in Foundation Engineering, McGraw-Hill, 1974, pp. 349~387.
- 11) Holloway, D.M. Clough, G.W. & Vesic, A.S.: The Mechanics of Pile-Soil Interaction in Cohesionless Soil, Duke Univ., School of Eng., Soil Mechs., Series No. 39, 1975.
- 12) Poulos, H.G. & Davis, E.H.: Pile Foundation Analysis and Design, John-Wiley, 1980, pp. 52~70.
- 13) Sandhu, B.S.: Predicting Driving Stresses in Piles, Journ. of Const. Div., ASCE, 108, CO4, 1982, pp. 485~503.
- 14) Briaud, J.L. & Tucker, L.M.: Residual Stresses in Piles and the Wave Equation, Analysis and Design of Pile Foundations, Proc. of a Symposium Sponsored by the ASCE, San Francisco, Cal. Oct. 1~5, 1984, pp. 119~137.