

有限要素法을 利用한 코오드 - 고무 複合板의 動的特性에 關한 研究

A Study on the Dynamic Characteristics of the Cord-Rubber Laminates
Rectangular Plate by Finite Element Method

金 斗 萬* 金 恒 旭**
Doo Man Kim Hang Wook Kim

ABSTRACT

There has been considerable interest over the last twenty years in the subject of the elastic properties of the cord-rubber laminates. This has been due to the rather intensive study of the composites materials characteristics brought about by the increased use of rigid composites in many structural applications.

The object of this study is to obtain the natural frequencies and modes of the simply supported cord-rubber laminate plates prior to the study on the analysis of the dynamic properties of the pneumatic tire.

To obtain these natural frequencies and modes, the 12 degrees of freedom orthotropic rectangular plate finite elements are developed. By using the classical lamination theory, the stress-strain relations are represented.

The governing equation for the finite element is derived by energy method.

To find the natural frequencies and modes, the eigenvalues and corresponding eigenvectors are computed by the well known Jacobi power method.

In order to verify the capability of this present finite element, the results of the specially orthotropic plate and the angle-ply laminate plate are compared with the analytical solution. The analytical and numerical results are in good agreement.

The following problems of the simply supported plate are analyzed by the present finite element.

- a) The natural frequencies and mode shapes of the cord-rubber laminate plate for various aspect ratio.
- b) The natural frequencies and mode shapes of the orthotropic plate with the rectangular hole in its center.

* 檀國大學校 大學院 機械工學科

** 韓國航空大學 航空機械工學科

記號說明

1. 緒論

a, b	: 要素의 길이
AL, BL	: 構造物의 길이
$[A]$: 擴張剛性 매트릭스
$[B]$: 커플링剛性 매트릭스
c	: 內部구멍의 길이
$[D]$: 굽힘剛性 매트릭스
E_1, E_2	: 主應力方向의 彈性係數
E_c, G_c, ν_c	: 코오드의 彈性係數, 剪斷彈性係數, 프와송의 비
E_r, G_r, ν_r	: 고무의 彈性係數, 剪斷彈性係數, 프와송비
f_i	: 形狀函數
G_{12}	: 主應力方向의 剪斷彈性係數
h	: 板의 두께
$[K]$: 系全體의 剛性 매트릭스
m	: 質量
M_x, M_y, M_{xy}	: 單位길이당의 모우먼트
$[M]$: 系全體의 質量매트릭스
N_x, N_y, N_{xy}	: 單位길이당의 힘
q	: 플라이數
$[Q], [\bar{Q}]$: 減少剛性 매트릭스
t	: 時間
T	: 運動에너지
$[T]$: 變換 매트릭스
u, v, w	: x, y, z 方向의 變位
U	: 變形 에너지
V_c	: 코오드의 體積化
V_R	: 고무의 體積化
x, y, z	: 直交座標
X_m, Y_m	: 形狀函數
z_k	: 全體要素의 中立面으로부터 k 번째 要素의 中立面까지의 거리
θ	: 코오드 각 (deg)
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}$: 任意點에서의 變形率
$\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \epsilon_{xy}^0$: 中立面에서의 變形率
$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$: 中立面에서의 曲率
ν_{12}	: 複合材料의 프와송비
$\sigma_n, \sigma_y, \tau_{xy}$: 任意方向의 應力
$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}$: 主應力

最近 航空機나 宇宙飛行體에 複合材料의 使用이 날로 增加하고 있다. 더욱이 타이어는 일찌기 複合材料에 의해 製造되어 왔지만 動的特性이 線形特性和 非線形 特性으로 組合되어 있으므로 工學的인 解析이 어려웠기 때문에 다른 部問의 構造物에 比하여 아주 뒤떨어져 있으며 動的特性 解析의 시작이 1960年代末에 비롯되어 現在에 이르러 自動車의 高級化 및 高速化가 되면서 타이어의 動的特性 解析의 必要性이 더욱 절실해 진 것이다.

有限要素法에 의한 工學的 解析과 設計가 여러 方面에서 多樣하게 適用되어 왔지만 타이어와 같은 複雜한 構造物의 適用⁽¹⁾에 대해서는 매우 뒤늦게 시작되었으며 아직도 그 適用例⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾가 드물다. 레이디얼 타이어는 코오드-고무 複合材料로 되어있는데 本研究는 有限要素法에 의해 레이디얼 타이어의 振動特性을 解析하기 위한 先行研究으로써 네변이 단순 支持된 고무-코오드 複合板의 動的特性을 解析하였다.

1960年代末에 이르러 시작된 코오드-고무 複合材料의 特性에 關한 研究⁽⁵⁾는 最近에 이르기까지 꾸준히 研究⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾⁽¹²⁾되고 있다. 코오드-고무 複合材料의 動的特性 研究에 對한 어려운 점으로는 補強코오드와 고무 매트릭스 사이의 彈性係數의 크기 差異가 $10^3 \sim 10^4$ 차수의 큰 差가 있으며, 補強 코오드의 荷重에 의한 變形特性이 코오드각에 따라 코오드가 引張되어지기도 하고 壓縮되어 지기도 하므로 이에 따른 각 경우의 값이 상당한 差異를 보이고 있는 점 等이다.

코오드-고무 複合材料의 機械的 特性 關係式으로는 Halpin-Tsai 식⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾, Gough-Tangorra 식⁽¹⁵⁾, Akasaka-Hirano 식⁽¹⁶⁾ 및 Clark 식⁽⁹⁾ 등이 發表되어 있다. 本研究에서는 지금까지 가장 널리 使用되어지고 있는 Halpin-Tsai 式을 利用하였으며 코오드-고무 複合材料가 非均質 異方性 (inhomogeneous anisotropic) 材料로 取扱되기 위한 3次元有

限要素가 必要하지만 이를 위하여서는 解析 모델 크기가 너무 커지고 컴퓨터 計算時間이 많이 所要되므로 均質直交 異方性 (homogeneous orthotropic) 材料로 近似化하여 均質直交 異方性 材料에 對한 Jones의 複合材料力學理論에 따라 解析하였다. 本 研究에 利用된 有限要素는 四角形 要素이며 하나의 節點에 3個의 自由度를 指定하여 한 要素에 12 自由度가 되게 하였다.

그리고 本 有限要素의 正確性을 立證하기 위하여 네변이 單純支持된 特殊 直交 異方性 複合板의 固有振動數와 振動모우드를 구하여 解析解와 比較하였다. 그리고 6 angle-ply 코오드-고무複合板의 경우 剪斷에 의한 커플링을 피하기 위해 코오드의 각을 53°로 하였을 때의 固有振動數를 Jones의 解析解와 比較한 結果 아주 잘 一致하였다. 또한 要素의 增加에 따른 正確解를 判定하기 위해 要素수를 16個, 25個 및 49個 등으로 分割하여 計算한 結果 要素數를 增加시킴에 따라 正確解와 아주 接近하고 있으나 컴퓨터 計算時間을 고려하여 要素數는 25個로 하였다. 本 有限要素를 利用하여 네변이 單純支持된 四角板에 對해 다음과 같은 振動特性을 解析하였다.

2. 直交 異方性 複合板 有限要素

本 研究에서는 포텐셜 에너지式을 利用하여 有限要素式을 誘導하기 위해 다음과 같은 假定을 하였다.

- (1) 코오드-고무 複合板은 直交異方性이다.
- (2) 板의 두께는 一定하고, 가로 및 세로의 길이에 비해 아주 적다.
- (3) Kirchhoff-Love의 假定이 成立한다.
- (4) 構造物은 一般的인 후크의 法則을 따른다.

2-1 有限要素의 幾何學的 形態와 節點의 自由度

本 研究에 使用된 直交 異方性 複合板 有限要素는 그림 1과 같으며 節點의 自由度는 變位 w 와 w 의 一次 導函數 w_x 및 w_y 로 하였으므로 따라서 한 要素의 自由度는 12 自由度가 되게 하였다.

2-2 內部 變位 蒸數

內部變位 函數 $w(x,y,t)$ 는 다음 式과 같다.

$$w(x,y,t) = W(x,y)e^{j\omega t}$$

$$W(x,y) = f_i(x,y) \Delta_i \dots\dots\dots (1)$$

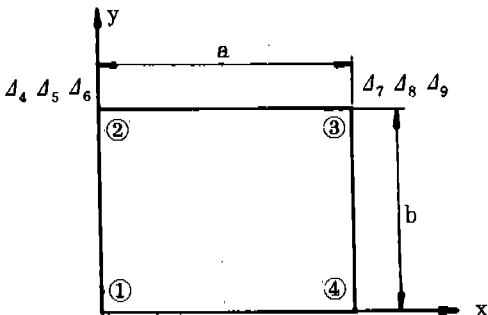
$$f_i(x,y) = X_m(x) Y_n(y)$$

단, 여기서 X_m, Y_n 은 形狀函數로서 4次의 Hermitian 多項式으로 表示되며 첨자 i, m, n 의 關係는 다음 表 1과 같다.

Table. 1 Relations among the suffixes i, m and n of equation(1)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m	1	2	1	1	2	1	3	4	3	3	4	3
n	1	1	2	3	3	4	3	3	4	1	1	2

式(1)에서 內部變位 函數가 表 1의 關係를 만족하면 모든 要素의 네 節點에서의 境界條件을 만족할 뿐만 아니라, 要素사이의 네변상의 幾何學的 相應性 또한 만족한다.



$$\Delta_1 = w$$

$$\Delta_2 = w_x$$

$$\Delta_3 = w_y$$

$$\Delta_{10} \Delta_{11} \Delta_{12}$$

Fig. 1 Rectangular plate finite element

2-3 變形率-變位關係式

Kirchhoff-Love의 假定에 따라 $r_{xz} = r_{yz} = \epsilon_z = 0$ 인 境遇, 板의 一般的인 變形率-變位 關係式은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z \end{aligned} \quad (2)$$

$$r_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z$$

板의 橫振動을 구하는 問題에서 x 및 y 方向의 變位 u, v 를 無視하면 變形率은

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \\ \epsilon_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z \end{aligned} \quad (3)$$

$$r_{xy} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z$$

이다.

中立面에서의 變形率은

$$\begin{aligned} \epsilon_z^0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \epsilon_y^0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$r_{xy}^0 = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$$

이고, 中立面에서의 曲率은

$$\begin{aligned} \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

이므로, 任意의 점에서 變形率은 式(4)와 (5)

를 式(3)에 代入하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_x^0 + z\kappa_x \\ \epsilon_y &= \epsilon_y^0 + z\kappa_y \\ r_{xy} &= r_{xy}^0 + z\kappa_{xy} \end{aligned} \quad (6)$$

3. 直交異方性 材料의 應力-變形率 關係式

3-1 코오드-고무 複合材料의 機械的 特性

코오드-고무 複合材料의 彈性係數를 구하기 위해서는 實驗的인 方法과 理論的인 方法으로 크게 分類되는데, 實驗的인 方法은 一定한 方向으로 外力을 가하여 코오드에 引張力이 作用하는 경우와 壓縮力이 作用하는 경우로 나누어 引張試驗機를 作用하여 主로 가로 세로 方向의 彈性係數를 구할 수 있으며 理論的인 방법은 다음의 여러 수식들이 利用되고 있다.

Gough-Tangorra⁽¹⁵⁾는 고무매트릭스를 非壓縮性으로 取扱하고 코오드는 코오드 길이 方向으로만 荷重을 傳達하는 特性을 갖는 것으로 假定하여 수식을 誘導하였으며 Akasaka-Hirano⁽¹⁶⁾는 Gough-Tangorra식을 修正한 것으로 코오드의 體積이 全體積에 비해 대단히 작은 경우의 코오드-고무系에 對해 코오드는 E_1 의 값에만 影響을 주며 고무는 E_2 의 값에만 影響을 주는 것으로 假定하여 關係式을 展開하였다. 그리고 Clark⁽⁹⁾는 코오드가 剪斷彈性 係數나 프와송 값에 어떻게 影響을 미치는가에 關한 자세한 機械的 特性을 要求하지 않고 에너지 方法을 利用하여 Halpin-Tsai 식⁽¹³⁾에 接近시키코자 시도하여 Gough-Tangorra 식에서 보다 더욱 正確한 關係式을 얻었다.

現在 가장 널리 利用되는 複合材料의 彈性係數 關係式으로는 Halpin-Tsai 식⁽¹³⁾으로 이는 Hill⁽¹⁴⁾에 의해 연구된 "Self-consistent micromechanics"를 利用하여 彈性的인 數式들을 간결한 형태로 表現한 것으로 다음

과 같다.

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_c V_c + E_r (1 - V_c) \\
 E_2 &= [E_r \{ E_c (1 + \xi_1 V_c) + \xi_1 E_r (1 - V_c) \}] / \{ E_c (1 - V_c) + \xi_1 E_r (1 + V_c / \xi_1) \} \\
 \nu_{12} &= \nu_c V_c + \nu_r (1 - V_c) \dots\dots\dots (7) \\
 \nu_{21} &= \nu_{12} E_2 / E_1 \\
 G_{12} &= [G_r \{ G_c (1 + \xi_2 V_c) + \xi_2 G_r (1 - V_c) \}] / \{ G_c (1 - V_c) + \xi_2 G_r (1 + V_c / \xi_2) \}
 \end{aligned}$$

단, $\xi_i (i = 1, 2)$ 는 코오드의 단면모양에 따른 계수로 경험적인 값이다.

식(7)은 一般的인 Halpin-Tsai式으로 코오드의 橫斷面 (transverse section)이 원형인 경우 $\xi_1 = 2, \xi_2 = 1$ 의 값을 代入하고 코오드의 彈性係數가 고무의 값보다 훨씬 커다고 假定하면 식(7)은 本研究에 적합한 다음의 식이 된다.

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_c V_c + E_r (1 - V_c) \\
 E_2 &= E_r (1 + 2V_c) / (1 - V_c) \dots\dots\dots (8) \\
 \nu_{12} &= \nu_c V_c + \nu_r (1 - V_c) \\
 \nu_{21} &= \nu_{12} E_2 / E_1 \\
 G_{12} &= [G_r \{ G_c + G_r + (G_c - G_r) V_c \}] / \{ G_c G_r - (G_c - G_r) \nu_c \}
 \end{aligned}$$

3-2 應力-變形率 關係式

直交 異方性 材料의 平面應力下에서의 材料의 主應力方向에 對한 應力-變形率 關係式은 식(9)와 같다.

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \\
 \dots\dots\dots (9)
 \end{aligned}$$

단, 여기서 Q_{ij} 를 식(8)의 材料常數로 表示하면 다음과 같다.

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \dots\dots\dots (10)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

任意的 方向에 대한 直交 異方性 材料의 平面應力下에서의 應力-變形率 關係式은, 식(9)에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

단, $[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q] [T]^{-T}$ 이며 $[T]$ 는 變換 매트릭스 (transformation matrix) 로서 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 [T] &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \\
 \dots\dots\dots (12)
 \end{aligned}$$

적층 複合板의 k 번째 층의 應力-變形率 關係式은

$$\{ \sigma \}_k = [\bar{Q}]_k \{ \epsilon \}_k \dots\dots\dots (13)$$

이다.

式(7)을 식(13)에 代入하면 (k 번째 板要素의 應力은 식(14)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k &= [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \\
 \dots\dots\dots (14)
 \end{aligned}$$

3-3 단위길이당 힘과 모우멘트

적층 複合板의 단위길이당 힘 (resultant force per unit length) N과 단위길이당 모우멘트 (resultant moment per unit length)

M은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \\ &= \sum_{k=1}^q \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \\ &= \sum_{k=1}^q \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \end{aligned}$$

式(14)를 式(15)에 代入하여 N과 M을 求하면

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= [A] \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [B] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= [B] \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [D] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \\ &\dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

이다.

$$\begin{aligned} \text{단, } A_{ij} &= \sum_{k=1}^q (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^q (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned}$$

4. 統制方程式

系의 運動에너지 T는 式(1)에 의하여

$$\begin{aligned} T &= -\frac{1}{2} \rho h \omega^2 \int w^2 dx dy \\ &\approx -\frac{1}{2} \rho h \omega^2 [A] [M] \{A\} \dots\dots(18) \end{aligned}$$

이고, 變形에 너지 U는

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_A ([N_x N_y N_{xy}] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} + \\ & [M_x M_y M_{xy}] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}) dA \dots\dots(19) \end{aligned}$$

이다.

式(16)을 式(19)에 代入하면 變形에 너지 U는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iint ([\epsilon] [A] \{\epsilon\} + [\kappa] [D] \{\kappa\} + \\ & [\kappa] [B] \{\epsilon\} + [\epsilon] [B] \{\kappa\}) dx dy \\ &= \frac{1}{2} [A] \{\kappa\} \{A\} \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

本 研究는 外力이 없는 自由振動의 경우이므로 에너지式의 積分을 遂行한 후 Lagrange의 運動方程式을 適用하면 한 要素에 對한 다음의 統制方程式을 얻을 수 있다.

$$-m\omega^2 [\bar{M}] \{\bar{A}\} + \{\bar{K}\} \{\bar{A}\} = \{0\} \dots\dots\dots(21)$$

式(21)을 構造物 全體에 對해 중첩하고 2번에서 變位와 기울기 0인 境界條件을 適用하면 다음의 統制方程式이 얻어진다.

$$-m\omega^2 [M] \{A\} + [K] \{A\} = \{0\} \dots\dots(22)$$

式(22)로부터 固有振動數와 고유벡타를 求할 수 있다.

5. 數直解析

本 問題에서는 그림 2와 같은 코오드-코무 複合板모형을 取扱하였으므로, 그림 3은 2플라

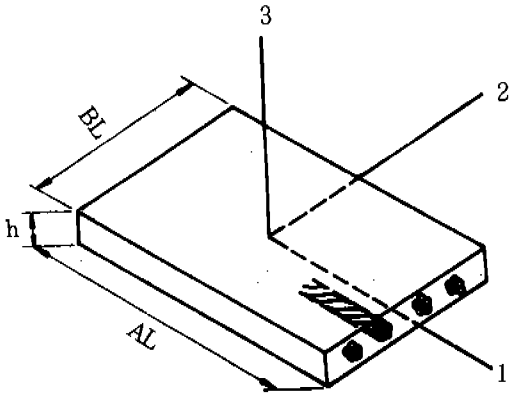


Fig. 2 Steel Cord-rubber ply showing principal material axes

Table. 2 Elastic constants of Cord-rubber materials

Materials	Elastic constants
Cord	$E_c = 0.51496 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$
	$G_c = 0.19806 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$
	$\nu_c = 0.3$
	$\nu_c = 0.11$
rubber	$E_r = 0.16214 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$
	$G_r = 0.50476 \times 10^2 \text{ kg/cm}^2$
	$\nu_r = 0.49$
	$\nu_r = 0.89$

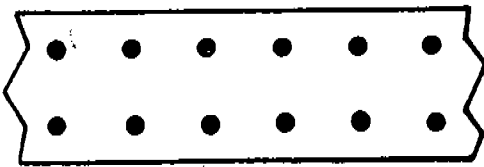


Fig. 3 2 ply composite

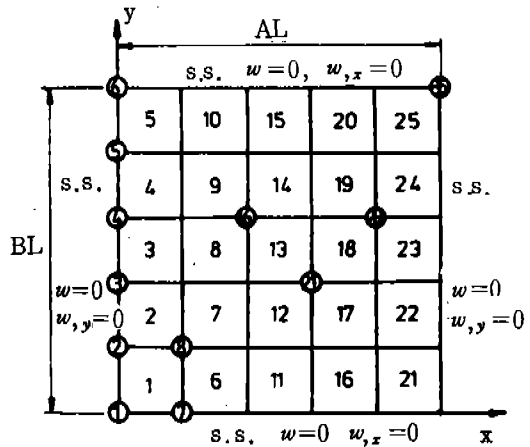


Fig. 5 Element mesh numbers of elements and nodes asymmetric for orthotropic finite element

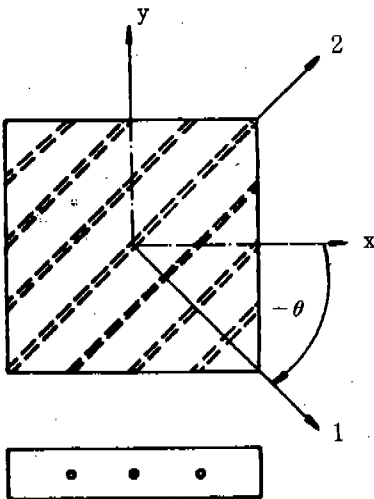


Fig. 4 Cord construction

그림 5는 直交異方性 複合板의 有限要素와 節點을 나타내는데 25개의 要素로 나누는 境遇 節點의 數는 36개로서 構造物 全體의 自由度는 108개이며 네변의 境界條件 44개를 適用하면 64개가 된다.

따라서 剛性메트릭스의 크기는 64×64 이다.

6. 結果 및 檢討

그림 6은 特殊直交 異方性 複合板의 解析的 解¹⁷⁾와 有限要素의 解를 比較한 것이며 그림 7은 特殊 直交異方性 複合板의 振動모우드를 나타내고 있다. 그림 6에서 보면 要素數를 49개로 한 경우가 解析解에 더욱 近接하고 있음을 보이며 25개로 한 경우에도 잘 一致하고

이 複合板을 그림 4는 코오드 각을 나타내고 있다.

고무와 코오드(steel)의 機械的 特性은 表 2와 같다.

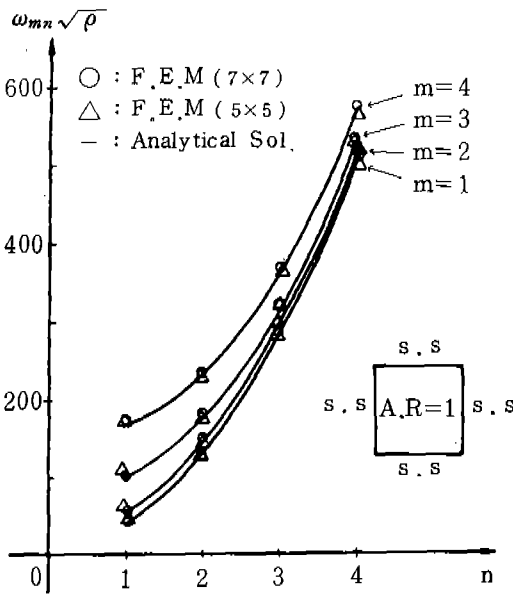


Fig. 6 Comparison of analytical solution and F.E.M. results for specially orthotropic square plate where $D_{11}/D_{22}=10$ and $D_{12} + 2D_{66} = 1$

있음을 알 수 있다.

그림 7에서 보면 참고문헌 (17)의 경우와 완전히 일치하는 모우드를 나타내고 있으며 등방성 재료와는 달리 ω_{13} 가 먼저 나온 후에 ω_{21} 이 나오고 있다.

그림 8은 등방성板的 振動 모우드를 보이고 있으며 그림 9는 그림 8과 比較하여 나타나는 모우드의 順序를 보여주는데 등방성 材料의 板과 直交異方性 板의 모우드 順序가 완전히 달리 나옴을 알 수 있다.

그림 10은 6-플라이의 코오드각이 53° 인 경우에 解析解¹⁷⁾의 結果와 有限要素의 結果를 比較한 것으로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

그림 11은 코오드-고무 複合板의 가로 세로 比에 따른 固有振動數로서 가로 세로 比가 增加하면 固有振動數가 增加함을 알 수 있다.

그림 12는 코오드-고무 複合板의 内部에 矩形구멍을 갖는 경우에 구멍의 크기에 따른 固有振動數의 變化를 보여주는 것으로 구멍의 크

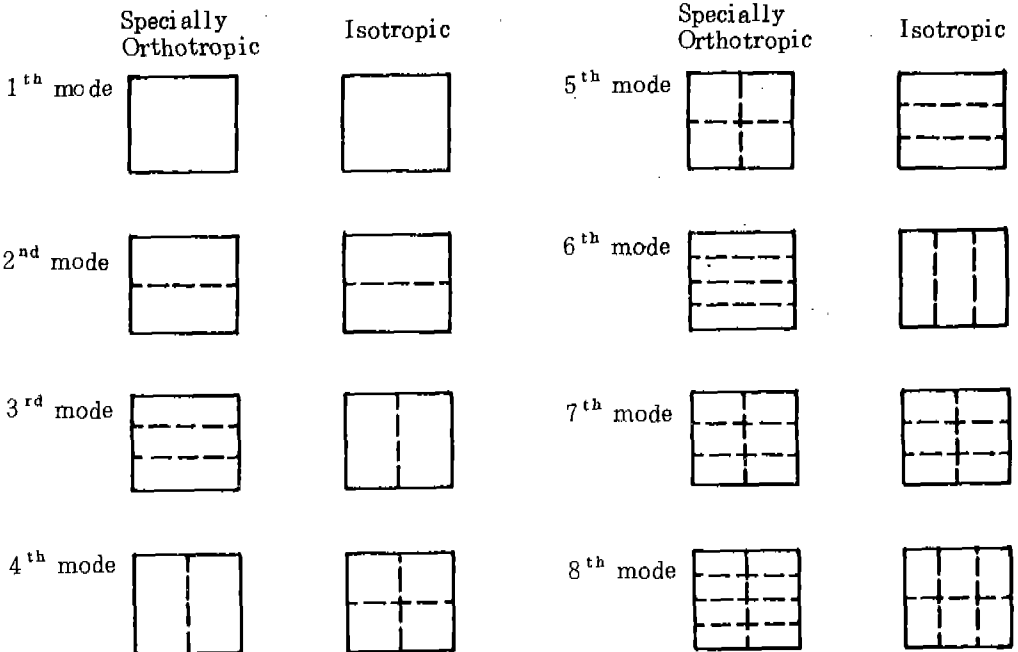


Fig. 9 Comparison of vibration shapes for simply supported square specially orthotropic and isotropic plates

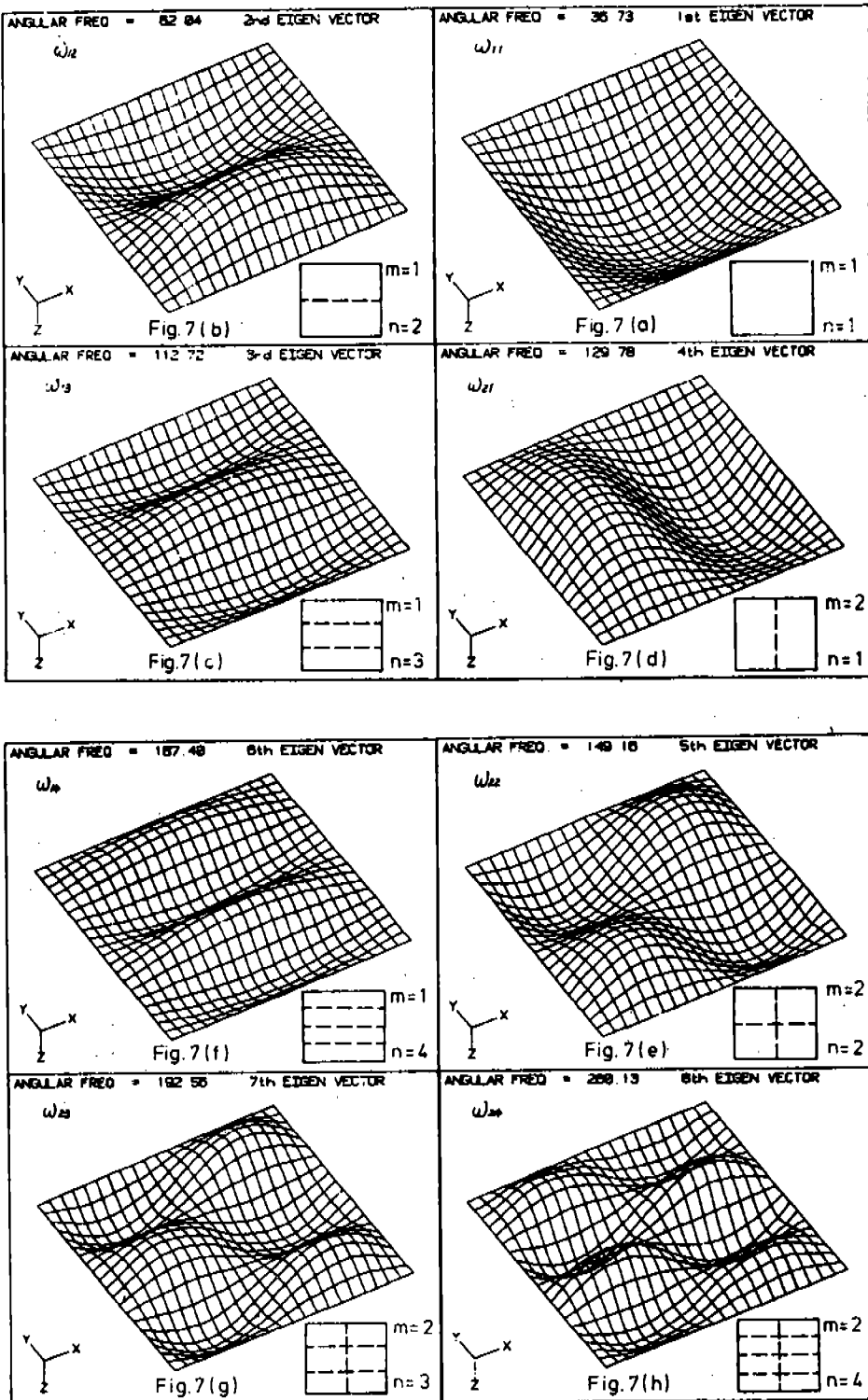


Fig. 7 Vibration mode shapes for simply supported square orthotropic laminate plate

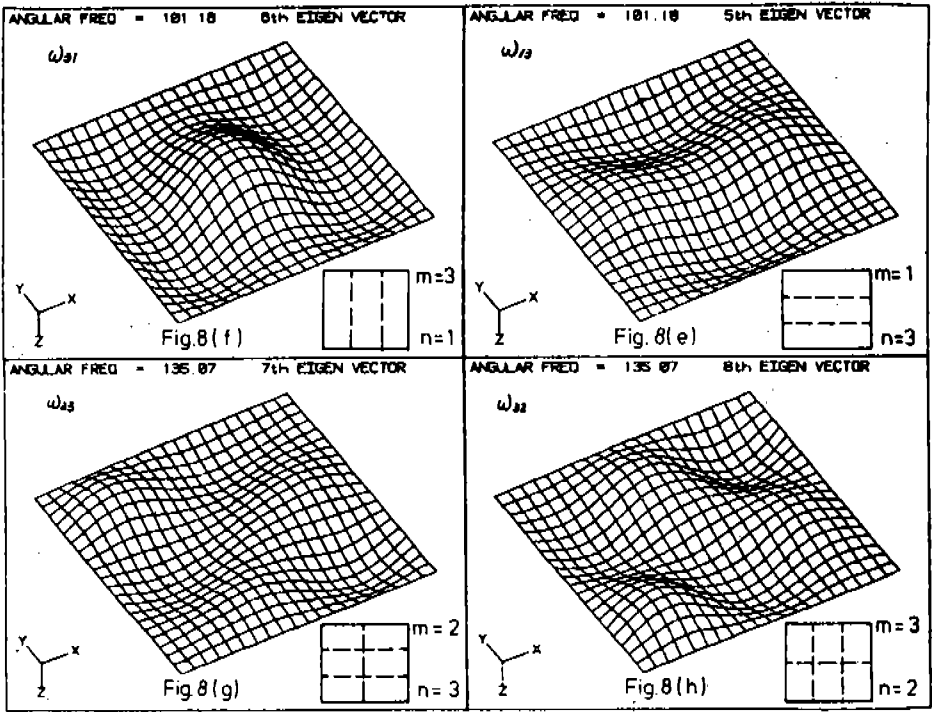
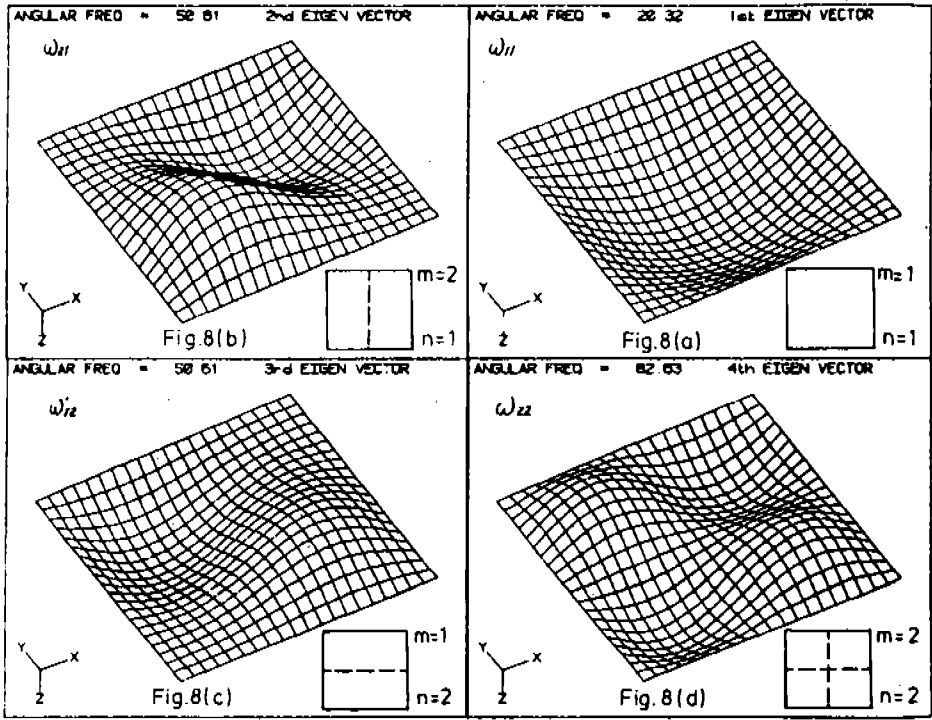


Fig. 8 Vibration mode shapes for simply supported square isotropic plate

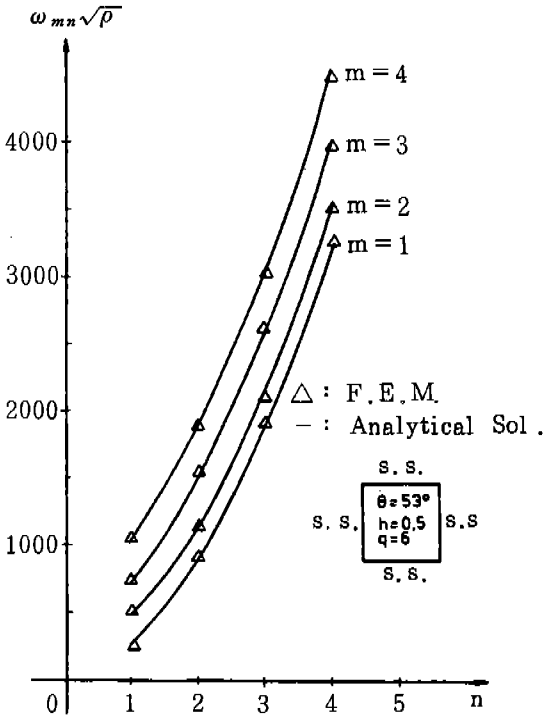


Fig. 10 Comparison of exact solution and F.E.M. results for natural frequencies of asymmetric angle ply Cord-rubber laminate square plate

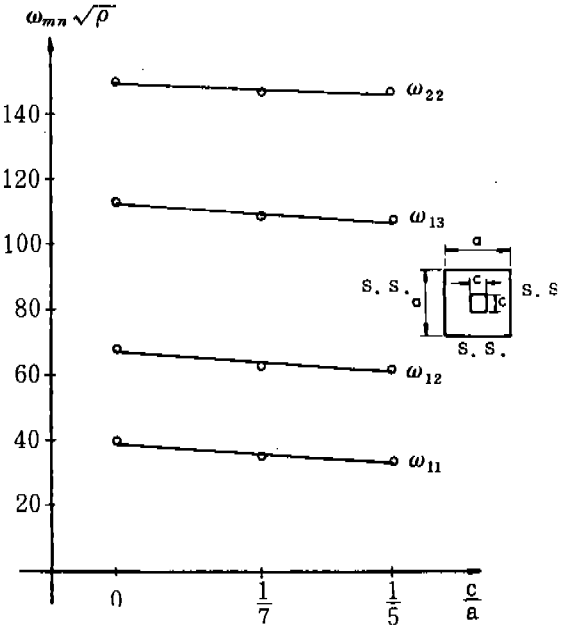


Fig. 12 Natural frequencies of Cord-rubber laminate square plate with square hole in its center

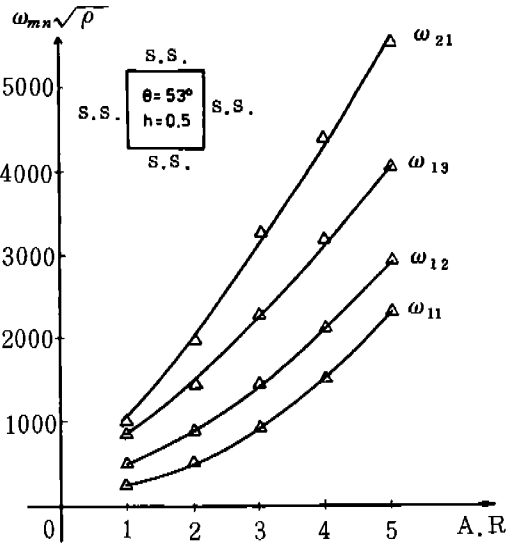


Fig. 11 Natural frequencies of Cord-rubber laminate plates for various aspect ratio

기가 增加함에 따라 固有振動數는 적은 값으로 減少함을 보여준다.

그림 13 은 特殊直交 異方性 複合板의 内部에 구멍이 있는 경우의 振動모우드를 나타내며 그림 14 는 구멍이 있는 경우와 구멍이 없는 경우의 振動모우드값의 比較로서 6 번째와 7 번째 모우드가 바뀌어 나타내고 있다.

7. 結 論

이상에서 얻은 코오드-고무 複合板의 振動特性에 關한 結論은 다음과 같다.

- 1) 本 研究에서 使用된 有限要素로서 任意構造物의 코오드-고무 複合材料의 振動特性은 幾何學的 모양을 달리함으로서 解析할 수 있다.
- 2) 等方性 材料와 直交異方性 材料의 振動모우드의 出現順序는 상당한 차이가 있다.
- 3) 가로 세로 비를 增加시키면 固有振動數는 增加한다.
- 4) 内部에 構造的 불연속을 갖는 경우 그크

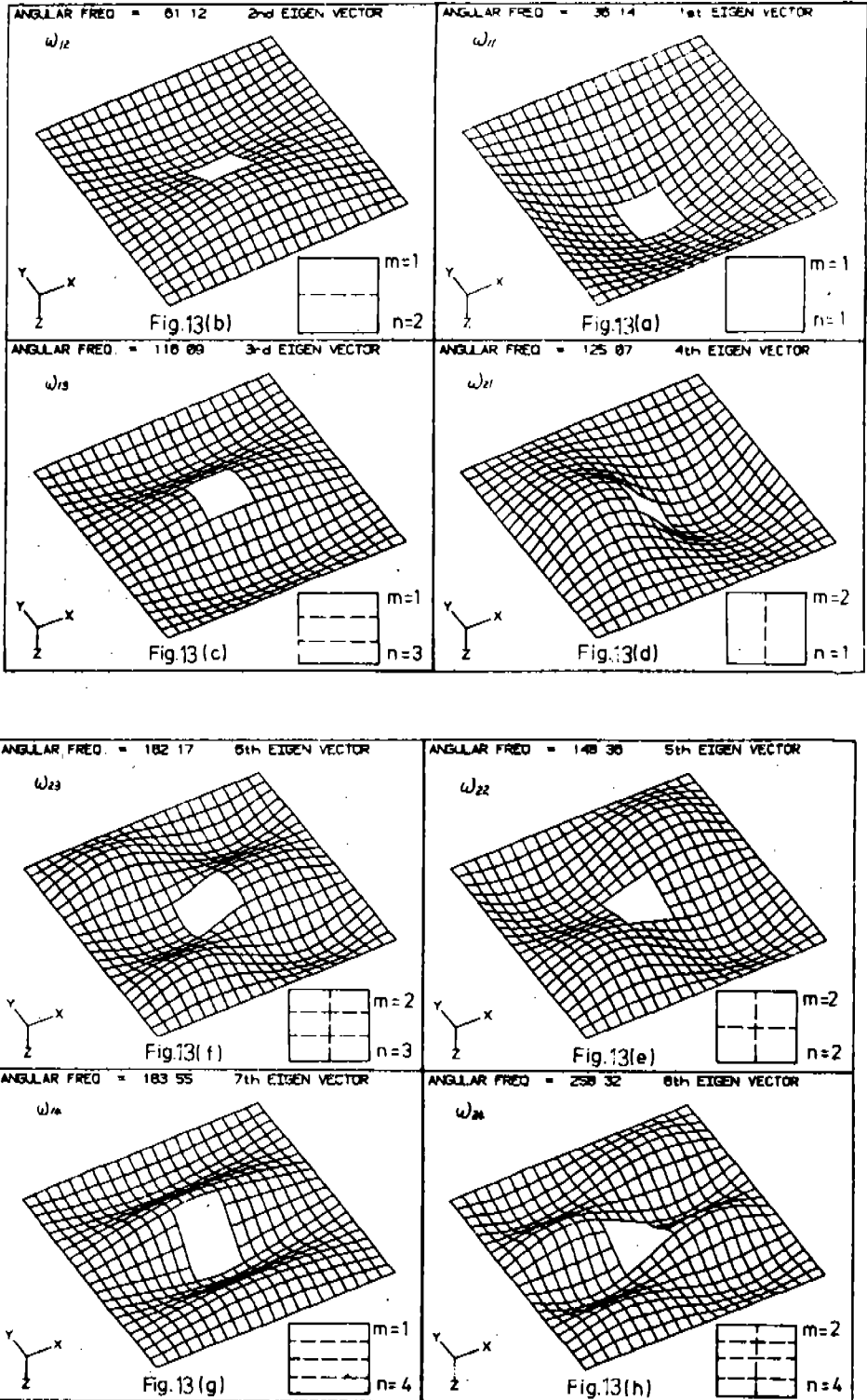


Fig. 13 Vibration mode shapes for simply supported specially orthotropic square plate with square hole in its center

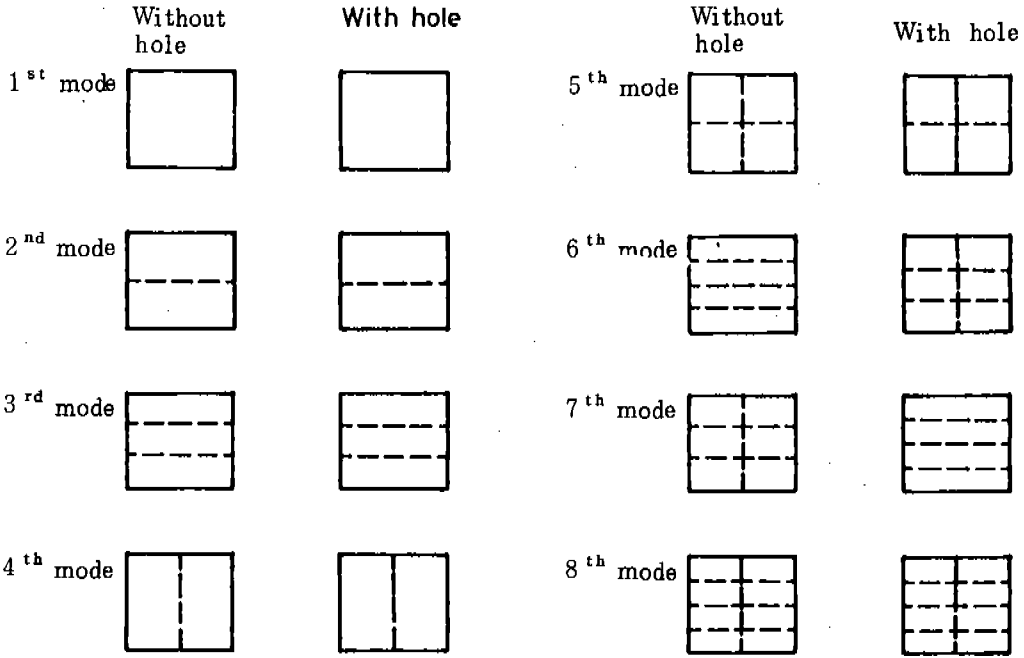


Fig.14 Comparison of vibration mode shapes for square specially orthotropic plates with hole and without hole

기가 커짐에 따라 固有振動數는 減少한다.

- 5) 内部에 구멍을 갖는 경우의 振動모우드의 出現順序는 内部에 구멍이 없는 경우와 다르다.

REFERENCES

1. J. Padovan, "Traveling Waves Vibrations and Buckling of Rotating Anisotropic Shells of Revolution by Finite Element", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 11, pp. 1367-1381, 1975.
2. J. De Eskinazi, R.A. Ridha, "Finite Element Analysis of Giant Earth Mover Tires", *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 55, pp. 1044-1054, 1982.
3. R.A. Ridha, L.R. Hirshfelt, "Finite Element Modeling of a Homogeneous Pneumatic Tire Subjected to Footprint Loadings", *Tire Society of Akron University*, 1983.
4. N. Yoshimura, "The Application of Finite Element to Tire Design", *ACS Rubber Division 126th Meeting*, Paper No. 59, 1984.
5. V.E. Gough, "Stiffness of Cord and Rubber Construction", *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 41, pp. 958-1021, 1968.
6. H.P. Patel, J.L. Turner, J.D. Walter, "Radial Tire Cord-Rubber Composites", *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 49, pp. 1095-1110, 1976.
7. O. Posfalvi, "The Poisson Ratio for Rubber-Cord Composites", *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 50, pp. 224-232, 1977.
8. J.D. Walter, H.P. Patel, "Approximate Expressions for the Elastic Constants of

- the Cord-Rubber Laminates”, Rubber Chemistry and Technology, Vol. 52, pp. 710-724, 1979.
9. S.K. Clark; “Theory of the Elastic Net Applied to Cord-Rubber Composites”, ACS Rubber Division 124th Meeting, paper No. 19, 1982.
 10. M. Kumar, C.W. Bert, “Experimental Characterization of Mechanical Behavior of Cord-Rubber Composites”, Tire Science and Technology, Vol. 10, pp. 37-54, 1982.
 11. R.J. Cembrola, T.J. Dudek, “Cord-Rubber Materials Properties”, ACS Rubber Division 126th Meeting, Paper No. 60, 1984.
 12. S.K. Clark, R.N. Dodge, “Interaction of Tire Material and Design”, ACS Rubber Division 126th Meeting, Paper No. 61, 1984.
 13. J.C. Halpin, S.W. Tsai, “Effects of Environmental Factors on Composite Materials”, AFML-TR67, 1969.
 14. J.C. Halpin, J.L. Kardos, “The Halpin-Tsai Equation: A Review”, Polymer Engineering and Science, Vol. 16, pp. 344-352, 1976.
 15. G. Tangorra, “Simplified Calculation for Multi-ply Cord-Rubber Sheets as Combination of Cord-Rubber Laminates”, Proceeding International Rubber Conference, 1969.
 16. T. Akasaka, M. Hirano, “Approximate Elastic Constants of Fiber Reinforced Rubber Sheet and Its Composite Laminate”, Composite Materials and Structures, Vol. 1, pp. 70-76, 1972.
 17. R.M. Jones, Mechanics of Composite Materials, McGraw-Hill Book Co., 1975.