

## 時間縱屬的 荷重 $\omega$ 作用하는 構造物の 動持性

Dynamic Behavior of a Supporting Structure Subjected to a Force of Time Dependent Frequency

정 태 진\*, 박 영 준\*  
Tae-Jin Chung, Young-Jo Park

### Abstract

Numerical analysis has been made on the dynamic behavior of a supporting structure subjected to a force of time dependent frequency. The effect of solid viscosity is studied when the frequency of external force passes through the first critical frequency of the simple beam for four times.

Within the Euler-Bernoulli beam theory, the solutions are obtained by using finite Fourier and Laplace transformation methods with respect to space and time variables.

The result shows that the maximum value of the dynamic deflection is considerably affected by the value of the solid viscosity as well as the frequency difference

The maximum dynamic deflection is found to occur in the frequency lower limit  $C$  of 0.85-0.985 in the presence of the solid viscosity.

### 記 號 說 明

$A$ : 斷面積	$f$ : 外力
$a$ : 時 間	$G$ : $g/\omega_1^5$
$B$ : $\omega_1 b$	$g$ : 常數
$b$ : 時 間	$I$ : 慣性모멘트
$C$ : $c/\omega_1$	$l$ : 길이
$c$ : 角速度( $\omega_{(t=b)}$ )	$q$ : 單位 길이當의 外力
$D$ : $d/\omega_1$	$R$ : $r/\omega_1^3$
$d$ : 角速度( $\omega_{(t=b+a)}$ )	$r$ : 常數
$E$ : 彈性係數	$T$ : $\omega_1 t$
$E^*$ : $E + \eta \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)$	$t$ : 時間
	$u$ : 常數
	$w$ : 처짐량

\* 현대정공(주) 기술연구소

\*\* 한양대학교 기계설계과

- $x$  : 座標
- $\alpha$  : 角加速度
- $\Delta$  :  $D - C$
- $\eta$  : 固體粘性係數
- $\Theta$  : 無次元角變位
- $\theta$  : 角變位

$$\lambda = \frac{\eta}{EI^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

- $\xi$  :  $x/l$
- $\rho$  : 密度
- $\omega$  : 角速度

- $\omega_1$  : 보의 一次固有振動數
- $\omega_{max}$  : 最大角速度
- $\Omega$  :  $\omega_{max}/\omega_1$

### 1. 序 論

外力의 加速度가 時間從屬的으로 作用하는 單純보의 動特性에 對한 研究는 鈴木<sup>1),2),3)</sup>가 처음으로 Euler 보를 에너지법에 의하여 數值解析하였으며, 그는 基礎彈性을 無視한 狀態에서 軸荷重, 固體粘性 및 回轉慣性의 效果에 對하여 各各의 特性에 限하여 發表한 바 있으며, F. Victor<sup>4)</sup>는 rotor에 依한 Timoshenko 보의 動特性을 Fourier 變換을 利用하여 研究한 바 있다. 한편 著者<sup>5),6)</sup>는 Euler 보에 對하여 固體粘性和 軸荷重이 同時에 作用하는 境遇와 彈性的 支持狀態를 考慮하였을 때의 固體粘性和 軸荷重의 同時作用效果에 對하여 研究한 바 있다.

지금까지는 外力이 系의 一次固有振動數를 1回 또는 2回 지나가는 境遇에 對하여 研究하였으나, 實際의 系에서는 여러번 지날 수가 있으므로 여기에 關心을 두고서 鈴木<sup>2)</sup>가 疑問點으로 提示한 것을 밝혔다.

外力이 系의 一次固有振動數를 4回 지날 때에 單純보의 動特性을 回轉慣性 및 剪斷力의 效果를 無視<sup>7)</sup>한 狀態에서 finite Fourier sine 變換과 Laplace 變換을 利用하여 數值解析하였으며, 解에 包含된 積分은 Simpson's rule

을 使用하였다. 本 研究에서는 時間從屬的인 振動數를 갖는 外力이 單純보의 一次固有振動數를 4回 지날 때에 固體粘性和 加速度의 變化에 依하여 動的 처짐이 크게 變하는 것을 밝혔다.

構造物의 支持狀態와 軸荷重의 作用에 依한 效果에 對해서는 繼續研究하고자 하며, 起振力이 系의 一次固有振動數를 5回 以上 繼續的으로 지날 때의 動特性에 對해서도 關心을 갖고자 한다.

### 2. 理論解析

外力  $f(t)$ 가  $q \sin \left[ \int_0^t \{-g(t-b)^4 + r(t-b)^2 + u\} dt \right]$ 와 같은 꼴로 單純보에 作用하여 보의 一次固有振動數를 네번 通過한다고 假定하였으며,  $q, g, b, r, u$ 는 常數이며  $t$ 는 時間을 나타낸다.

外力  $f(t)$ 는 均一한 分布狀態로 作用하고, 均質한 材料로 되어있는 보라고 假定하였다.

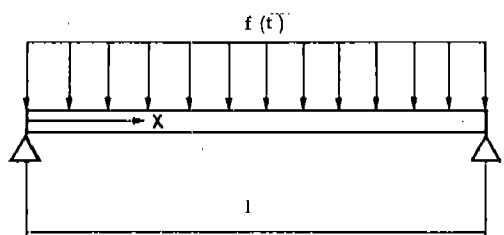


Fig.1 Coordinates and Dimensions

Fig. 1은 次元과 座標를 나타내며, 時間에 따라서 變化하는 振動數를 갖는 보의 運動方程式은,

$$E^* I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(t) \dots \dots \dots (1)$$

$E^*$ 는 相當彈性係數로서 Voigt<sup>8),9)</sup>形을 利用하였으며,  $E^* = E + \eta \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)$ 의 關係를 갖고 있다. 다른 記號들은 記號說明表에 따랐다.

外力  $f(t)$ 는,

$$f(t) = q \sin \theta(t) \dots \dots \dots (2)$$

로 假定하였으며,  $\theta(t), \omega(t), \alpha(t)$ 는 다음과 같다.

$$\theta_{(t)} = -\frac{1}{5}g(t-b)^5 + \frac{1}{3}r(t-b)^3 + ut$$

$$+ (-\frac{1}{5}gb^5 + \frac{1}{3}rb^3)$$

$$\omega_{(t)} = \theta_{(t)}$$

$$= -g(t-b)^4 + r(t-b)^2 + u$$

$$\alpha_{(t)} = \omega_{(t)}$$

$$= -4g(t-b)^3 + 2r(t-b)$$

外力  $f_{(t)}$  가 停止狀態에서 作動하기 始作하여 時間의 變化와 함께 加速度가 變化하는 꼴을 Fig. 2와 같이 假定하였다.

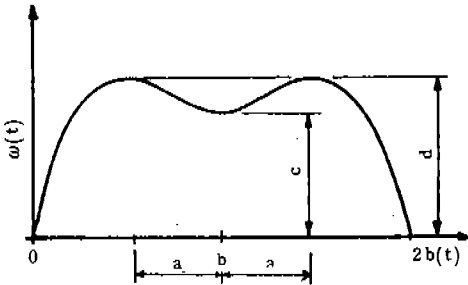


Fig.2 Relationships between  $b, c, d$  and  $\omega_{(t)}$

한편  $\omega_{(t)}$  는,

$$\omega(t=b) = C$$

의 關係로부터  $u = C$  이므로 外力  $f_{(t)}$  는 다음과 같다.

$$f(t) = q \sin[-\frac{1}{5}g(t-b)^5 + \frac{1}{3}r(t-b)^3]$$

$$+ ct + (-\frac{1}{5}gb^5 + \frac{1}{3}rb^3)$$

式(1)에 無次元變數  $B, C, D, G, T$  및  $\xi$  를 導入하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \pi^2 \lambda \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \partial T} + \pi^4 \frac{\partial^2 w}{\partial T^2}$$

$$= \frac{l^4}{EI} q \sin \Theta(\tau)$$

$$\Theta(\tau) = -\frac{1}{5}G(T-B)^5 + \frac{2}{3}G^{1/2}(D-C)^{1/2}$$

$$(T-B)^3 + CT + (-\frac{1}{5}GB^5 + \frac{2}{3}G^{1/2}$$

$$(D-C)^{1/2} B^3 \} \dots \dots \dots (3)$$

式(3)에서  $r$  과  $c, d, g$  와의 關係는  $\omega(t = b \pm a) = d$  인 條件에서  $r = 2g^{1/2}(d-c)^{1/2}$  인 關係式이 成立하므로 無次元化하면

$$R = 2G^{1/2}(D-C)^{1/2}$$

이 된다.

式(3)을 finite Fourier sine 變換시키며 다음과 같이 定義한다.

$$\bar{\omega}(n \cdot \tau) = \int_0^1 \omega \sin n\pi \xi d\xi \dots \dots \dots (4)$$

$$\omega(\xi \cdot \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\omega} \sin n\pi \xi \dots \dots \dots (5)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial T^2} + \pi^2 \lambda n^4 \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial T} + n^4 \bar{\omega} = \frac{1}{\pi^4} [ \{ n\pi \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2}$$

$$- n^3 \pi^3 \omega + \lambda n \pi^3 \frac{\partial^3 \omega}{\partial \xi^2 \partial T} - \lambda n^3 \pi^5$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial T} \} \cos n\pi \xi |_0^1 ] + \frac{q l^4}{n \pi^5 EI} \{ 1 - (-1)^n \}$$

$$\sin \Theta(\tau), \dots \dots \dots (6)$$

式(6)에서 兩端이 單純 支持된 境遇를 考慮하면 境界條件은 다음과 같다.

$$\omega|_{\xi=0} = \omega|_{\xi=1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} |_{\xi=0} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} |_{\xi=1} = 0 \dots \dots \dots (7)$$

式(7)을 式(6)에 代入하면,

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial T^2} + \pi^2 \lambda n^4 \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial T} + n^4 \bar{\omega} = \frac{\{ 1 - (-1)^n \} l^4}{n \pi^5 EI}$$

$$q \sin \theta(\tau) \dots \dots \dots (8)$$

式(8)을 Laplace 變換하고 다음과 같이 定義한다.

$$\bar{\omega}(n \cdot s) = \int_0^{\infty} \bar{\omega}(n \cdot \tau) e^{-s\tau} d\tau \dots \dots (9)$$

$$\bar{\omega}(n \cdot \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{\omega}(n \cdot s) e^{s\tau} ds \dots (10)$$

위의 定義에 의하여 式(8)을 變換하면서 初期條件  $\bar{\omega}(n \cdot 0) = 0, \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial T}(n \cdot 0) = 0$  을 代入하면,

$$\bar{\omega}(n \cdot s) = \frac{1}{S^2 + \pi^2 \lambda n^4 S + n^4}$$

$$\alpha \left\{ \frac{(1 - (-1)^n) l^4}{n \pi^5 EI} q \sin \Theta(\tau) \right\} \quad (11)$$

Convolution theorem을 利用하여 逆變換한 다음에  $\omega(\xi \cdot \tau)$ 를 求하면,

$$\frac{\omega(\xi \cdot \tau)}{\frac{q l^4}{\pi^5 EI}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \{1 - (-1)^n\}}{n \{n^4 - (\frac{1}{2} \pi^2 \lambda n^4)^2\}^{1/2}}$$

$$\left( \int_0^T \exp \left\{ -\frac{1}{2} \pi^2 \lambda n^4 (T - \tau) \right\} \right.$$

$$\times \sin \left\{ n^4 - (\frac{1}{2} \pi^2 \lambda n^4)^2 \right\}^{1/2} (T - \tau)$$

$$\left. \sin \Theta(\tau) d\tau \right) \sin n \pi \xi \dots \dots \dots (12)$$

### 3. 數値解析에 의한 結果 및 考察

本 研究는 構造物의 設計時에 重要한 單純支持보 中央點 ( $\xi = 0.5$ )의 動的 처짐에 對하여 Simpson의 數値積分 方法에 依하여 遂行한 것이며, 모든 數値들은 無次元化시킨 數値로서 나타내었다. 無次元 變數들의 數値는 아래와 같은 境遇로 나누어서 考察하였으며 모든 數値들은 圖表를 利用하여 나타내었다.

#### 3-1 C와 D의 關係

外力이 보의 一次固有振動數를 지나서 最大角速度에 到達한 後에 減速하였다가 또다시 最大角速度에 이른다고 할 때에 單純보의 動的 처짐特性을 Fig. 3에 나타내었다.

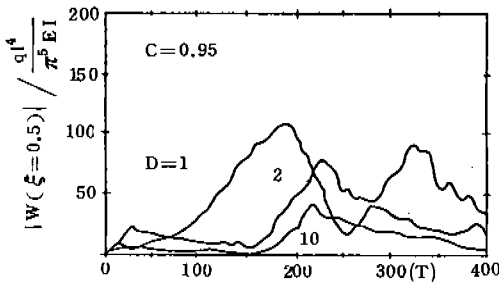


Fig.3 Relationships between  $T$  and ext. value of  $w$  for  $C=0.95$ ,  $D=1$ , 2 and 10,  $\lambda \times 10^3=2$

Fig. 3은  $\lambda \times 10^3=2$ 일 때에  $C$ 값을 0.95로 一定하게 維持하면서  $D$ 값만을 1, 2, 10으로 變化시켰을 때 보의 動的 처짐特性을 나타낸 것이며  $D$ 값이 1에 가까운 狀態에서 最大처짐을 나타냈다.

最大 角速度가 一次固有振動數보다 크게 될 수록 보의 動的 처짐은 줄어들고, 動的 처짐도 時間의 變化와 關係없이 거의 一定한 값을 갖게 된다.

$D$ 값을 1.1에 固定시킨 後에  $C$ 값을 變化시켜서 보의 動的 처짐特性을 나타낸 것이 Fig. 4이다.

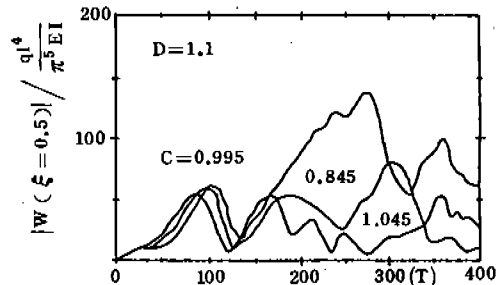


Fig.4 Relationships between  $T$  and ext. value of  $w$  for  $\lambda \times 10^3=2$ ,  $C=0.845$ , 0.995, 1.045 and  $D=1.1$

Fig. 4는  $D=1.1$ ,  $\lambda \times 10^3=2$ 인 境遇에  $C$ 값을 0.845, 0.995, 1.045로 하였을 때 보의 動的 처짐 特性이다.

$C$ 값이 一次固有振動數에 가까워지면 보의 처짐은 急激히 줄어드는 現象을 나타낸다.

$C$ 값의 變化에 따라서 보의 動的 처짐이 顯著하게 變하는 것을 考察한 것이 Fig. 5이다.

Fig. 5는  $C$ 값과  $D$ 값이 同一한 境遇로서 即  $\Delta=0$ 인 狀態다. 이 때에  $C$ 값의 變化에 對한 보의 動的 처짐特性은  $C=1.02$ 에서 最大 처짐이 나타난다.

#### 3-2 $\lambda$ 와 $\Delta$ 의 關係

보의 固體粘性을 考慮하였을 때 動的 처짐特性을 考察하기 위하여 Voigt形의 固體粘性係數를 導入하였다. 無次元인 固體粘性係數( $\lambda$ )의 變化에 對한 보의 動的 처짐 特性을 Fig.

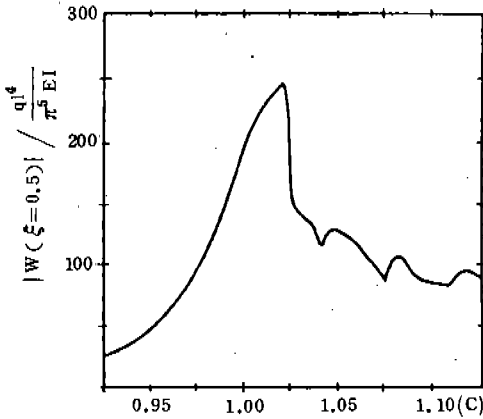


Fig. 5 Relationship between C and ext. value of w for  $\lambda \times 10^3 = 1$  and  $\Delta = 0$

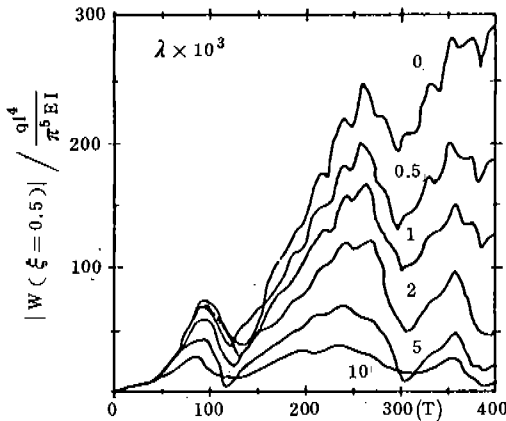


Fig. 6 Relationship between T and ext. value of w for  $c = 1.0$ ,  $\Delta = 1.0$ ,  $\lambda \times 10^3 = 0, 0.5, 1, 2, 5$  and  $10$

6에 나타내었다.

Fig. 6은  $C = 1.0$ ,  $\Delta = 0.1$ 일 때에  $\lambda$ 의 변화에 대한 보의 動的 처짐 特性을 나타낸 것이다.  $\lambda$ 값이 增加하면 보의 動的 처짐은 顯著하게 줄어지며 특히  $\lambda \times 10^3$  값이 10 이상이 되면 時間의 변화에 크게 影響을 받지 않는다.

外力의 振動數와 固體粘性係數에 대한 보의 動的 처짐 特性을 Fig. 7에 나타내었다.

Fig. 7은  $\Delta = 0$ 인 狀態에서  $\lambda$ 와 C값의 변화에 대한 보의 動的 처짐을 나타낸 것이다. Fig. 5에서와 같이 C값이 系의 一次固有振動

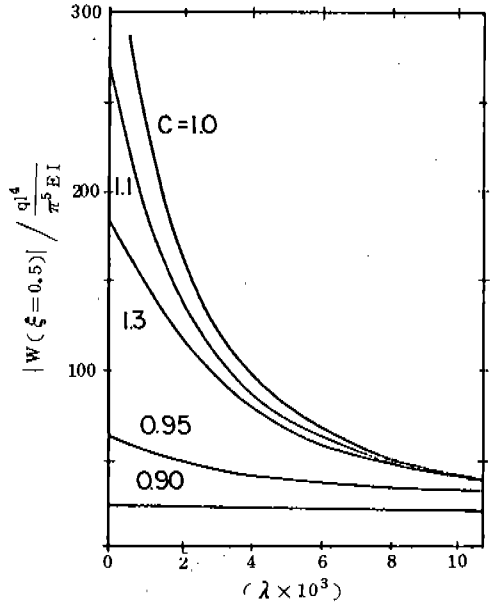


Fig. 7 Relationships between  $\lambda$  and ext. value of w for  $\Delta = 0$

數에 가까운 곳에서 보의 最大 처짐이 나타나며,  $\lambda \times 10^3$  값이 10 이상이 되면 거의 一定한 값을 나타내며, 特히 C값이 0.95 이하가 되면  $\lambda$ 값의 變化에 關係없이 거의 一定한 값을 나타낸다.

$\lambda$ 의  $\Delta$ 와의 關係를 Fig. 8에 나타내었다.

Fig. 8은  $C = 1 - \frac{1}{2}\Delta$ ,  $\lambda \times 10^3 = 1, 2, 4, 10$ 인 경우  $\Delta$ 와  $\lambda$ 의 變化에 대한 보의 動的 처짐을 나타낸 것이다.

$\lambda \times 10^3$  값이 4 이하이면  $\Delta$ 의 變化에 따라서 보의 動的 처짐에 크게 變化하지만  $\lambda \times 10^3$  값이 4보다 크게 되면  $\Delta$ 값의 變化에 關係없이 거의 一定한 값을 갖는다.  $\omega_{max}/\omega_1$ 의 特性을 研究하기 爲하여  $\Omega$ 와 動的 처짐 特性과의 關係를 여러가지의  $\lambda$ 값에 對하여 Fig. 9에 나타내었다. Fig. 9의 (a)는  $\Delta$ 가 0.05일 境遇에  $\Omega$ 의 變化에 對한 보의 動的 처짐 特性을  $\lambda \times 10^3$ 이 1, 2, 4, 10에 對하여 나타내었다. 이 境遇에는  $\Omega$ 가 0.98인 狀態에서 最大 처짐 特性이 나타난다. (b)의 境遇는  $\Delta$ 가 0.1일 때에 보의 動的 처짐 狀態를 나타내며, 이 때에는  $\Omega$ 가 0.92~0.995에서 最大 처짐을

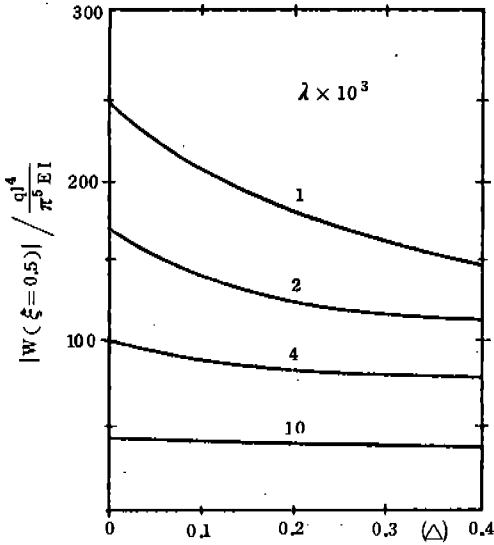


Fig.8 Relationships between  $\Delta$  and ext. value of  $w$  for  $C=1-1/2 \Delta$ ,  $\lambda \times 10^3=0.5, 1, 2, 4$  and  $10$

나타내며, 固體粘性係數에 따라서 最大처짐의 變化傾向을 알 수 있다.

한편  $\Delta$ 값이 0.2인 (c)의 境遇에는  $C$ 가 0.85 ~ 0.98에서 最大처짐이 發生하며, 最大처짐이 나타나는 區間도 固體粘性값에 따라서 變化하는 것을 알 수 있다.  $\Delta$ 값이 0.4인 (d)의 境遇에는  $C$ 가 1.0 以下인 區間에서 最大처짐이 3회 나타나며, 그 처짐의 크기는  $\Delta$ 가 적을 때 보다도 相對的으로 적게 나타난다.  $C$ 가 1.0 以下에서 돌출되는 最大처짐의 現象을 보의 一次固有振動數를 2회 지나는 境遇<sup>2)</sup>와 같이 繼續檢討되어야 하며, 固體粘性係數가 적을 境遇에는 特別히 注意하여 調査하여야 한다. Fig. 9에서와 같이  $\Delta$ 가 0이면  $C=1.02$ 에서 最大 처짐이 나타나지만  $\Delta$ 가 0.1 以上이 되면  $C$  값이 1.0 以下에서 最大처짐이 나타난다. 또한  $C$ 가 1.0 以下에서 나타나는 最大처짐의 돌출回數는 固體粘性係數의 影響을 크게 받으며,  $\lambda \times 10^3$ 의 값이 1.0 以下인 境遇에는 動的 最大처짐의 값이  $\Delta$ 가 0.4 以下인 狀態와 比較하면 最大값이 相對的으로 작지만, 그 發生位置가  $C < 1.0$  되는 點에서 나타난다.

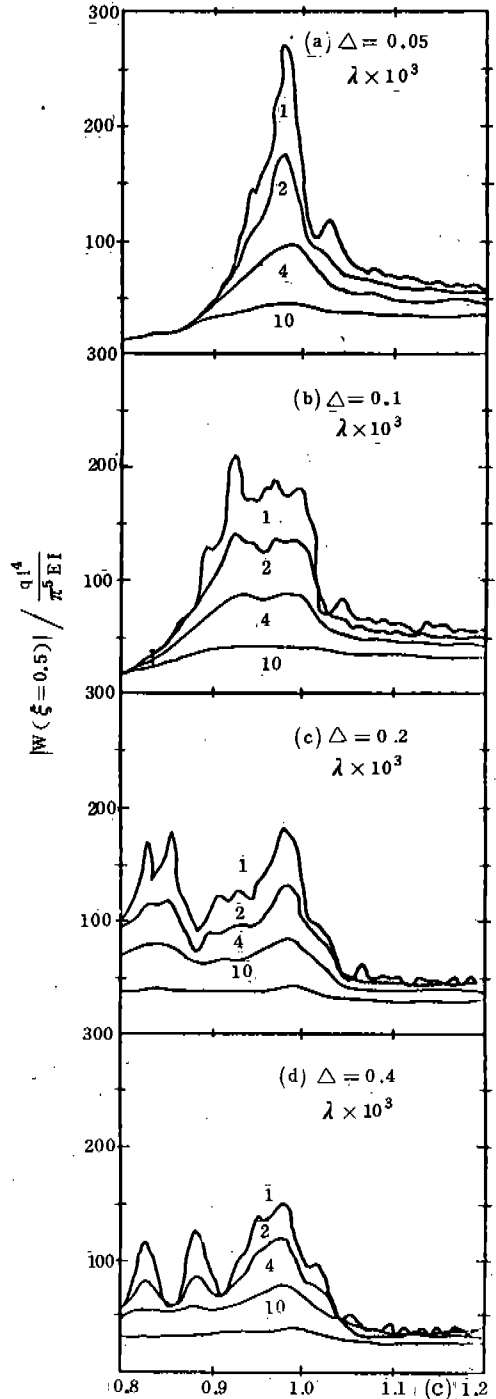


Fig.9 Relationships between  $\Delta$  and ext. value of  $w$  for  $\Delta=0.05, 0.1, 0.2, 0.4$ ,  $\lambda \times 10^3=1, 2, 4$  and  $10$

## 4. 結 論

單純보에 外力  $f_c(t)$ 가 均一한 分布狀態로 作用하여 系의 一次固有振動數를 4回 通過할 때의 보 中央點의 動的 처짐 特性은 다음과 같다.

(1) 外力의 振動數 變化幅  $\Delta(\omega_{T=D} - \omega_{T=C}) = 0$  일 때는  $\Omega(\omega_{max}/\omega_1) = 1.02$ 에서 最大動的 처짐이 나타난다(Fig. 5).

(2)  $\lambda \times 10^3$ 의 값이 10 以上이 되면  $\Delta$ 와  $\Omega$ 에 關係없이 一定한 動的 처짐이 나타난다. (Fig. 6, 7, 8)

(3)  $\Delta$ 값이 增加하면 動的 最大처짐이 나타나는 C의 區間이 크게 된다(Fig. 9).

(4)  $\lambda \times 10^3 < 1.0$ 이고 同時에  $\Delta \geq 0.2$ 이면,  $C \leq 1.0$ 일 때에 動的 最大처짐이 나타나며, 여러개의 頂點이 나타난다(Fig. 9).

## REFERENCE

1. S. Suzuki, Dynamic Behavior of a Beam Subjected to a Force of Time Dependent Frequency, J. of Sound and Vibration, V. 50, No. 3, pp. 417-422, 1978.
2. S. Suzuki, Dynamic Behavior of a Beam Subjected to a Force of Time Dependent Frequency, J. of Sound and Vibration, V. 57, No. 1, pp. 59-64, 1978.
3. S. Suzuki, Dynamic Behavior of a Beam Subjected to a Force of Time Dependent Frequency, J. of Sound and Vibration, V. 62, No. 2, pp. 157-164, 1979.
4. F. Victor, F. Ellyin, Acceleration of Unbalanced Rotor Through the Resonance of Supporting Structure. J. of Applied Mechanics, V. 48, pp. 419-424, 1981.
5. 鄭泰鎮, 朴榮祖, 時間從屬的 荷重을 받는 보가 軸荷重을 받을 때의 動特性(固體粘性 考慮), 大韓機械學會 論文集, 第10卷, 第4號, pp. 456~462, 1986.
6. 鄭泰鎮外 2人, 彈性的으로 支持된 보의 動特性, 自動車工學會誌, 第8卷, 第2號, pp. 43~50, 1986.
7. S. Timoshenko, D.H. Young, W. Weaver, Jr. Vibration Problems in Engineering, 4th Ed., Ch. 5, p. 432, John Wiley & Sons, N.Y. 1974.
8. Y.C. Fung, Foundations of Solid Mechanics, Ch. 1, p. 22, P-H, Inc., N.Y., 1965.
9. E.H. Lee and J.A. Morrison, a Comparison of the Propagation of Longitudinal Waves in Rods of Viscoelastic Materials, J. of Polymer Science, Vol. 19, pp. 93-110, 1956.