

數値解法에 의한 로켓 노즐벽의 最適設計

金 鎮 遠

朝鮮大學校 工科大學

(1986년 4월 3일 받음; 1986년 6월 26일 수리)

An Optimal Design of the Rocket Nozzle Wall by the Numerical Method

Jin-Won Kim

College of Engineering, Chosun University

(Received April 3, 1986; Accepted June 26, 1986)

요 약

적층재료로 된 로켓 노즐벽에서의 열전도 방정식을 Crank Nicolson의 방법을 이용하여 수치해석 하였으며 정해진 제한조건에 대하여 최적화 방법에 의하여 각층의 재료와 두께를 선택하였다. 로켓 노즐의 운전조건에 대하여 여러가지 입력한 재료중 각층의 최적의 두께 및 재료는 표 3과 같다.

Abstract

It is the aims of this study to choose the materials and determine the material thickness of laminated Rocket Nozzle Wall operating at high pressure and high temperature.

The heat conduction analysis of each layer was performed by Crank Nicolson method changing the thickness and the materials for the input data of Tungsten, Graphite, Alumina, Aluminum, Molybdenum, Plastic laminate.

The results of the study for pressure of 93.5 kg/cm^2 and temperature of 3000°C in the nozzle dia. of 40 cm are as follows.

layer	thickness	material
inner layer	0.635 cm	Tungsten
intermediate layer	0.16 cm	Alumina
outer layer	1.27 cm	Molybdenum

I. 緒 論

로켓 모터의 노즐은 고온, 고압하에서 작동하기 때문에 노즐벽을 設計하는 데 있어서 고려되어야 할 점들이 많다.

로켓 모터의 重量 증가는 추력감소를 의미함으로 最小의 重量(벽두께)으로서 고압에 견딜 수 있도록 材料의 선택 및 벽의 두께가 구조역학적으로 결정되어야 한다. 그러나 로켓 노즐은 고온하에서 높은 熱流速을 동반하여 作動하게 되고, 따라서 로켓 노즐이 過熱狀態가 되며 고온상태에서는 材料의 強度를 잃게 되므로 로켓 모터노즐의 材料는 항복응력이 높으며 熱傳導率이 적고 가벼운(밀도가 적은) 材料가 이상적이거나 이러한 조건을 갖춘 材料는 없다.

따라서, 實際 로켓 노즐 設計에서 응력을 담당하는 고응력材料의 안쪽에 熱傳導率이 낮은(열저항이 높은) 材料를 적층하여 응력을 담당하는 材料의 加熱을 막고 연소가스로부터 노즐표면의 腐蝕 및 侵蝕을 방지하기 위하여 그 안쪽에 腐蝕에 강한 材料를 積層하는 방법을 이용한다. 그러나 주어진 운전조건에 대한 최적의 材料의 선택 및 벽 두께의 決定은 용이한 일이 아니다.

이 研究에서는 이와 같이 積層된 로켓 노즐벽에서의 熱傳導方程式을 정해진 제약조건(constraint) 안에서 최적화방법(optimization method)으로 풀어 積層材料 각층의 材料 및 두께를 決定하고자 한다.

II. 理論 解析

II-1. 목적함수의 支配方程式

로켓 노즐 벽에서의 단위면적에 대한 熱傳導는 cornelisse 등(1979)에 의하면 일차원으로 간주할 수 있으며,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho C}{K} \frac{\partial T}{\partial t} \dots\dots\dots(1)$$

이고 노즐 내측벽에서 대류열전달 계수는 h_F , 노즐 외측벽에서의 대류열전달 계수는 h_B 이며 경계조건은 다음과 같다.

$$-K \frac{\partial T}{\partial x} + h_F T = h_F T_g \quad \text{at } x = 0, \quad K \frac{\partial T}{\partial x} + h_B T = h_B T_\infty \quad \text{at } x = t_c.$$

II-2. 數值 解析

積層材料의 각층에서의 熱傳導率(열저항)은 다르므로 各層에서의 열저항을 분리하여 Fourier

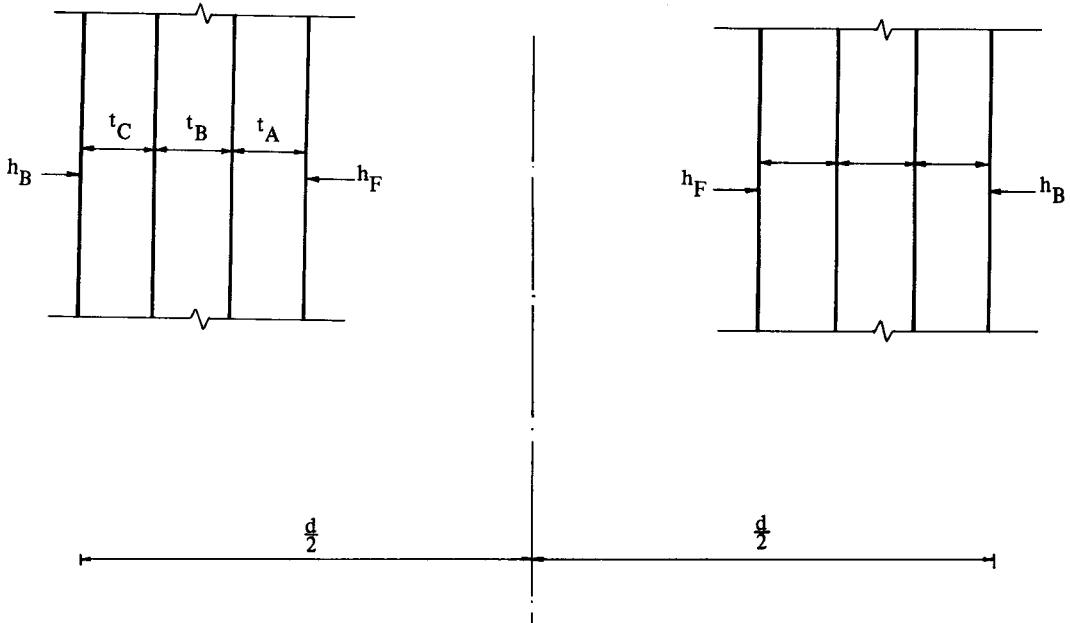


그림 1. 노즐벽의 기하학적 표시

式으로 표시하면 다음과 같다.

式 (1)을 x 축에 대하여 중위차분하면

$$\frac{T_{i+1} - T_i - T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} = \frac{\rho C}{K} \cdot \frac{\Delta T_i}{\Delta t}$$

$$T_{i-1} - T_i + T_{i+1} - T_i = \left(\frac{\Delta x}{2K} + \frac{\Delta x}{2K} \right) \Delta x \frac{\rho C \Delta T}{\Delta t} \dots\dots\dots (2)$$

여기서 $\left(\frac{\Delta x}{2K} + \frac{\Delta x}{2K} \right)$ 는 열저항이므로 앞에 說明한 境界條件을 갖는 적층재 내에서의 열저항은 Holman(1981)에 의하여

$$R_{tL} = \frac{\Delta x_{i-1}}{2K_{i-1}} + \frac{\Delta x_i}{2K_i} + \frac{1}{h_F}$$

또는,

$$R_{tR} = \frac{\Delta x_i}{2K_i} + \frac{\Delta x_{i+1}}{2K_{i+1}} + \frac{1}{h_B}$$

이고, 매질 내에서는 film heat transfer coefficient $\frac{1}{h}$ 은 영이다. 따라서 (2)식을 각층의 열 저항으로 나누어 표시하면

$$\frac{T_{i-1} - T_i}{\frac{\Delta x_{i-1}}{2K_{i-1}} + \frac{\Delta x_i}{2K_i} + \frac{1}{h_F}} + \frac{T_{i+1} - T_i}{\frac{\Delta x_i}{2K_i} + \frac{\Delta x_{i+1}}{2K_{i+1}} + \frac{1}{h_B}} = 9C\Delta x \frac{\Delta T_i}{\Delta t} \dots\dots\dots (3)$$

로서 Fourier eq.형으로 표시할 수 있다.

모든 $\Delta x, \Delta t$ 의 Parmmeter에 대하여 수치해의 안정성이 있는 Crank Nicolson의 방법(Gerald 1978)를 이용하면

Crank Nicolson 유한차분방정식을求하기 위하여 式 (1)을 t_n 및 t_{n+1} 에서 x 軸에 대하여 중위차분하여 평균하고 時間 t 에 대하여 중위차분하면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{T_{i-1, n} - 2T_{i, n} + T_{i+1, n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i-1, n+1} - 2T_{i, n+1} + T_{i+1, n+1}}{\Delta x^2} \right) \\ & = \frac{\rho C}{K} \left(\frac{T_{i, n+1} - T_{i, n}}{\Delta t} \right) \end{aligned}$$

정리하면,

$$\begin{aligned} & T_{i-1, n} - 2T_{i, n} + T_{i+1, n} + T_{i-1, n+1} - 2T_{i, n+1} + T_{i+1, n+1} \\ & = 2 \frac{\rho C}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta x^2}{K} (T_{i, n+1} - T_{i, n}) \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

여기서

$$\frac{1}{r} = \frac{\rho C}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta x^2}{K} \dots\dots\dots (5)$$

라 하면 式(4)로부터

$$\begin{aligned} & r T_{i-1, n} - 2r T_{i, n} + r T_{i+1, n} + r T_{i-1, n+1} - 2r T_{i, n+1} + r T_{i+1, n+1} \\ & = 2T_{i, n+1} - 2T_{i, n} \end{aligned}$$

정리하면

$$-rT_{i-1,n+1} + 2rT_{i,n+1} + 2T_{i,n+1} - rT_{i+1,n+1} = rT_{i-1,n} - 2rT_{i,n} + 2T_{i,n} + rT_{i+1,n}$$

이고

$$-rT_{i-1,n+1} + 2(1+r)T_{i,n+1} - rT_{i+1,n+1} = rT_{i-1,n} + 2(1-r)T_{i,n} + rT_{i+1,n}$$

이다. 양변을 $1/2$ 하면

$$-\frac{r}{2}T_{i-1,n+1} + \left(1 + \frac{r}{2} + \frac{r}{2}\right)T_{i,n+1} - \frac{r}{2}T_{i+1,n+1} = \frac{r}{2}T_{i-1,n} + \left(1 - \frac{r}{2} - \frac{r}{2}\right)T_{i,n} + \frac{r}{2}T_{i+1,n} \dots\dots\dots (6)$$

Crank Nicolson constant를 求하기 위하여 式 (5)로부터

$$\frac{1}{r} = \frac{\rho C}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta x^2}{K} = \frac{\rho C}{\Delta t} \Delta x \frac{\Delta x}{K}$$

이고 여기서 $\frac{\Delta x}{K}$ 는 열저항이고 積層材料의 各層의 열저항이 다르므로

$$\frac{1}{r} = \frac{\rho C}{\Delta t} \Delta x \left(\frac{1}{K_i} \cdot \frac{\Delta x_i}{2} + \frac{1}{K_{i+1}} \cdot \frac{\Delta x_{i+1}}{2} + \frac{1}{h_B} \right)$$

$\Delta x_i = \Delta x_{i+1} = \Delta x$ 이면

$$\frac{1}{r} = \frac{\rho C \Delta x^2}{\Delta t} \left(\frac{0.5}{K_i} + \frac{0.5}{K_{i+1}} + \frac{1}{h_B \Delta x} \right)$$

이다. 그러므로

$$r = \frac{\Delta t}{\rho C \Delta x^2} \frac{1}{\frac{0.5}{K_i} + \frac{0.5}{K_{i+1}} + \frac{1}{h_B \Delta x}} \quad \text{이고}$$

$$W = \frac{\Delta t}{\rho C \Delta x^2} \quad \text{라 하면}$$

$$r = \frac{W}{\frac{0.5}{K_i} + \frac{0.5}{K_{i+1}} + \frac{1}{h_B \Delta x}}$$

또는,

$$r = \frac{W}{\frac{0.5}{K_{i-1}} + \frac{0.5}{K_i} + \frac{1}{h_F \Delta x}} \quad \text{이다.}$$

그러므로 式 (6)에 代入하면

$$\begin{aligned} & \left[\frac{-0.5 W}{\frac{0.5}{K_{i-1}} + \frac{0.5}{K_i} + \frac{1}{h_F \Delta x}} \right] T_{i-1, n+1} + \left[1 + \frac{0.5 W}{\frac{0.5}{K_{i-1}} + \frac{0.5}{K_i} + \frac{1}{h_F \Delta x}} \right. \\ & \left. + \frac{0.5}{\frac{0.5}{K_i} + \frac{0.5}{K_{i+1}} + \frac{1}{h_B \Delta x}} \right] T_{i, n+1} + \left[\frac{-0.5 W}{\frac{0.5}{K_i} + \frac{0.5}{K_{i+1}} + \frac{1}{h_B \Delta x}} \right] T_{i+1, n+1} \\ & = \left[\frac{0.5 W}{\frac{0.5}{K_{i-1}} + \frac{0.5}{K_i} + \frac{1}{h_F \Delta x}} \right] T_{i-1, n} + \left[1 - \frac{0.5 W}{\frac{0.5}{K_{i-1}} + \frac{0.5}{K_i} + \frac{1}{h_F \Delta x}} \right. \\ & \left. - \frac{0.5 W}{\frac{0.5}{K_i} + \frac{0.5}{K_{i+1}} + \frac{1}{h_B \Delta x}} \right] T_{i, n} + \left[\frac{0.5 W}{\frac{0.5}{K_i} + \frac{0.5}{K_{i+1}} + \frac{1}{h_B \Delta x}} \right] T_{i+1, n} \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

式 (7)로부터

$$A_i T_{i-1, n+1} + B_i T_{i, n+1} + C_i T_{i+1, n+1} = D_i, \quad i = 1, 2, 3 \dots \dots \dots (8)$$

단,

$$\begin{aligned}
 A_i &= \frac{0.5 W}{\frac{0.5}{K_{i-1}} + \frac{0.5}{K_i} + \frac{1}{h_F \Delta x}} \\
 B_i &= 1 + \frac{-0.5 W}{\frac{0.5}{K_{i-1}} + \frac{0.5}{K_i} + \frac{1}{h_F \Delta x}} + \frac{0.5 W}{\frac{0.5}{K_i} + \frac{0.5}{K_{i+1}} + \frac{1}{h_B \Delta x}} \\
 C_i &= \frac{0.5 W}{\frac{0.5}{K_i} + \frac{0.5}{K_{i+1}} + \frac{1}{h_B \Delta x}} \\
 D_i &= \left[\frac{0.5 W}{\frac{0.5}{K_{i-1}} + \frac{0.5}{K_i} + \frac{1}{h_F \Delta x}} \right] T_{i-1, n} + \left[1 - \frac{0.5 W}{\frac{0.5}{K_{i-1}} + \frac{0.5}{K_i} + \frac{1}{h_F \Delta x}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{0.5 W}{\frac{0.5}{K_i} + \frac{0.5}{K_{i+1}} + \frac{1}{h_B \Delta x}} \right] T_{i, n} + \left[\frac{0.5 W}{\frac{0.5}{K_i} + \frac{0.5}{K_{i+1}} + \frac{1}{h_B \Delta x}} \right] T_{i+1, n}
 \end{aligned} \dots (9)$$

II - 3. 수치계산

제한조건 (constraint) 으로서 로켓 노즐내벽의 부식방지를 위한 최소두께는 a 이상이어야 하고 3層 積層材 全體의 두께는 b 이하이어야 한다.

즉, 그림1에서

$$t_A \geq a \dots \dots \dots (10)$$

$$t_A + t_B + t_c \leq b \dots \dots \dots (11)$$

이며 응력을 담당하는 두께 t_c는 다음과 같이 求할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 2\sigma t_c &= Pd \\
 t_c &= \frac{Pd}{2\sigma} \dots \dots \dots (12)
 \end{aligned}$$

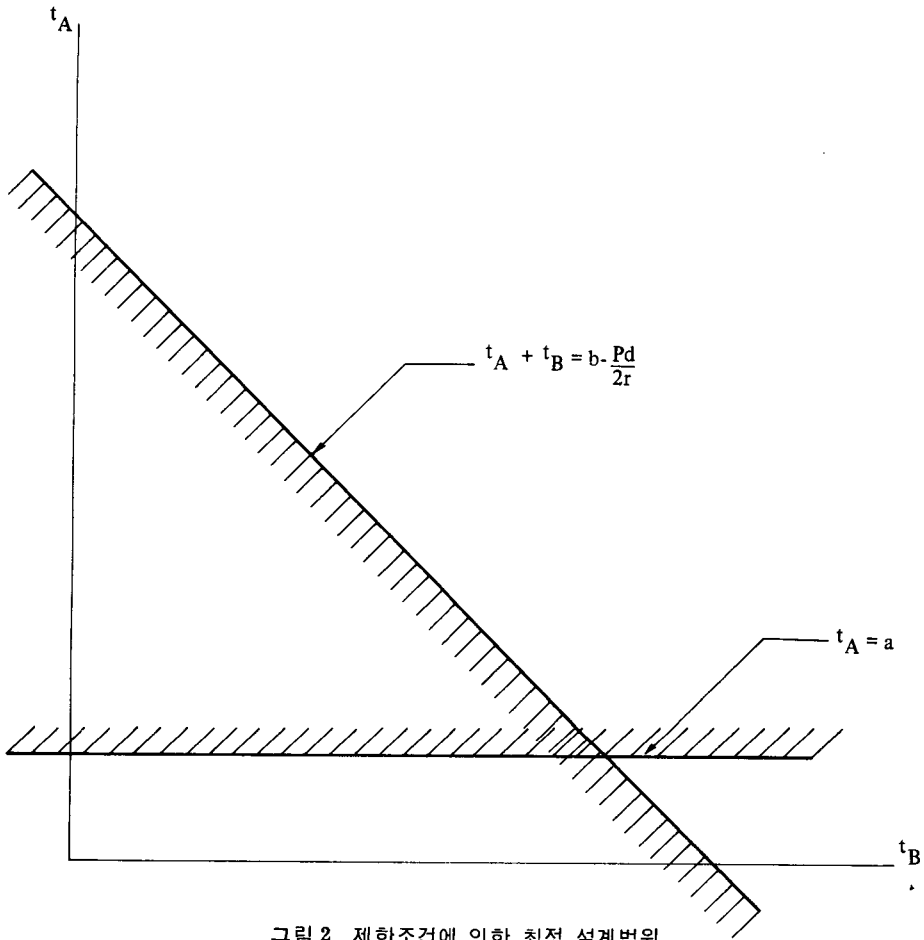


그림 2. 제한조건에 의한 최적 설계범위

그러므로 최적조건의 解는 그림 2와 같이

$$t_A \geq a$$

$t_A + t_B \leq b - \frac{Pd}{2\sigma}$ 의 범위인 사선부분 안에 存在한다.

최적조건의 解를 求하기 위하여 data로서 표1과 같이 노즐材料들의 熱傳導率, 質量, 比熱, 最大溫度, 許容最大應力을 Parker(1963)의 자료를 참조하여 入力하였으며 로켓의 작동시간은 25초로 가정하였다.

표 I. 재료의 물성치

Material	Thermal conductivity (K) Cal/sec-cm ² °C	Density (ρ) gm/cc	Specific heat Cal/g °C	Allowable Stress at Tmax g/cm ²	Maximum Temperature °C
1. Tungsten (W)	0.4795	19.7912	0.0321	0.0	3315
2. Graphite (C)	0.3101	2.3251	0.25	0.0	3315
3. Alumina (Al ₂ O ₃)	0.0103	4.0689	0.20	0.0	1760
4. Aluminum (7178-T6)	0.5167	3.0171	0.205	2812360	343
5. Molybdenum (½% Ti)	0.3514	10.1862	0.06	1406180	1315
6. Plastic laminate	0.0022	2.0760	0.16	4570085	93

로켓 모터 노즐의 규격 및 운전조건 Rohsenow와 Nartnett(1973)과 Sutton과 Ross(1976)의 값으로부터 표 2와 같이 노즐의 직경, 노즐압력, 가스 온도, 가스의 film heat transfer coefficient(내측표면) 및 외측온도, 외측 film heat transfer coefficient를 入力하여 그림 3의 flow chart와 같이 앞에서 求한 Crank Nicolson의 차분方程式을 利用하여 各 材料의 조합에 대하여 各層의 溫度를 求하고 密度를 比較하여 최적 두께 및 材料를 결정하였다.

표 II. 노즐규격 및 운전조건

Description	Notation	Input data	Unit
Dia. of Nozzle	d	35	cm
Total wall thickness	b	5	cm
Anti corrosion layer thickness	a	0.5	cm
Nozzle pressure	P	80	kg/cm ²
Gas Temperature	Tg	3000 3500	°C
Ambient Temperature	T _∞	10	°C
Heat transfer coefficient at inside wall	h _f	0.7030×10 ⁻⁴	Cal/sec-cm ² °C
Heat transfer coefficient at outside wall	h _B	0.7030×10 ⁻⁵	Cal/sec-cm ² °C

III. 결과 및 검토

本 研究에서 入力한 노즐벽의 材料 중 텅스텐(Tungsten)은 腐蝕 및 侵蝕에 강하므로 내측 표면의 腐蝕 및 侵蝕防止用的 내벽층(inner layer) 材料로서 선택하였다.

그라파이트(graphite), 알루미나(alumina.), plastic laminate는 熱傳導率이 적으므로 응력층으로의 熱傳導를 防止하기 위한 단열층인 중간층(intermediate layer)의 材料로 적합하나 plastic

laminate는 許容最大溫度가 낮은 결점이 있다. 또한, 그래파이트(graphite)와 알루미나(alumina)는 열저항은 많아서 좋으나 許容응력이 적어서 응력담당에는 부적당하다. 연소가스의 溫度가 3000°C 및 3500°C일 때 노즐벽으로부터 가열되어 응력을 담당하는 노즐 외벽층(outer layer)의 溫度가 허용응력을 보증하는 최대온도에 도달할 때까지의 時間을 25초로 하여 各層의 재료조합 및 各층의 두께를 解析한 結果는 표3과 같다.

표Ⅲ. 노즐벽의 재료 및 두께의 조합

Operating Temperature		3000°C		3500°C	
Optimal Design		Best design	2nd design	Best design	2nd design
inner layer	Material	Tungsten	Tungsten	Tungsten	Tungsten
	Thickness (cm)	0.5	0.793	0.5	1.111
inter mediate layer	Material	Graphite	Alumina	Graphite	Alumina
	Thickness (cm)	1.428	0.159	1.904	1.593
outer layer	Material	Molybdenum	Molybdenum	Molybdenum	Molybdenum
	Thickness (cm)	1.111	1.111	1.111	1.111
Minimum Weight (kg)		2.91	3.19	3.082	3.938

주어진 제한조건 (constraint) 및 작동조건에 대하여 내벽의 材料로 선정된 텅스텐(tungsten)을 제외한 5종의 材料 중 最上の 재료조합은 단열층인 중간층(intermediate layer)의 材料는 그래파이트(graphite)이고 응력층인 외벽층(outer later)의 材料는 모리브데늄(molybdenum)이었으며 차선의 재료조합은 단열층의 材料에 알루미나(alumina)이고 응력층에 몰리브데늄(molybdenum)이 선정되었다.

最上の 재료조합에서 단열층의 재료로 그래파이트(graphite)가 선정된 것은 材料의 最大許容溫度가 그래파이트가 알루미나보다 더 높고 비중량이 적기 때문이다.

응력층의 두께는 작용압력에 의하여 材料力學적으로 계산되는 값이므로 일정하며 最上の 재료조합의 경우 연소가스의 溫度가 3000°C에서 3500°C로 증가함에 따라 단열층의 두께가 1.428 cm에서 1.904 cm로 증가하는 것을 볼 수 있으며, 차선 재료조합의 경우에서도 단열층의 두께가 0.159 cm에서 1.159 cm로 증가하며 耐蝕 및 耐磨耗를 위한 내벽층(inner layer)의 두께도 0.793 cm에서 1.111 cm로 증가함을 볼 수 있다. 따라서, 로켓노즐벽 전체의 두께는 最上の 設計인 경우 연소가스의 溫度가 3000°C일 때는 3.039 cm에서 연소가스의 溫度가 3500°C로 증가함에 따라 3.515 cm로 증가하게 되며, 따라서 材料의 중량도 2.912 kg/cm에서 3.082 kg/cm로 증가하게 된다. 또한 차선의 設計인 경우에서도 연소가스가 3000°C일 때 2.063 cm에서 연소가스의 溫度가 3500°C로 증가함에 따라 3.381 cm로 증가하게 되며, 따라서 중량도 3.187 kg에서 3.938 kg/cm로 증가하게 된다.

最上の 設計보다도 차선의 設計에서 노즐벽의 두께가 더 얇은 것은 단열층의 材料가 그래파이트(graphite)보다 알루미나(alumina)가 더 熱傳導率이 낮기 때문이나 비중량이 크기 때문에 노즐의 중량은 더 커짐을 알 수 있다.

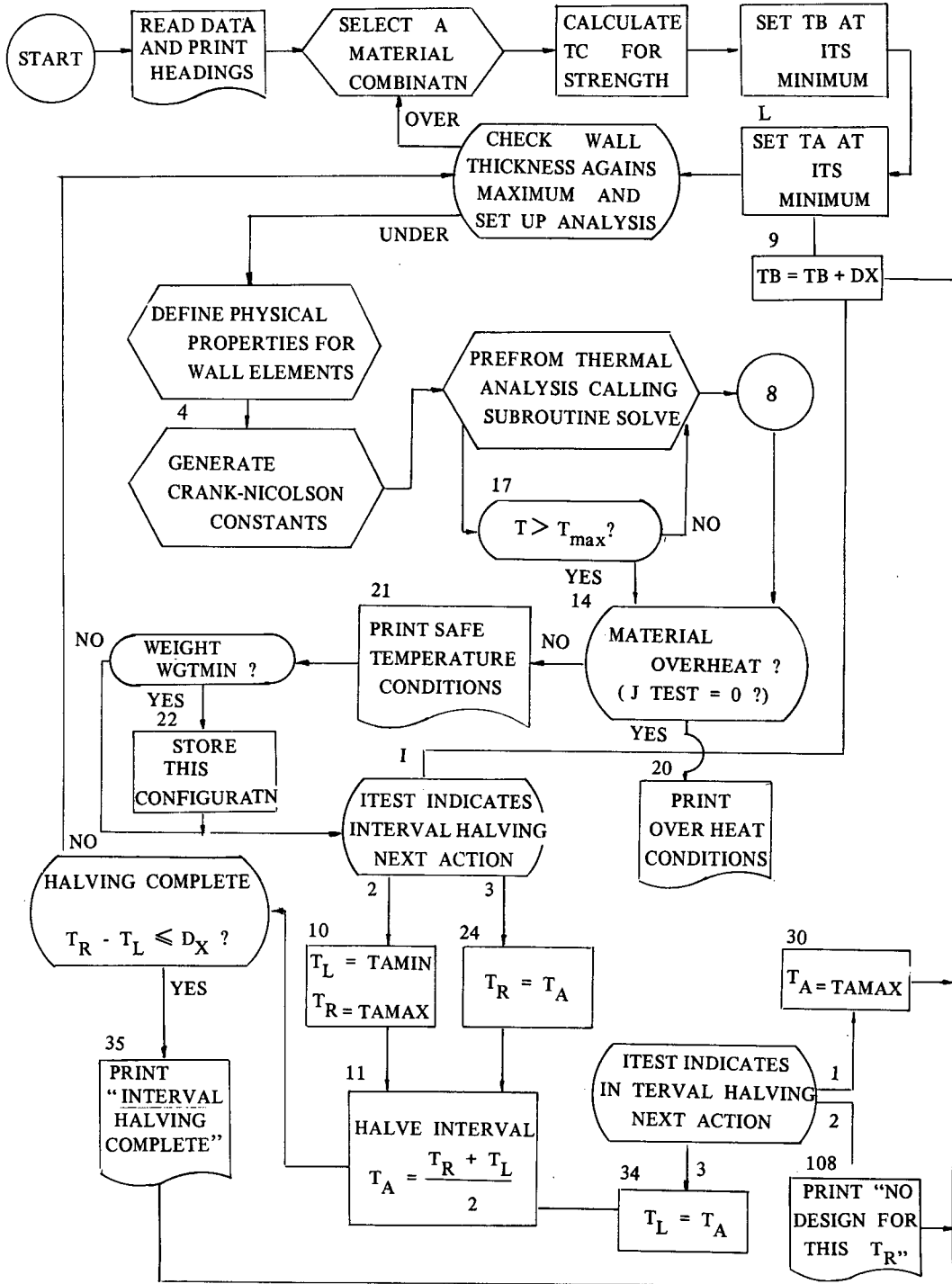


그림 3. 로켓 노즐설계를 위한 플로우차트

IV. 結 論

로켓 노즐에서 積層材料의 선택 및 材料 두께의 결정을 위하여 주어진 제한조건 안에서 各 재료조합에 대하여 두께를 變化시키면서 熱傳導 解析을 하여 과열 여부를 판정하고, 응력담당재료가 과열되지 않는 범위 내에서의 로켓 노즐의 최소중량에 대한 재료조합 및 두께를 조사한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

1. 이 研究의 熱傳導解析에 의하여 各層에 대한 最適의 재료조합 및 두께를 정할 수 있다.
2. 이 研究의 入力條件에 대하여 최적조건은 연소가스의 溫度가 3000°C인 경우 단열층의 材料는 그래파이트로서 두께는 1.428cm이고 연소가스의 溫度가 3500°C일 때는 두께가 1.904cm이며 응력층의 材料는 물리브덴이고 두께는 1.111cm이다.

참고문헌

- Cornelisse, J. W., Schoyer, H. F. R., and Waker, K. F., 1979, *Rocket Propulsion and Space Flight Dynamics* (Pitman Publ. Ltd.: London), pp. 162-164.
- Gerald, C. F., 1978, *Applied numerical Analysis* (Addison-Wesley Publ. Co.: Massachusetts), pp. 400-419.
- Holman, J. P., 1981, *Heat Transfer* (McGraw-Hill Book Co.: N. Y.), pp. 24-32.
- Parker, E. R., 1963, *Materials for Missiles and Spacecraft* (McGraw-Hill Book Co.: N.Y.).
- Rohsenow, W. M. and Hartnett, J. P., 1973, *Handbook of Heat Transfer* (McGraw-Hill Book Co.: N. Y.), pp. 3-20.
- Sutton, G. P. and Ross, D. M., 1976, *Rocket Propulsion Elements* (John Wiley and Sons Inc.: N. Y.), p. 272.