

異種金屬間의 磨滅에 關한 理論的 研究

辛 玟 教* · 李 友 桓**

A Study on Theoretical Analysis of Wear between Different Metals.

By M. K. Shin, W. H. Reigh

Abstract

The perfect and accurate methods to control the wear are not made clear so far. For this phenomenon only mating surface has been studied.

In order to control the wear the essence of it has to be made clear.

It is reported that adhesive wear might occur as a result of plastic deformation, the fracture and removal or transfer asperities on close contacting surfaces.

On this view point the plastic flow was attempted to compare with fluid or electromagnetic flow.

The partial differential equations of equilibrium for the plane strain deformation will make use of the method of characteristics.

The characteristic curves or characteristics of the hyperbolic equation coincide with the slip lines by R. Hill's papers.

By Hencky's stress equation, it is evident that if P and ϕ are prescribed for a boundary condition then it may be possible to proceed along constant α and β lines to determine the value of the hydrostatic pressure everywhere in the slip line field net work.

A wedge formation mechanism has been considered for an explanation of this matters.

The analysis shows that there is a critical value, which depends on the hardness ratio and the shear stress on the interface, for the top angle of asperity is less than this critical value, the asperity can yield plastically despite of being harder than the mating surface.

* 正會員, 韓國海洋大學

** 正會員, 東義工專大

Nomenclature

- a : 接觸域의 半徑
- r : 球의 曲率半徑
- E_1, E_2 : 윗部分 및 밑部分의 從彈性 係數
- A : 接觸面積
- W : 荷重
- P_m : 平均壓力
- Y : 彈性限度
- C : 常數
- ϕ : X 軸으로 부터 α 線의 反時計方向의 角度
- x, y : 直角座標系
- P_1 : 應力不連續線이 있는 領域의 靜水壓
- P_2 : 그 反對쪽 領域의 靜水壓
- N : 法線方向의 荷重
- F : 摩擦力
- θ_c : 두 金屬이 同時에 降伏할 때의 頂角
- ε_1 : 界面 AB 와 材料 1의 미끄럼 場과의 角
- ε_2 : 界面 AB 와 材料 2의 미끄럼 場과의 角
- α, β : 미끄럼線
- k_1, k_2 : 材料 1, 2의 臨界剪斷應力
- H_1, H_2 : 材料 1, 2의 硬度
- r : 硬度比 $\frac{H_2}{H_1}$
- f : $\tau/k_2, 0 \leq f \leq 1$
- $(\theta_c)_{f=0}$: f 가 0일 때의 頂角
- σ_x, σ_y : 直交 座標系에서의 x, y 의 應力成分
- τ_{xy} : x 축에 直交하고 Y 축에 平行하게 作用하는 剪斷應力
- $\pm k$: 最大剪斷應力
- P : 靜水壓力
- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: 主應力
- σ_m : 平均應力
- C_1 : 常數, α 線을 따른 一定值
- C_2 : 常數, β 線을 따른 一定值
- σ_n : 法線方向의 應力
- σ_t : 接線方向의 應力
- θ : 미끄럼線과 應力不連續線과의 사이 角

1. 序 論

磨滅을 制御하기 위하여 磨滅의 機構를 正確히 알 必要가 있다.

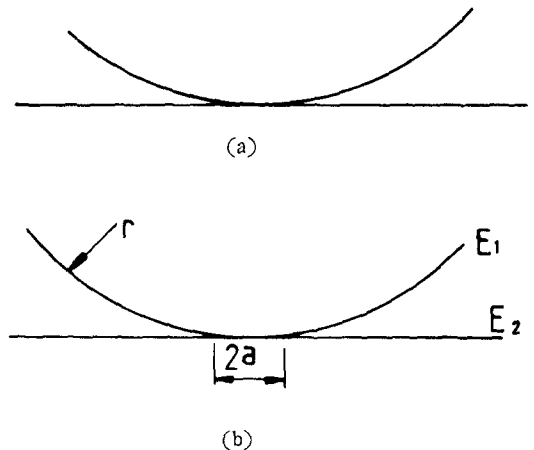
金屬表面을 연마하면 그 表面 凹凸은 分子의 眼目으로 볼 때 마치 Alps 山脈같다.¹⁾

두 面은 山과 같은 頂點에서 接觸하므로 眞實接觸面積은 대단히 작다.²⁾

이 生覺에 따르면 面에 極히 작은 荷重을 加할때 일지라도 眞實接觸面에서의 壓力은 클 것이고 固體間의 磨擦이나 表面損傷 및 固體끼리의 相互作用을 하고 있는 것은 眞實接觸面의 아주 작은 領域이라는 것을 알 수 있다.

荷重이 增加함에 따라서 表面 凹凸의 山은 차츰 뭉개져서 넓은 面積에 荷重이 分布하게 된다.

이 問題에 對하여 두 面이 荷重 W 로 接觸할 때 Herz의 式³⁾에 따라서 接觸初에는 彈性變形을 한다고 보고 接觸域이 半徑 a 인 圓이 되면(Fig. 1 참조)

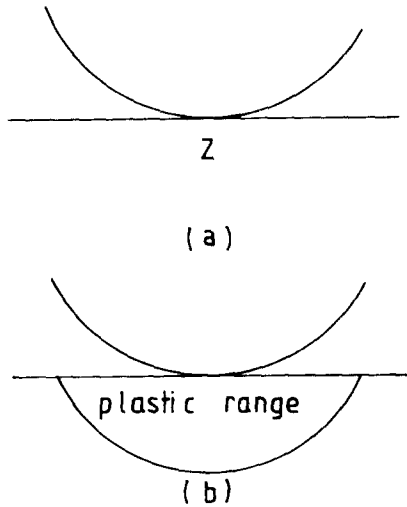


(a) The contact under no load.
(b) The contact under a limited load.

Fig. 1. The contact between a spherical plane and a plane. If the load is not so big, the deformation is elastic. The range of the contact is given by Herz formula.

$$a = 1.1 \left\{ \frac{Wr}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right\}^{1/3} \quad (1)$$

即 이 段階에서는 接觸面積 $A = \pi a^2$ 은 $W^{2/3}$ 에 比例하고 接觸面上的의 平均壓力 $P_m = W/\pi a^2$ 은 $W^{1/3}$



- (a) When average mean pressure is about 1.1 $Y_m \approx 1.1Y$, the plastic deformation is started from the point Z positioned under the surface.
- (b) After starting to deform all material around indenter will flow plastically. In this step, $P_m \approx 3Y$

Fig. 2. Plastic deformation of plane surface when harder sphere is pressed to softer plane than sphere.

에 比例하는 것이 된다.

그러나 그 뒤 Timoshenko⁴⁾는

$$P_m = 1.1Y \tag{2}$$

가 되었을 때 경도가 적은 下部平面金屬이 彈性限度를 넘는다고 하였다.

이 段階에서 Z點 附近의 金屬은(Fig. 2(a)) 塑性變形을 일으키고 降伏때문에 原狀態로 안 돌아온다. 이 領域以外的 金屬은 아직 塑性條件에 도달하지 아니 했으므로 그 變形은 彈性變形이다. 그래서 荷重을 除去하면 極히 작은 殘留變形이 남는다.⁵⁾ 더욱 荷重을 增加해가면 接觸面積 A와 平均壓力 P_m 도 같이 增加하여 Z點 附近의 塑性域은 급격히 커져서 接觸域둘레의 材料의 大部分이 塑性變形을 일으켜서 流動하는 것과 같은 段階가 된다(Fig. 2(b))

이 段階에서 Hencky⁶⁾와 Ishlinsky⁷⁾의 理論研究에서

$$P_m = CY \tag{3}$$

가 된다. 여기서 C의 값은 大略 3에 가깝다.

圓錐狀 및 角錐의 凹凸에 對해서 降伏壓力은 變形量에 無關係이며 眞實接觸面積은 荷重 W에 比例하며 半球狀의 凹凸에 對해서 高度로 加工된 金屬의 경우에만 (3)式이 成立한다.⁶⁾

그래서 여러가지의 表面 凹凸에 對해서 眞實接觸面積은 荷重에 比例한다고 생각하여

$$A = \frac{1}{P_m} W \tag{4}$$

이것에 對해서, 彈性變形일 경우에는 (1)式에서 본바와 같이

$$A = CW^{2/3} \tag{5}$$

이 成立한다.

또 Tomlinson은 두 個의 非潤滑固體表面에 있어서 表面分子間의 相互作用과 磨擦의 相互作用을 求하려고 한 興味있는 일을 했다. 그는 分子는 서로 相對의 原子의 場에 들어 갔다가 떨어져 나왔다가 할 때 消費는 에너지에 의하여 磨擦이 일어난다고 생각했다.⁹⁾

實驗에 의하면 表面 凹凸의 突起部에 作用하는 壓力때문에 金屬面에는 局部的인 溶着이 일어난다.¹⁰⁾ 이 溶着되었던 것이 떨어져 나오는 溶着磨滅은 두 金屬이 接觸點에 있어서의 塑性變形과 破壞의 結果라고 볼 수 있다.¹¹⁾

이러한 見地에서 磨滅의 一部分의인 金屬表面間의 關係로서만 볼 수 없으므로 塑性學의 힘을 빌려서 應力이 流動하는 것과 같은 마치 流體나 電磁氣가 移動하는 것과 같은 미끄럼場 理論을 導入하여 三軸應力下에서 單純化 된 模型을 만들어 解析 하였다.

이 磨滅現象을 解析하기 위하여 硬度가 큰 金屬을 위에 硬度가 적은 金屬을 밑에 놓고 서로 磨擦시킬 때 두 金屬사이의 硬度가 서로 相異하면 磨滅은 軟質의 金屬에만 일어나는 것으로 한다.

接觸磨擦은 두 金屬이 剛完全塑性體라고 假定을 하고 썩기 모양의 누름쇠의 頂角과 두 金屬의 硬度사이의 關係를 두 材料가 同時에 降伏할 때의 미끄럼線場의 模型을 만들어 各各의 均一應力 미끄럼線場과 有心扇形場이 形成될 條件과 誘導된 頂角과 硬度比의 式에서 臨界頂角의 解가 各 條件들을 滿足하는가를 檢討해서 解析을 했다.

2. 理論 解析

2.1 三軸應力下에서 미끄럼場 理論의 基本式

塑性領域에서는 Fig. 3에 表示하는 바와 같이 ϕ 를 X軸으로 부터 α 線의 反時計方向의 角度라 하면 任意의 直角座標系에서 應力成分 σ_x, σ_y 그리고 τ_{xy} 는

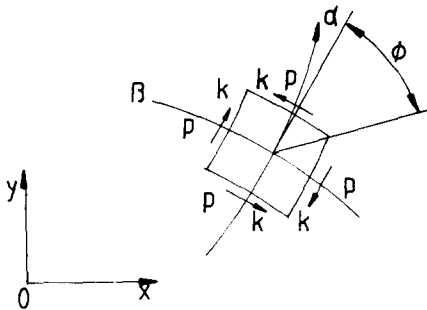


Fig. 3. Stresses on a small curvilinear element bounded by slip lines.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -P - k \sin 2\phi \\ \sigma_y &= -P + k \sin 2\phi \\ \tau_{xy} &= k \cos 2\phi \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(6)의 첫식은 x 에 關해서 微分하면

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} + 2k \cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

塑性變形領域에서 흐름 平面内の 最大剪斷應力은

$$\tau_{max} = k = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} = \left\{ \frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

物體要素에 作用하는 힘의 平衡에 關한 微分方程式

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j = 0 \quad \left(= \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right) \quad (8)$$

塑性變形을 하는 동안에는 物體力이 微少하거나 없어지고 또한 慣性力이 없는 靜的運動으로 認定되는 경우에는

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

直角座標系에 關하여 物體力이 크지 않거나 없고, 또 慣性力이 無視될 때 힘에 對한 微分方程式 (9)式은 (x, y) 面 내 平面變形에 對해서 Z 에는 無關하므로 이식은

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(10)의 첫式에서 $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}$

$$(k \cos 2\phi) = 2k \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

따라서

$$2k \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} + 2k \cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

가 된다. 같은 方法으로 (6)의 둘째 式을 y 에 關해서 微分하면

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} - 2k \cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

이 되고 (10)의 둘째 式에서

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (k \cos 2\phi)$$

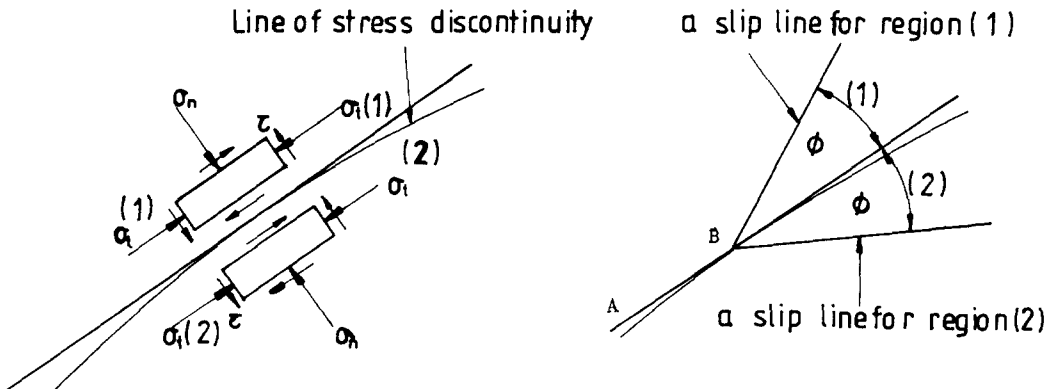


Fig. 4. Plastic stress discontinuity across a surface.

$$= 2k \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

따라서

$$2k \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} - k \cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

(11) 및 (12)式은 剛完全塑性材料의 平面變形에 對한 平衡偏微分方程式이며 또한 雙曲線이다.

이 方程式들의 正確한 解는 特性曲線群法에 의하여 求할 수 있다. 雙曲線方程式의 特性曲線群은 이 경우 미끄럼線과 一致한다.

만일 어떤 주어진 點에서 x, y 軸들을 이 點에서의 α 및 β 線들과 一致하도록 선택하면 $\phi=0$ 이고 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{6}{\partial y} = \frac{6}{\partial \beta}$ 이다.

따라서 (11) 및 (12)式은 다음 偏微分方程式으로 簡單하게 된다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} + 2k \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} - 2k \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \alpha} + 2k \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial \beta} - 2k \frac{\partial \phi}{\partial \beta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

이 式들이 成立하기 위한 點 P 는 任意이므로 (13)式들은 한 方向에서만 導函數들을 包含하고 있으므로 이들을 積分해서 (14)式들을 얻는다.

$$\begin{aligned} P + 2k\phi &= C_1 \quad (\alpha\text{線을 따른 一定值}) \\ P - 2k\phi &= C_2 \quad (\beta\text{線을 따른 一定值}) \end{aligned} \quad (14)$$

常數 C_1 및 C_2 의 값은 一般적으로 미끄럼線에 따라 다르다.

또한 應力不連續線이 Fig. 4와 같이 塑性域에 나타날 때 다음 關係를 얻는다.

$$|P_1 - P_2| = 2k \sin 2\phi \quad (15)^{13)}$$

2.2 削기모양의 누름쇠의 頂角의 臨界值

削기모양의 누름쇠로 平面에 壓入시킬 때 降伏狀態를 알기 위하여 Fig. 5에 表示하는 것과 같은 磨擦接觸模型을 使用했다.

이 模型은 硬度가 相對적으로 크고 그 角이 $0 < \theta < \pi$ 인 削기모양의 누름쇠가 法線荷重 N 로서 軟質의 平面을 누르고 또 磨擦力 F 로 AB 線에 따라 非潤滑狀態로 磨擦되고 있는 것을 나타낸다.

接觸應力 σ 와 剪斷應力 τ 는 그림에 表示한 화

살표 方向으로 AB 面에 作用한다고 하고 이 磨擦은 평면변형을 狀態下에서 두 金屬은 剛完全塑性體라고 假定을 해서 削기모양누름쇠의 頂角과 두 金屬의 硬度사이의 關係를 두 材料가 同時에 降伏할때에 對해서 調査했다.

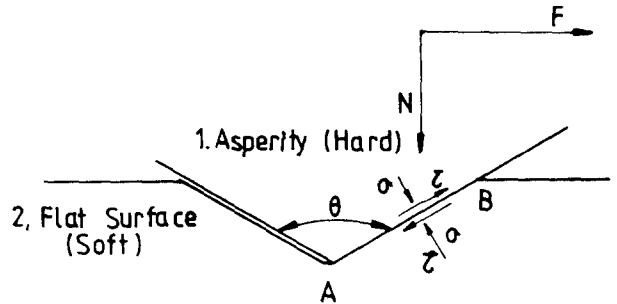


Fig. 5. Frictional contact model with a single asperity on a flat surface.

2.2.1 模型 1

처음 連續應力場에서 削기모양의 누름쇠와 平板表面사이에서 塑性域이 形成되어 있다고 생각하여 各各의 材料의 미끄럼線場은 두 個의 均一應力場과 하나의 有心扇形場으로 된다.

削기모양의 누름쇠와 平板의 表面사이에는 Fig. 6에 表示한 바와 같이 미끄럼場 $ABC_1D_1E_1$ 과 $ABE_2D_2C_2$ 를 가진다.

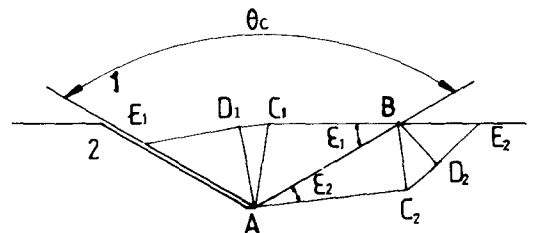


Fig. 6. Slip line fields for model 1.

두 金屬이 同時에 降伏할 때의 頂角을 θ_c 로 나타낸다.

Fig. 5에서 AB 面의 剪斷應力이 化살方向일 때는 다음 關係가 成立해야 한다.

$$0 \leq \epsilon_1 \leq \pi/4 \quad (16)$$

$$0 \leq \epsilon_2 \leq \pi/4 \quad (17)$$

材料 1의 塑性領域에서는 有心扇形場이 나타날 때 다음 關係를 滿足해야 한다.

$$\theta_c \geq 3/4\pi - \varepsilon_1 \quad (18)$$

같은 생각으로 材料 2의 塑性域에 有心扇形場이 나타날 때 다음 關係를 滿足해야 한다.

$$\theta_c \geq \pi/2 - 2\varepsilon_2 \quad (19)$$

結果의으로 Fig. 6에 表示된 미끄럼場에서는 다음의 幾何學인 條件이 要求된다.

$$\theta_c \geq 3/4\pi - \varepsilon_1 \quad (20)$$

AB 위의 接觸壓力 σ_1 과 剪斷應力 τ_1 은 材料 1의 미끄럼場理論을 使用하여 얻는다.

AE_1 은 無應力面이므로 $\angle D_1E_1A = \pi/4$ 이어야 한다. 그러므로 $\triangle AE_1D_1$ 의 靜水壓은 k_1 과 같아야 한다.

Hencky의 式에 따라서

$$P_1 = k_1(1 - 3/2\pi + 2\varepsilon_1 + 2\theta_c) \quad (21)$$

式(6)에서 $\sigma_y = -\sigma_1$ 으로 置換하면 다음 式을 얻는다.

$$\sigma_1 = k_1\{1 - 3/2\pi + 2\varepsilon_1 + \sin(2\varepsilon_1) + 2\theta_c\} \quad (22)$$

같은 方法으로 (6)式에서 $\tau_1 = \tau_{xy}$ 로 置換하면 剪斷應力 τ_1 은 다음과 같이 된다.

$$\tau_1 = k_1 \cos(2\varepsilon_1) \quad (23)$$

材料 2의 미끄럼場에서 σ_2 와 τ_2 도 같은 方法으로 求하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\sigma_2 = k_2\{1 - \pi/2 + 2\varepsilon_2 + \sin(2\varepsilon_2) + \theta_c\} \quad (24)$$

$$\tau_2 = k_2 \cos(2\varepsilon_2) \quad (25)$$

式(23)의 τ_1 과 式(25)의 τ_2 는 같아야 하기 때문에 이들을 τ 로 바꾸고 ε_1 과 ε_2 는 다음과 같이 表示된다.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \cos^{-1}\left(\frac{\tau}{k_1}\right) \quad (26)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \cos^{-1}\left(\frac{\tau}{k_2}\right) \quad (27)$$

式(26)과 式(27)을 式(22)와 式(24)에 代入하여

$$\sigma_1 = k_1\left[1 - \frac{3}{2}\pi + \cos^{-1}\left(\frac{\tau}{k_1}\right) + \left\{1 - \left(\frac{\tau}{k_1}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} + 2\theta_c\right] \quad (28)$$

$$\sigma_2 = k_2\left[1 - \frac{\pi}{2} + \cos^{-1}\left(\frac{\tau}{k_2}\right) + \left\{1 - \left(\frac{\tau}{k_2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \theta_c\right] \quad (29)$$

만일 두 材料가 同時에 降伏한다고 하면, σ_1

과 σ_2 는 같아야 하며 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ 로 한다. 그러므로 式(28)과 式(29)는 같다고 보아서

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{1 - 3\pi/2 + \cos^{-1}\left(\frac{\tau}{k_1}\right)}{1 - \pi/2 + \cos^{-1}\left(\frac{\tau}{k_2}\right)} + \frac{\left\{1 - \left(\frac{\tau}{k_1}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} + 2\theta_c}{\left\{1 - \left(\frac{\tau}{k_2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \theta_c} \quad (30)$$

壓入硬度는 臨界剪斷應力에 比例하므로 다음 關係를 얻는다.

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{k_2}{k_1} \quad (31)$$

만일 硬度比와 無次元界面剪斷應力은 式(32)와 (33)과 같이 나타낼 수 있으면

$$\frac{H_2}{H_1} = r \quad 0 < r \leq 1 \quad (32)$$

$$\frac{\tau}{k_2} = f \quad 0 \leq f \leq 1 \quad (33)$$

(30)式은 (34)式과 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

$$r = -\frac{1 - 3\pi/2 + \cos^{-1}rf + \frac{(1 - (rf)^2)^{1/2} + 2\theta_c}{(1 - f^2)^{1/2} + \theta_c}}{1 - \pi/2 + \cos^{-1}f} \quad (34)$$

(34)式을 θ_c 에 關하여 整理하면

$$\theta_c = \frac{1}{2-r} \left\{ \left[1 - \pi/2 + \cos^{-1}f + (1-f^2)^{1/2} \right] r - \left[1 - \frac{3}{2}\pi + \cos^{-1}(rf) + \left\{ 1 - (rf)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad (35)$$

式(35)은 Fig. 6에 表示한 바와 같은 미끄럼線場에서 同時에 두 材料가 降伏할 때 臨界頂角 θ_c 와 硬度比 r 와의 關係를 나타내고, 여기서 f 는 界面 AB에서의 剪斷應力이 式(33)에 表示한 平板材料의 臨界剪斷應力에 對한 比이다.

만일 式(20)의 幾何學的인 條件을 r 와 f 를 써서 다시 表示하면

$$\theta_c \geq 3/4\pi - \frac{1}{2} \cos^{-1}(rf) \quad (36)$$

그러므로 r 와 f 의 값이 주어졌을 때 (35)式으로부터 얻은 θ_c 의 값은 (36)式을 滿足하지 않고 同時에 降伏하는 狀態에서는 臨界頂角의 解는 얻을 수 없다.

그러므로 미끄럼線場의 새로운 模型이 必要

하다.

2.2.2 模型 2.

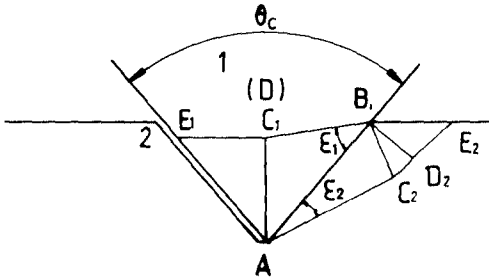


Fig. 7. Slip line field for model 2.

Fig. 7의 材料 1의 ABC_1E_1 領域은 하나의 不連續應力場이며 應力은 AC_1 線上에서 不連續이다. 그리고 材料 2에서 $ABE_2D_2C_2$ 領域은 連續應力場이다. AC_1 線은 $\angle BC_1E_1$ 을 二等分 한다. 이런 경우도 역시 ϵ_1 과 ϵ_2 의 범위는 式(16)과 (17) 로서 表示한 것과 같다.

材料 1의 미끄럼線場에서 有心扇形場을 가지지 않기 위해서는 다음關係式을 滿足해야 한다.

$$\theta_c \leq 3/4\pi - \epsilon_1 \quad (37)$$

세기모양 領域 BAE_1 에서 應力不連續線 AC_1 이 存在하기 위해서는(強弱의 解가 存在해야 한다)

$$\theta_c \geq \pi/4 - \epsilon_1 \quad (38)$$

이 滿足되어야 한다.

또 有心扇形場이 材料 2의 미끄럼線場에서 만들어지기 위해서는 式(19)가 滿足되어야 한다.

만일 式(19), (37)과 (38) 領域을 고려한다면 Fig. 7에서 表示한 미끄럼線場이 形成되기 위해서 다음과 같은 幾何學的인 條件이 必要하다.

$$\frac{\pi}{2} - 2\epsilon_2 \leq \theta_c \leq \frac{3}{4}\pi - \epsilon_1 \quad (39)$$

界面 AB 에서의 接觸壓力 σ_1 과 剪斷應力 τ_1 은 模型1에서와 같은 方法으로 材料 1의 미끄럼線形場을 使用하므로써 얻는다. AE_1 은 無應力面이기 때문에 $\angle C_1E_1A$ 는 $\frac{\pi}{4}$ 이어야 하고 $\triangle AC_1E_1$ 에서의 靜水應力은 k_1 과 같다. 왜냐하면 應力은 AC_1 線에서 不連續이기 때문에 $\triangle ABC_1$ 의 靜水壓力 P_1 은 式(15)에서 얻는다.

$$P_1 = k_1 \{1 - 2\sin(\theta_c + \epsilon_1 + \pi/4)\} \quad (40)$$

만일 $\sigma_2 = -\sigma_1$ 으로 式(1)에서 代置하면 AB 上

의 接觸應力은

$$\sigma_1 = k_1 \left\{ 1 - 2\sin\left(\theta_c + \epsilon_1 + \frac{\pi}{4}\right) + \sin(2\epsilon_1) \right\} \quad (41)$$

와 같이 주어지고, 剪斷應力은

$$\tau_1 = k_1 \cos(2\epsilon_1) \quad (42)$$

式(41)과 (42)을 使用해서 다음 式을 얻는다.

$$\sigma_1 = k_1 \left\{ 1 - \left(1 + \frac{\tau}{k_1}\right)^{1/2} (\cos\theta_c + \sin\theta_c) - \left(1 - \frac{\tau}{k_1}\right)^{1/2} (\cos\theta_c - \sin\theta_c) + \left[1 - \left(\frac{\tau}{k_1}\right)^2\right]^{1/2} \right\} \quad (43)$$

그러나 材料 2의 미끄럼線場을 使用해서 얻은 接觸應力은 式(29)로써 주어진다.

式(43)이 式(29)와 같게 하므로써 또 式(32)와 (33)을 다시 使用하므로써 다음 關係를 얻는다.

$$r = \frac{1 - (1+rf)^{1/2}(\cos\theta_c + \sin\theta_c) - (1-rf)^{1/2}(\cos\theta_c - \sin\theta_c) + \{1 - (rf)^2\}^{1/2}}{1 - \pi/2 + \cos^{-1}f} \quad (44)$$

式(44)은 模型 2에서 臨界頂角 θ_c 와 硬度比 r 와 의 關係이다. 式(39)을 r 와 f 를 使用하여 幾何學的인 條件을 다시 써면

$$\sin^{-1}f \leq \theta_c \leq 3/4\pi - 1/2 \cos^{-1}(rf) \quad (45)$$

單位 넓이 당 법선력 N 와 마찰력 F 는

$$N = AB \left\{ \sigma \sin\left(\frac{\theta_c}{2}\right) - \tau \cos\left(\frac{\theta_c}{2}\right) \right\} \quad (46)$$

$$F = AB \left\{ \sigma \cos\left(\frac{\theta_c}{2}\right) + \tau \sin\left(\frac{\theta_c}{2}\right) \right\} \quad (47)$$

幾何學的인 條件을 나타내는 式(39)에서 만일 θ_c 가 最少值 即 $\theta_c = \pi/2 - 2\epsilon_2$ 을 取하면 σ 와 τ 는 式(24)와 (25)에서 다음과 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 = \sigma_2 = k_2(1 + \cos\theta_c) \\ \tau &= \tau_1 = \tau_2 = k_2 \sin\theta_c \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

式(48)을 (46)에 代代入하므로써

$$N = AB k_2 \left\{ (1 + \cos\theta_c) \sin\left(\frac{\theta_c}{2}\right) - \sin\theta_c \cos\left(\frac{\theta_c}{2}\right) \right\} = 0 \quad (49)$$

그러므로 $\theta_c \geq \frac{\pi}{2} - 2\epsilon_2$ 에서 $N \geq 0$ 을 滿足해야 한다.

$N \geq 0$ 인 條件下에서 臨界頂角 θ_c 는 模型1 또는

2의 미끄럼線場을 使用하므로서 얻을 수 있다고 結論지을 수 있다.

2.2.3 模型 3.

셰기모양의 누름쇠와 平板사이의 塑性變形領域에서 不連續應力場을 가지고 미끄럼線場을 形成하는 경우를 앞서 생각했다.

模型 3의 경우는 Fig. 8에 나타낸다.

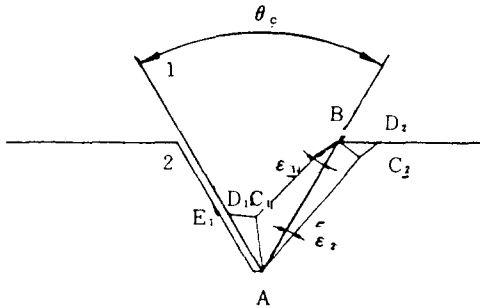


Fig. 8. Slip line field for model 3.

ABC₁D₁ 域과 ABD₂C₂ 域은 應力不連續線 AC₁과 BC₂를 가지는 不連續應力場이다. AC₁線과 BC₂線은 ∠BC₁D₁과 ∠AC₂D₂를 各各 二等分한다.

이 경우에 ε₁과 ε₂의 範圍는 式(16)과 (17)로 表示된다.

模型 2와 같은 方法으로 셰기모양누름쇠 1의 미끄럼線場에 有心扇形場이 形成 안 되는 것과 應力不連續線 AC₁이 셰기모양 BAE₁에 存在한다는 것을 알기 위하여 式(37)과 (38)사이의 關係를 알 必要가 있다. 또 다음 關係가 平板面 2를 幾何學的으로 滿足시켜야 한다.

$$\theta_c \leq \frac{\pi}{2} - 2\epsilon_2 \quad (50)$$

그러므로 式(37), (38) 그리고 (50)에서 共通의 領域을 생각하면 Fig. 8에 表示된 미끄럼線場이 構成되기 위한 幾何學的인 條件은

$$\pi/4 - \epsilon_1 \leq \theta_c \leq \frac{\pi}{2} - 2\epsilon_2 \quad (51)$$

界面 AB에서의 接觸應力 σ₂와 剪斷應力 τ₂는 材料 2의 미끄럼線場을 使用하므로서 決定된다. BD₂가 無應力面이기 때문에 <BD₂C₂가 π/4이어야하고 ΔBD₂C₂의 靜水應力은 k₂가 된다. ΔABC₂의 靜水應力 P₂는 式(15)로부터 다음과 같다.

$$P_2 = k_2 \left\{ 1 - 2 \sin \left(\frac{3}{4} \pi + \frac{\theta_c}{2} + \epsilon_2 \right) \right\} \quad (52)$$

따라서 σ₂와 τ₂는 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$\sigma_2 = k_2 \left\{ 1 - 2 \sin \left(\frac{3}{4} \pi + \frac{\theta_c}{2} + \epsilon_2 \right) + \sin (2\epsilon_2) \right\} \quad (53)$$

$$\tau_2 = k_2 \cos (2\epsilon_2) \quad (54)$$

式(53)과 (54)에서 ε₂를 消去하고 τ₂代身에 τ를 써서 다음 關係를 얻는다.

$$\sigma_2 = k_2 \left\{ 1 - \left(1 + \frac{\tau}{k_2} \right)^{\dagger} \left\{ \cos \left(\frac{\theta_c}{2} \right) - \sin \left(\frac{\theta_c}{2} \right) + \left(1 - \frac{\tau}{k_2} \right)^{\dagger} \left\{ \cos \left(\frac{\theta_c}{2} \right) + \sin \left(\frac{\theta_c}{2} \right) \right\} + \left\{ 1 - \left(\frac{\tau}{k_2} \right)^2 \right\}^{\dagger} \right\} \quad (55)$$

셰기모양 누름쇠 1의 미끄럼線場에서의 σ₁이 式(43)으로 주어졌기 때문에 다음關係를 式(43)을 (55)와 같다고 하므로서 또 式(32)와 (33)을 다시 使用하여

$$r = \frac{1 - (1 + rf)^{1/2} (\cos \theta_c + \sin \theta_c) - (1 - rf)^{1/2}}{1 - (1 + f)^{1/2} (\cos(\theta_c/2) - \sin(\theta_c/2)) + \frac{(\cos \theta_c - \sin \theta_c) + \{1 - (rf)^2\}^{1/2}}{(1 - f)^{1/2} (\cos(\theta_c/2) + \sin(\theta_c/2)) + (1 - f^2)^{1/2}}} \quad (56)$$

式(56)은 模型 3의 臨界頂角 θ_c와 硬度比 r와 의 相關關係를 나타낸다.

式(51)을 다시 써서

$$\frac{\pi}{4} - \cos^{-1}(rf) \leq \theta_c \leq \sin^{-1}f \quad (57)$$

이 미끄럼線場模型은 法線荷重이 N ≤ 0일 때만 適用할 수 있다는 것을 알 수 있다.

3. 數值 計算

3種類의 模型에서 미끄럼線場理論을 使用하여 臨界頂角 θ_c와 硬度比와의 關係를 얻었다.

Fig. 9는 여러가지 f의 값에 對한 數值計算의 結果를 나타낸다.

이 그림에서 알 수 있는 바와 같이 硬度比가 같은 狀態에서는 臨界頂角 θ_c는 f (= τ/k₂)가 增加함에 따라서 減少함을 나타내고 換言하면 界面 AB上的 剪斷應力이 k₂에 接近함에 따라서 θ_c가 減少한다.

f 가 0에서 1에 接近해 감에 따라 경도비 r 가 증가하면 臨界頂角 θ_c 의 기울기는 점차 증가한다. 따라서 τ 가 k_2 에 接近해 가면 θ_c 의 변화폭은 더 커진다.

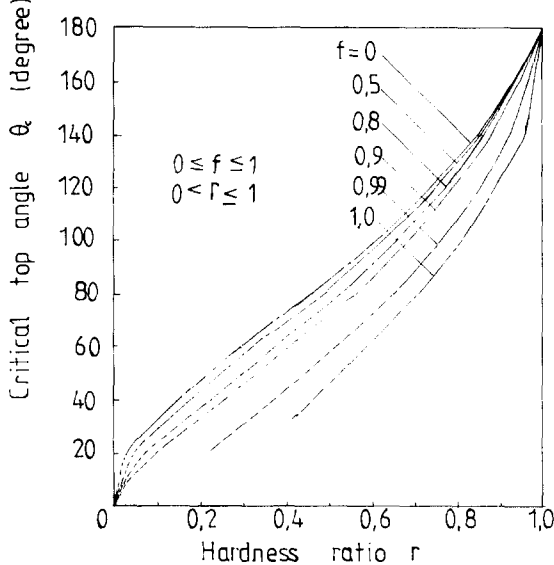


Fig. 9. The relationship between the critical top angle θ_c and the hardness ratio r :
—model 1: - - - model 2:model 3:

f 가 1에 接近할 때를 제외하고 즉 τ 가 材料 2의 臨界剪斷應力에 거의 가까워 질 때를 제외하고는 f 가 增加해도 θ_c 는 많이 變化하지 않고 있는 것을 알 수 있다.

또 H_1 이 H_2 에 接近해가면 즉 r 가 1에 接近할 때 θ_c 가 增加하는 것을 알 수 있다.

췌기모양 누름쇠의 塑性變形이 平板의 塑性變形보다 先行될 條件을 考察해 보면 췌기모양 누름쇠의 頂角이 그림에서 각 曲線에 表示한 값 이상이면 平板의 降伏에 必要한 σ_2 의 값이 췌기모양 누름쇠의 降伏에 必要한 σ_1 의 값 보다 더 작다. 그래서 平板만이 塑性變形을 한다. 反對로 頂角이 각 曲線에 표시된 값 이하이면 σ_2 가 σ_1 보다 더 크고 췌기 모양의 누름쇠만이 塑性變形을 한다.

그래서 條件은

$$\theta \leq \theta_c \tag{58}$$

f 의 값이 거의 1에 接近할 때를 除外하고 f 와 함께 θ_c 의 變化량은 대단히 적다. 그러므로 $(\theta_c)_{f=0}$

$f=0 \approx \theta_c$ 를 利用하여 式(58)은 다음과 같이 表示된다.

$$\theta \leq (\theta_c)_{f=0} \tag{59}$$

$(\theta_c)_{f=0}$ 의 값은 式(35)와 (44)에 $f=0$ 을 넣으므로서

$$\left. \begin{aligned} (\theta_c)_{f=0} &= \frac{2r + \pi - 2}{2 - r} \\ r &= \frac{2 - 2 \cos \{(\theta_c)_{f=0}\}}{2 + (\theta_c)_{f=0}} \end{aligned} \right\} \tag{60}$$

이와 같이 췌기모양누름쇠의 塑性變形이 平板의 塑性變形보다 앞서 일어날 條件은 式(59)에 의하여 表示되며 臨界頂角은 式(60)으로 주어진다.

4. 結 論

硬도가 큰 췌기모양누름쇠가 硬도가 적은 平板面上을 미끄럼磨擦 할 때, 췌기모양누름쇠와 平板面이 同時에 塑性變化를 하는데 必要한 條件을 三軸應力狀態의 미끄럼場理論을 써서 解析한 結果는 다음과 같다.

1. 硬度比가 같은 狀態에서는, 두 金屬이 同時에 降伏할때의 頂角 θ_c 는 f 가 增加함에 따라서 減少한다.
2. 췌기모양 누름쇠의 塑性變形이 平板의 塑性變形 보다 先行 될 條件은 θ 보다 $(\theta_c)_{f=0}$ 가 더 커야 한다.
3. 臨界頂角보다 頂角이 더 작을때는 서로 磨擦되고 있는 兩金屬에서 硬도가 큰 것이 작은 것 보다 먼저 塑性變化 한다.

參 考 文 獻

1. F. P. Bowden and D. Tabor: The friction and lubrication of Solids, Oxford(1954) 曾田譯 p.9 丸善東京(1982).
2. 辛玫教·李友桓: 異種金屬間的 熔着磨滅에 關한 研究 韓國船用機關學會誌, 第9卷 第1號, p.76(1982).
3. Mc Clintock, Argon: Mechanical Behavior, of Materials, Addison Wesley, Massachusetts U. S. A. p.410(1966).

4. Timoshenko: Theory of Elastic Stability
New York McGraw-Hill(1984).
5. 前掲書 1)의 p.10.
6. H. Hencky, Z. Angrew: Math. Mech. 3,
241(1923).
7. A. J. Ishlinsky: J. Appl. Math. Mech. 8,
233(1944).
- 英譯: Ministry of Supply, A. R. D. Theoretical
Research Translation, 2147.
Massachusetts Institute of Technology,
- Conference on Friction and surface finish
(1940).
8. 前掲書 1) p.17.
9. G. A. Tomlinson: Phil. Mag. 7, 905(1929)
10. 前掲書 2)의 p.76.
11. 前掲書 1)의 p.88.
12. 前掲書 1)의 p.67~72.
13. R. Hill. The mathematical Theory of Plasti-
city Oxford(1960) p.159.