韓國經營科學會誌
第11券 第2號
1986年 10月

多品目단일입찰 동시경매의 평형입찰전략과 기대이익

Equilibrium Bidding Strategy and Expected Profit in the Multiple Unit Simultaneous Auctions

김 여 근*
박 순 달**

Abstract

This paper deals with four types of multiple unit simultaneous auctions such as the discriminating, uniform-price, lowest accepted-price, and progressive auctions. These auctions have been studied by Vickrey, Ortega-Reichert, Harris and Raviv and so forth. In this paper, their studies are extended to the case with a reserve price and an entry fee, and then the equilibrium bidding strategy in each auction and the bidder's expected profit under the equilibrium bidding strategy are presented. Further, those are analyzed with respect to the change of a reserve price, an entry fee, and the number of bidders and objects.

1. 서 론

아파트의 프레미엄입찰, 농수산물의 새벽경매, 외국이야기지만 고미술품의 기록적인 입찰가등으로 입찰, 경매는 일반사회에서도 귀에 익은 용어들이다. 이와 같이 상품들을 공개경쟁판매하는 행위를 보통경매라고 한다. 경매상황은 여러가지 있을 수 있다. 예로써 아파트의 입찰과 같이 그 가치가 확실한 경우와 광권경매 경우와 같이 그 지역에 얼마만큼의 광맥이 있는지 개발비가 얼마나 필요한지 확실치 않아 그 가치가 확실치 않은 경우이다. 그러나 여기서는 물품의 가치가 비교적 확실한 전자의 경우만을 다루고자 한다. 그리고 여러개의 동일품목에 대해 동시에 여러사람이 입찰하되 각 입찰자는 단지 한 품목만을 응찰할 수 있는 다품목단일입찰동시경매(mutiple unit simultaneous auctions)를 다루기로 한다.

경매방법은 여러가지가 있다. 더우기 품목이 여러개 있을 경우에는 경매방법이 더욱 다양하다. 그러나 여기서 다루고자 하는 경매방법은 비밀입찰경매의 차별가경매, 일정가경매, 동일제1입찰가경매와 공개입찰경매의 올려부르기경매이다. 비밀입찰경매는 각자의 입찰가를 비밀로 하는 경매방법으로 낙찰가를 결정하는 방법에 따라 분류되는데 차별가경매는 낙찰자의 입찰가를 각 물품의 낙찰가로 하는 방법이고, 일정가경매는 낙찰되지 않는 입찰자중 최고입찰가를 낙

*전남대학교 공과대학
**서울대학교 공과대학

찰가로 하는 방법이고, 동일제ℓ입찰가경매는 낙찰자의 최저입찰가를 낙찰가로 하는 방법이다. 올려부르기경매는 낮은 가격부터 올려불러 품목의 수만큼 응찰자가 남을때 부른 자격을 낙찰가로 하고 남은 응찰자를 낙찰자로 하는 방법이다.

경매에 참여하는 사람은 누구나 자기의 이익을 높일려고 한다. 그래서 경매에서는 응찰하는 사람은 싼값으로 입찰하려고 하고 경매하는 사람은 비싼값으로 팔려고 한다. 그러나 이 논문에서는 입찰자의 기대이익을 최대로 하는 응찰가격, 즉 평형입찰전략을 구하고 나아가 평형입찰전략에서의 기대이익을 구하고자 한다. 다품목단일입찰경매모형에 대해서는 Vickrey〔10〕, Ortega-Reichert〔9〕, Harris와 Rariv〔6〕, Cox et al.〔3-5〕 등이 연구하여 평형입찰전략을 구하고 있다. 이 논문에서는 이들의 연구결과를 최저경매가와 참가비가 있는 경매모형의 경우로 확장하여 평형입찰전략을 구하고 나아가 평형입찰전략에서의 기대이익에 대해서도 연구하고자 한다.

먼저 이 논문에서 취급하고자 하는 모형을 정립해 두기로 하자.

우선 이 경매에는 최저경매가 m과 입찰참가비 c가 있고 모든 입찰자는 참가비를 사전에 지불하여야 응찰할 수 있으며 최저경매가 m이하로는 물품을 경매하지 않기로 한다. 이와함께 다음과 같은 가정을 두기로 한다.

가정 1. 경매자는 ℓ개의 동일품목으로 $n(>\ell)$ 명의 입찰자를 상대로 경매하고 입찰자는 단지 한 품목만 응찰할 수 있으며 서로 비협조적으로 응찰한다.

가정 2. 입찰자 i, $i=1,2,\cdots,n$의 경매품목에 대한 평가액은 $v_i\in[\underline{v},\bar{v}]$ $\underline{v}\geq 0$이다. 각 입찰자는 모든 상대입찰자의 평가액 분포함수를 $F(v)$로 본다. $F(v)$는 $F(\underline{v})=0$, $F(\bar{v})=1$인 연속적이고 미분가능한 증가함수이다.

가정 3. 각 입찰자의 입찰가 $U(v_i)$는 각자 평가액 v_i의 연속미분가능한 단조증가함수이다.

가정 4. 입찰자는 기대이익이 零이상일때 응찰한다.

가정1 은 응찰을 희망하는 사람이 물품의 갯수보다 많아야 하며 각 입찰자는 단 한 품목만 살 수 있다고 가정하는 것이다. 나아가 몇몇이 결탁하거나 서로 정보를 교환하는 행위를 금하고 있다. 즉, 이 경매를 비협조적 多人게임으로 다루고자 하는 것이다.

가정2 는 각 입찰자가 자신의 평가액을 알고 있지만 상대입찰자의 평가액은 확실하게 알지 못한다. 그러나 각 입찰자들의 평가액분포함수는 모두에게 알려져 있다고 보며 이들 분포함수는 모두 같다고 가정하는 것이다. 이런 경우를 대칭정보를 갖는 경우라고 한다.

가정3 은 각 입찰자의 입찰가는 자신의 평가액에 의하여 결정되는데 각 응찰자의 입찰전략함수 $U(v_i)$, $i=1,2,\cdots,n$는 각자의 평가액이 크면 클수록 높은 가격으로 입찰한다고 가정하는 것이다. 그리고 그 함수는 연속미분가능한 것으로 가정하여 앞으로 식을 편리하게 처리하기 위한 것이다.

가정4 는 각 입찰자는 손해보면서 응찰하지는 않을 것으로 가정하는 것이다.

이상과 같은 상황 아래에서 이 연구는 2절에서 입찰가에 따른 낙찰확률과 응찰조건을 구하고 이를 이용하여 3절에서 평형입찰전략에서의 입찰자 기대이익을 구하기로 한다. 4절은 다루고 있는 네가지 경매모형의 평형입찰전략을 구하고 5절은 각 평형입찰전략간의 비교와 최저경매가, 참가비, 입찰자수, 품목수에 따른 평형입찰전략의 변화를 분석하고자 한다.

2. 낙찰확률과 응찰조건

다루고자 하는 경매모형들은 동시경매모형으로 ℓ개의 동일품목을 n명의 입찰자에게 동시에 제시하게 하여 경매하는 모형으로 차별가경매, 일정가경매, 동일제ℓ입찰가경매, 올려부르기경매모형이다.

이들 각 경매모형에서 평가액이 v_i인 입찰자 i가 어떤 입찰가 b로 응찰할 때 낙찰확률을 구하고 이를 이용하여 각 입찰자가 응찰하게 되는 응찰조건을 구하고자 한다.

먼저 낙찰확률을 구한다. 다루고 있는 모든 경매모형은 낙찰자가 최고입찰자들이므로 이들 경매에서 낙찰자는 ℓ번째 최고입찰자까지 된다. 각 경매에서 입찰가 b로 낙찰되려면 입찰가 b가 $(n-1)$명의 상대입찰자의 ℓ번째 최고입찰가보다 높아야 한다. 각 경매에서 입찰전략함수 $U(v_i)$는 연속·미분가능한 단조증가함수이므로 역함수가 존재하고 이를 ϕ로 둔다.

모든 상대입찰자의 입찰전략은 $U(v_j)$, $j\neq i$로 가정하므로 입찰가 b가 $(n-1)$명의 상대입찰자중에서 ℓ번

째 최고입찰가보다 높을 확률은 $\phi(b)$가 $(n-1)$ 명의 상대입찰자의 ℓ번째 최고평가액보다 높을 확률과 같게 된다.

$(n-1)$명의 상대입찰자중에서 ℓ번째 최고평가액의 확률밀도함수 $h(x)$와 누적밀도함수 $\mathrm{H}(x)$를 구한다. 상대입찰자의 평가액을 가장 작은 것부터 나열하여 $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_{n-1}$로 두면 가정2 에서 상대입찰자의 평가액 누적밀도함수는 $\mathrm{F}(v)$이므로 $x_{n-\ell}$의 확률밀도함수 $h(x)$와 누적밀도함수 $\mathrm{H}(x)$는

$$h(x)= \frac{(n-1)!}{(n-\ell-1)!\,(\ell-1)!}\mathrm{F}^{n-\ell-1}(x)\,[1-\mathrm{F}(x)]^{\ell-1}f(x), \quad \underline{v} \leqq x \leqq \bar{v} \tag{1}$$

과

$$\mathrm{H}(x)=\sum_{j=n-\ell}^{n-1}\binom{n-1}{j}\mathrm{F}^{j}(x)\,[1-\mathrm{F}(x)]^{n-1-j},\ \underline{v} \leqq x \leqq \bar{v} \tag{2}$$

로 된다[참조(7), P325]. 여기서 $f(x)$는 $\mathrm{F}'(x)$이다.

따라서 다루고 있는 각 모형에서 모든 상대입찰자가 평형입찰전략 $\mathrm{U}(v_j), j \neq i$를 사용할 때(가정3 참조), 입찰자 i가 전략함수 U의 치역 내에서 입찰가 b로 입찰하면 낙찰확률은

$$\mathrm{P}r[b > \mathrm{U}(x_{n-\ell})] = \mathrm{P}r[\phi(b) > x_{n-\ell}] = \mathrm{H}(\phi(b)) \tag{3}$$

가 되고 낙찰되지 않을 확률은 $\{1-\mathrm{H}(\phi(b))\}$로 된다.

다음은 낙찰확률을 이용하여 응찰조건을 구하여 보자. 최저경매가 이상으로 응찰하여야 낙찰받을 수 있고 기대이익이 零이상일 때 응찰한다고 보므로, 입찰자는 최저경매가로 낙찰될 때 기대이익이 零이상이어야 응찰할 것이다. 그러면 입찰자는 평가액이 어느 이상일 때 응찰할 것인가. 최저경매가로 낙찰될 때 기대이익이 零이 되는 평가액을 v_*로 두자. 최저경매가가 낙찰가로 될 때 평가액이 v_*보다 크면 기대이익이 零이상이 되고, 작으면 기대이익이 陰이 되어 평가액이 v_*이상인 입찰자는 응찰할 것이다. 물론 평가액이 v_*인 입찰자는 최저경매가가 낙찰가로 되는 입찰전략만을 사용할 것이다.

그러면 v_*를 구하여 보자. 평가액이 v_*인 입찰자가 최저경매가가 낙찰가로 되는 평형입찰전략, $\mathrm{U}(v_*)$로 응찰하여 낙찰되면 이익은 평가액에서 최저경매가와 참가비를 뺀, (v_*-m-c)가 되고 낙찰확률은 $\phi(\mathrm{U}(v_*))=v_*$가 되어 $\mathrm{H}(v_*)$가 된다. 또한 낙찰되지 않으면 참가비만큼 손해이고 이 확률은 $\{1-\mathrm{H}(v_*)\}$가 된다.

그러므로 기대이익은

$$(v_*-m-c)\,\mathrm{H}(v_*) - c\,\{1-\mathrm{H}(v_*)\} = (v_*-m)\,\mathrm{H}(v_*) - c \tag{4}$$

가 되고 평가액 v_*는 최저경매가로 낙찰될 때 기대이익이 零이 되는 평가액이므로

$$(v_*-m)\,\mathrm{H}(v_*) - c = 0 \tag{5}$$

을 만족하는 값이다.

입찰자 $i, i=1,2,\cdots,n$가 $\mathrm{U}(v_*)$로 응찰할 때 평가액 v_i가 v_*보다 크면 식(4)가 陽이 되어 기대이익이 陽이 되고 평가액 v_i가 v_*보다 작으면 식(4)가 陰이 되어 기대이익이 陰이 된다. 즉, 입찰자 i의 평가액 v_i가 v_*보다 클 때는 기대이익이 零이 되는 낙찰가는 최저경매가보다 높아 최저경매가이상으로 응찰할 수 있고 v_i가 v_*보다 작으면 최저경매가보다 낮아 응찰하지 않게 된다. 따라서 다루고 있는 경매모형에서 평가액이 식(5)를 만족하는 v_*이상인 입찰자는 응찰하게 된다.

3. 입찰자 기대이익

2 절에서 구한 낙찰확률과 응찰조건을 이용하여 평형입찰전략에서의 기대이익을 구하여 보자. 평형입찰전략은 각 입찰자가 입찰전략 $\mathrm{U}(v_i), i=1,2,\cdots,n$ 을 사용할 때 어떤 입찰자도 이 전략 이외의 전략으로 기대이익을 더 높일 수 없는 전략이다[8].

각 경매모형에서 기대이익은 각 입찰자의 평가액에 낙찰확률을 곱한 것에서 기대지불가를 뺀 것으로 된다. 낙찰확률은 입찰가 b가 입찰전략함수 $\mathrm{U}(y), \underline{v} \leqq y \leqq \bar{v}$에 대응한다면 $\phi(b)=\phi(\mathrm{U}(y))=y$가 되어 $\mathrm{H}(y)$로 된다. 그리고 기대지불가는 다루고 있는 각 경매모형의 입찰전략이 평가액의 증가함수 $\mathrm{U}(v_i), i=1,2,\cdots,n$이므로 입찰가 b가 전략함수 $\mathrm{U}(v_j), j \neq i$의 어떤 평가액에 대응하느냐에 따라 결정된다. 따라서 각 경매모형에서 기대지불가를 평가액의 함수 $\mathrm{R}(y)$로 둔다.

그러면 평가액이 v_i인 입찰자 i가 입찰가 b, 즉 $\mathrm{U}(y)$로 입찰할 때 기대이익은

$$\mathrm{E}[\mathrm{U}(y)] = v_i\mathrm{H}(y) - \mathrm{R}(y) \tag{6}$$

가 된다.

식(6)을 이용하여 평형입찰전략에서의 기대이익을 구하면 다음과 같이 된다.

定理 1. 다품목단일입찰 동시경매에서 모든 입찰자가 평형입찰전략을 사용할 때 평가액이 v인 입찰자의 기대이익은

$$\int_{v_*}^{v} \mathrm{H}(z)dz, \qquad v \geq v_* \tag{7}$$

이다.

證明. 기대이익을 최대로 하는 입찰가 b^*를 구하는 것은 식(6)을 최대로 하는 y를 구하는 것과 같다. 따라서 구하려는 y는

$$\frac{\partial \mathrm{E}[\mathrm{U}(y)]}{\partial y} = v_i h(y) - \mathrm{R}'(y) = 0 \tag{8}$$

을 만족해야 한다. 그런데 가정 3으로부터 $b^* = \mathrm{U}(v_i)$가 되어야 한다. 즉 $y = v_i$가 되어야 한다. 그러므로 식(8)은

$$\mathrm{R}'(v_i) = v_i h(v_i) \tag{9}$$

가 된다. 입찰자는 기대이익이 零이상일 때 응찰하므로 식(5)를 만족하는 v_*이상일 때 응찰하게 된다.

평가액이 v_*인 입찰자가 최저경매가로 낙찰될 때 기대지불가 $\mathrm{R}(v_*)$는 최저경매가에 낙찰확률을 곱한 것에 참가비 c를 더한 것으로 $m\mathrm{H}(v_*) + \mathrm{c}$가 된다. 따라서 식(5)와 식(6)으로부터

$$\mathrm{R}(v_*) = v_*\mathrm{H}(v_*) \tag{10}$$

가 된다. 식(9)를 적분하고 한계조건 식(10)을 이용하면

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(v_i) &= v_*\mathrm{H}(v_*) + \int_{v_*}^{v_i} z\mathrm{H}(z)dz \\ &= v_i\mathrm{H}(v_i) - \int_{v_*}^{v_i} \mathrm{H}(z)dz \end{aligned} \tag{11}$$

을 얻는다. 식(6)과 식(11)로부터 기대이익은

$$\int_{v_*}^{v_i} \mathrm{H}(z)dz, \qquad v_i \geq v_* \tag{12}$$

가 되어 식(7)과 같이 된다.

다음은 y가 v_i일 때 기대이익이 최대가 됨을 보인다. 평가액이 v_i인 입찰자가 $d = \mathrm{U}(y), y \neq v_i$인 입찰전략을 사용한다고 하자. 그러면 기대이익은 식(6)과 같이 되고 이를 변형하면

$$\mathrm{E}[\mathrm{U}(y)] = y\mathrm{H}(y) - \mathrm{R}(y) + (v_i - y)\mathrm{H}(y) \tag{13}$$

가 된다. 식(11)의 결과를 이용하면 식(13)은

$$\mathrm{E}[\mathrm{U}(y)] = \int_{v_*}^{y} \mathrm{H}(z)dz + (v_i - y)\mathrm{H}(y) \tag{14}$$

로 된다.

$d > b^*$이면, 즉 $\mathrm{U}(y) > \mathrm{U}(v_i)$이면 함수 U는 연속·증가함수이므로 $y > v_i$가 된다. 식(12)에서 식(14)를 빼면

$$-\int_{v_i}^{y} \mathrm{H}(z)dz + (y - v_i)\mathrm{H}(y) = \int_{v_i}^{y} (z - v_i)\, \partial\mathrm{H}(z)$$

로 이 값은 陽이 된다.

같은 방법으로 $d < b^*$인 경우는 $y < v_i$가 되어 식(12)에서 식(14)를 빼면

$$\int_{y}^{v_i} \mathrm{H}(z)dz + (y - v_i)\mathrm{H}(y) = \int_{y}^{v_i} (v_i - z)\, \partial\mathrm{H}(z)$$

로 이 값도 陽이 된다. 그러므로 $y = v_i$에서 기대이익이 최대로 되고 이때 기대이익은 식(7)과 같게 된다.

다품목단일입찰 동시경매에서 평가액이 v_i인 입찰자 i가 임의의 입찰가 $b = \mathrm{U}(y)$, $y \neq v_i$로 입찰하면 기대이익은 식(14)와 같고 평형입찰전략의 입찰가 $b^* = \mathrm{U}(v_i)$를 사용하면 기대이익은 식(12)로써 최대가 됨을 알 수 있다.

n이 감소하거나 ℓ이 증가하면 식(2)의 $\mathrm{H}(z)$는 커진다. 따라서 입찰자수가 감소하거나 품목수가 많아지면 기대이익은 많아진다. 또한 평가액이 높을수록 기대이익이 많아진다. 그리고 최저경매가와 참가비로 인하여 기대이익은

$$\int_{\underline{v}}^{v_*} \mathrm{H}(z)dz$$

만큼 감소하고, 이로부터 최저경매가나 참가비가 높아지면 v_*가 높아져서 기대이익이 감소한다.

4. 평형입찰전략

ℓ개의 동일다품목을 n명의 입찰자에게 동시에 경매하는 다품목단일입찰 동시경매의 차별가경매, 일정가경매, 동일제 ℓ입찰가경매, 올려부르기경매의 네가지 경매모형에서 최저경매가와 참가비가 있을 때의 평형입찰전략을 구하고자 한다.

(1) 차별가경매(discriminating auction)

차별가경매는 동일다품목을 입찰자에게 동시에 제시하여 단지 한 품목만을 비밀리에 응찰하게 하며 낙

찰자는 최고입찰자들이 되고 낙찰가는 낙찰자의 입찰가로 하는 경매이다. 차별가경매의 평형 입찰전략은 Ortega-Reichert[9]와 Harris와 Raviv[6]에 의하여 연구되었다. 여기서는 이들의 연구를 최저경매가와 참가비가 있는 경우로 확장한다.

평가액이 v_i인 입찰자 v가 평형 입찰 전략함수 $U(v_i)$의 치역내에서 임의의 입찰가 b로 입찰한다고 하자. 이때 기대이익을 구하고 이 기대이익을 최대로 하는 입찰가 b^*를 구하여 평형입찰전략함수 $U(v_i), i=1,2,\cdots,n$를 구한다.

먼저 기대이익을 구한다. 입찰가 b로 입찰할 때 낙찰되려면 입찰가 b가 ℓ번째 최고입찰가, $U(x_{n-\ell})$ 보다 커야 한다. 낙찰가는 낙찰자의 입찰가이므로 낙찰되면 이익은 평가액에서 입찰가와 참가비를 뺀 (v_i-b-c)이고 낙찰되지 않으면 참가비 c만큼 손해이다. 따라서 식(3)의 낙찰확률로부터 평가액이 v_i인 입찰자 i가 b로 입찰할 때 기대이익은

$$E[b]=(v_i-b-c)H(\phi(b))-c[1-H(\phi(b))]$$
$$=(v_i-b)H(\phi(b))-c \tag{15}$$

로 된다.

한편 응찰하는 최저의(평가액, 입찰가)를 v_*로 표현하면 $U(v_*)=m$과 식(5)로부터

$$(v_*, U(v_*)=v_*-\frac{c}{H(v_*)}) \tag{16}$$

로 된다.

식(5)의 기대이익과 식(16)의 한계조건을 이용하여 최저경매가와 참가비가 있는 차별가경매의 평형입찰전략을 구하면 다음 정리와 같다.

定理 2. 최저경매가가 m이고 참가비가 c인 차별가경매의 평형입찰전략은

$$U(v_i)=v_i-\frac{\int_{v_*}^{v_i}H(z)dz+c}{H(v_i)},$$
$$v_*\leq v_i\leq \bar{v},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{17}$$

이다.

證明. 평가액이 v_*보다 낮으면 기대이익이 陰이 되어 응찰하지 않는 것이 평형입찰전략이다. 평가액 v_i가 v_*보다 클 때 기대이익을 최대로 하는 입찰가를 b^*로 두자. b^*가 기대이익을 최대로 하기위한 필요조건은

$$\frac{\partial E[b]}{\partial b}\Big|_{b=b^*}=-H(\phi(b^*))$$
$$+(v_i-b^*)h(\phi(b^*))\phi'(b^*)=0 \tag{18}$$

이다.

그리고 ϕ는 U의 역함수이므로

$$\phi(U(v_i))=v_i \tag{19}$$

와

$$\phi'(U(v_i))=\frac{1}{U'(v_i)} \tag{20}$$

의 관계가 성립한다. 각 입찰자의 입찰전략은 $U(v_i)$, $i=1,2,\cdots,n$라는 가정으로부터 b^*를 $U(v_i)$로 둔다. 식(18)의 b^*에 $U(v_i)$를 대입하고 식(19)와 식(20)을 이용하여 변환하면

$$-U'(v_i)H(v_i)+(v_i-U(v_i))h(v_i)=0 \tag{21}$$

로 된다. 식(21)을 만족하는 $U(v_i)$를 구한다. $U(v_i)$를 구하기 위하여 식(21)를 다음과 같이 변형한다.

$$\frac{\partial\{U(v_i)H(v_i)\}}{\partial v_i}=-\frac{v_i\partial H(v_i)}{\partial v_i} \tag{22}$$

식(22)의 양변을 v_*에서 v_i까지 적분하여 정리하면

$$U(v_i)H(v_i)-U(v_*)H(v_*)=$$
$$v_iH(v_i)-v_*H(v_*)-\int_{v_*}^{v_i}H(z)dz \tag{23}$$

가 된다. 한계조건으로 식(16)의 $U(v_*)$를 식(23)에 대입하면 식(17)을 얻는다.

b^*가 $U(v_i)$일 때 기대이익이 최대가 됨을 定理 1의 證明에서 보였다. 그러므로 식(17)의 $U(v_i)$는 평형입찰전략이다.

평형입찰전략에서의 기대이익이 定理 1과 같음을 식(15)의 b대신 식(17)의 $U(v_i)$를 대입하면 쉽게 알 수 있다. 定理 2에서 평형입찰전략 $U(v_i)$는 증가함수이고 자신의 평가액보다 낮으며 최저경매가가 높아지면 v_*가 커져서 높아지고 참가비가 많아지면 낮아짐을 알 수 있다. 최저경매가와 참가비가 없으면 $v_*=\underline{v}$, $c=0$이 되어 定理 1은 Ortega-Reichert[9], Harris 와 Raviv[6]의 평형입찰전략과 같게 된다.

이들의 평형입찰전략과 비교하면 평형입찰 전략은 최저경매가와 참가비가 있을 때 보다

$$\frac{\int_{v_*}^{v_i}H(z)dz}{H(v_i)}-\frac{c}{H(v_i)} \tag{24}$$

만큼 변하는데 식(24)에서 첫항이 둘째항보다 크면 최저경매가와 참가비가 있을 때가, 둘째항이 첫항보다 크면 최저경매가와 참가비가 없을 때가 평형입찰전략이 높다. 이는 평형입찰전략이 최저경매가가 있으면 높아지고 참가비가 있으면 낮아지기 때문이다.

(2) 일정가경매(Uniform-price auction)

Vickrey[10]와 Harris와 Raviv[6]는 일정가경매의 평형입찰전략을 구하였는데 이 절은 이들의 연구결과를 최저경매가와 참가비가 있는 경우로 확장하고자 한다.

일정가경매는 차별가경매와 같은 방법으로 경매하나 단지 낙찰가를 결정하는 방법이 다르다. 이 경매는 낙찰가를 낙찰되지 않는 입찰자의 최고입찰가로 한다. 따라서 낙찰자는 자신이 제시한 입찰가보다 항상 낮은 가격으로 낙찰하게 되며 모든 낙찰자의 낙찰가는 같다. 품목이 ℓ개일 때 낙찰가는 $(\ell+1)$번째 최고입찰가가 된다.

그런데 최저경매가와 참가비로 인하여 응찰자가 ℓ명 이하가 되면 모든 응찰자는 최저경매가로 낙찰한다. 이 경우는 최저경매가가 낙찰가로 될 때 기대이익이 零이상인 상대입찰자수가 ℓ명보다 적을 때로 이는 상대입찰자의 ℓ번째 최고평가액이 v_*보다 낮은 경우와 같다. 이 확률은 식(3)으로부터 $H(v_*)$이고 이때 이익은 평가액에서 최저경매가와 참가비를 뺀 (v_i-m-c)가 된다.

또한 상대입찰자의 ℓ번째 최고입찰가 $U(x_{n-\ell})$로 낙찰될 확률은

$$\begin{aligned} &Pr\{U(v_*)\leqq U(x_{n-\ell})\leqq b\} \\ &=Pr\{v_*\leqq x_{n-\ell}\leqq \phi(b)\} \end{aligned}$$

로 되고 이때 이익은 $\{v_i-U(x_{n-\ell})-c\}$가 된다. 이와 같이 낙찰되는 경우 이익은 상대입찰자의 입찰가에 따라 결정된다. 그리고 입찰가 b가 $U(x_{n-\ell})$보다 낮으면 낙찰되지 않아 참가비 c만큼 손해이고 이 확률은 $\{1-H(\phi(b))\}$이다.

따라서 평가액이 v_i인 입찰자 i가 b로 입찰할 때 기대이익은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} E[b] &= (v_i-m-c)H(v_*) \\ &\quad +\int_{v_*}^{\phi(b)}(v_i-U(x_{n-\ell})-c)\,dH(x_{n-\ell}) \\ &\quad -c\{1-H(\phi(b))\} \\ &=(v_{i-m})H(v_*) \\ &\quad +\int_{v_*}^{\phi(b)}(v_i-U(x_{n-\ell}))\,dH(x_{n-\ell}) \\ &\quad -c \end{aligned} \tag{25}$$

식(25)를 이용하여 기대이익을 최대로 하는 평형입찰전략을 구하면 다음과 같이 된다.

定理3. 최저경매가가 m이고 참가비가 c인 일정가경매의 평형입찰전략은

$$U(v_i)=v_i,\quad v_*\leqq v_i\leqq \bar{v},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{26}$$

이다.

證明. 평가액이 v_*보다 낮으면 기대이익이 陰이 되어 응찰하지 않는 것이 평형입찰전략이다. 평가액이 $v_i(\geqq v_*)$인 입찰자 i의 기대이익을 최대로 하는 입찰가를 b^*로 두자. 그러면 b^*는

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[b]}{\partial b}\Big|_{b=b^*} &= [v_i-U(\phi(b^*))]h(\phi(b^*))\phi'(b^*) \\ &=0 \end{aligned} \tag{27}$$

을 만족해야 한다. 모든 입찰자는 입찰전략 $U(v_i)$를 사용한다는 가정으로부터 $b^*=U(v_i)$가 된다. 식(27)의 b^*에 $U(v_i)$를 대입하고 식(19)와 식(20)을 이용하면

$$\frac{(v_i-U(v_i))h(v_i)}{U'(v_i)}=0$$

로 된다. $h(v_i)>0$, $U'(v_i)>0$이므로 식(26)이 성립한다.

b_*가 $U(v_i)$일 때 기대이익을 최대로 함을 定理 1의 證明에서 보였다. 그러므로 식(26)의 $U(v_i)$는 평형입찰전략이다.

定理 2로부터 최저경매가와 참가비는 응찰여부를 결정할 뿐 일단 응찰하게 되면 자신의 평가액으로 입찰하는 것이 평형입찰전략임을 알 수 있다. 이는 낙찰될 때 낙찰가가 자신의 입찰가보다 항상 낮으므로 가능한 한 최대로 입찰가를 높이는 것이 유리하기 때문이다.

(3) 동일제ℓ입찰가경매(lowest accepted-price auction)

동일제ℓ입찰가경매는 차별가경매와는 단지 낙찰가를 결정하는 방법이 다른데 이 경매의 낙찰가는 낙찰자중에서 제일 낮은 입찰가로 한다. 즉 품목이 ℓ개일 때 모든 낙찰자의 낙찰가는 ℓ번째 최고 입찰가가 되나 응찰자가 ℓ명보다 적으면 최저경매가를 낙찰가로 한다. 따라서 낙찰될 때 낙찰가는 자신이 제시한 입찰가보다 낮거나 같은 가격으로 된다. 이 경매에 관해 연구한 Ortega-Reichert[9]의 연구결과를 최저

경매가와 참가비가 있는 경우로 확장하여 평형입찰전략을 구하고 이 전략을 분석하고자 한다.

먼저 최저경매가로 낙찰되는 경우를 보자. 최저경매가로 낙찰되려면 응찰자수가 ℓ명보다 적은 경우로 이는 상대입찰자의 $(\ell-1)$번째 최고평가액이 v_*보다 낮은 경우이다(가정3 참조) 이 확률을 구하기 위하여 $(n-1)$명의 상대입찰자의 평가액중 $(\ell-1)$번째 최고평가액, $x_{n-\ell+1}$의 확률밀도함수 $w(x)$와 누적밀도함수 $W(x)$를 구하면

$$w(x)=\frac{(n-1)!}{(n-\ell)!\,(\ell-2)!}F^{n-\ell}(x)[1-F(x)]^{\ell-2}f(x)$$

$$\underline{v}\leqq x\leqq\bar{v} \tag{28}$$

$$W(x)=\sum_{j=n-\ell+1}^{n-1}\binom{n-1}{j}F^{j}(x)[1-F(x)]^{n-1-j},$$

$$\underline{v}\leqq x\leqq\bar{v} \tag{29}$$

과 같이 된다(참조[7] P325). 그러므로 최저경매가로 낙찰될 확률은 $W(v_*)$가 되고, 이때 이익은(v_i-m-c)가 된다.

다음은 상대입찰자의$(\ell-1)$번째최고입찰가, $U(x_{n-\ell+1})$이 최저경매가보다 높고 입찰가 b보다 낮으면 낙찰가는 $U(x_{n-\ell+1})$로 된다. 이 확률은

$$\begin{aligned}&Pr[b\geqq U(x_{n-\ell+1})\geqq m]\\&=Pr[\phi(b)\geqq x_{n-\ell+1}\geqq\phi(m)]\end{aligned} \tag{30}$$

로 되고 이때 이익은 $(v_i-U(x_{n-\ell+1})-c)$가 된다. $U(v_*)=m$으로 식(30)에서 $\phi(m)=v_*$가 된다.

또한 입찰가 b가 상대입찰자의 $(\ell-1)$번째 최고입찰가 $U(x_{n-\ell+1})$보다 낮고 ℓ번째 최고입찰가 $U(x_{n-\ell})$보다 높으면 낙찰가는 b로 된다. 이 확률은

$$\binom{n-1}{n-\ell}F^{n-\ell}(\phi(b))\ [1-F(\phi(b))]^{\ell-1}$$

가 되고 이때 이익은 (v_i-b-c)가 된다.

낙찰되지 않는 경우는 참가비 c만큼 손해인데 이 확률은 2절로부터 $\{1-H(\phi(b))\}$가 된다.

그러므로 평가액이 v_i인 입찰자 i가 b로 입찰할 때 기대이익은

$$\begin{aligned}E[b]=&(v_i-m-c)W(v_*)\\&+\int_{v_*}^{\phi(b)}(v_i-U(x)-c)dW(x)\\&+(v_i-b-c)\binom{n-1}{n-\ell}F^{n-\ell}(\phi(b))[1-F(\phi(b))]^{\ell-1}\\&-c\{1-H(\phi(b))\}\\=&(v_i-m)W(v_*)+\int_{v_*}^{\phi(b)}(v_i-U(x))dW(x)\\&+(v_i-b)\binom{n-1}{n-\ell}F^{n-\ell}(\phi(b))[1-F(\phi(b))]^{\ell-1}\\&-c\end{aligned} \tag{31}$$

로 된다. 식(31)에서 기호를 간단히 하기 위하여 $x_{n-\ell+1}$을 x로 나타내었다.

식(5)의 응찰조건을 이용하여 식(31)의 기대이익을 최대로 하는 평형입찰전략 $U(v_i)$, $i=1,2,\cdots,n$을 구하면 다음 정리와 같다.

정리 4. 최저경매가가 m이고 참가비가 c인 동일제 ℓ입찰가경매의 평형입찰전략은

$$U(v_i)=v_i-\frac{\int_{v_*}^{v_i}F^{n-\ell}(z)dz+\dfrac{cF^{n-\ell}(v_*)}{H(v_*)}}{F^{n-\ell}(v_i)}$$

$$v_*\leqq v_i\leqq\bar{v},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{32}$$

이다.

證明. 평가액 v_i가 v_*보다 낮으면 기대이익이 陰이 되어 응찰하지 않는 것이 평형입찰전략이다. 평가액 v_i가 v_*보다 클 때 입찰자의 기대이익을 최대로 하는 입찰가를 b^*로 두면 이는

$$\begin{aligned}\frac{\partial E[b]}{\partial b}\Big|_{b=b^*}=&[v_i-U(\phi(b^*))]W(\phi(b^*))\phi'(b^*)\\&-\binom{n-1}{n-\ell}F^{n-\ell}(\phi(b^*))[1-F(\phi(b^*))]^{\ell-1}\\&+(v_i-b^*)\binom{n-1}{n-\ell}(n-\ell)F^{n-\ell-1}(\phi(b^*))\\&\quad[1-F(\phi(b^*))]^{\ell-1}f(\phi(b^*))\ \phi'(b^*)\\&-(v_i-b^*)\binom{n-1}{n-\ell}(\ell-1)F^{n-\ell}(\phi(b^*))\\&\quad[1-F(\phi(b^*))]^{\ell-2}f(\phi(b^*))\phi'(b^*)\\&=0\end{aligned} \tag{33}$$

을 만족해야 한다. 가정3으로부터 $b^*=U(v_i)$로 된다.

식(33)의 b^*에 $U(v_i)$를 대입하고 식(19)와 (20)을 이용하여 변환하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}&(v_i-U(v_i))W(v_i)-U'(v_i)\binom{n-1}{n-\ell}F^{n-\ell}(v_i)[1-\\&F(v_i)]^{\ell-1}+(v_i-U(v_i))\binom{n-1}{n-\ell}(n-\ell)F^{n-\ell-1}(v_i)\\&[1-F(v_i)]^{\ell-1}f(v_i)-(v_i-U(v_i))\binom{n-1}{n-\ell}(\ell-1)\\&F^{n-\ell}(v_i)[1-F(v_i)]^{\ell-2}f(v_i)=0\end{aligned} \tag{34}$$

식(28)로부터 식(34)의 첫 항과 네째 항은 같게 된다. 그러므로 식(34)의 둘째 항과 세째 항을 정리하면

$$\binom{n-1}{n-\ell}F^{n-\ell-1}(v_i)(1-F(v_i))^{\ell-1}[-U'(v_i)\ F(v_i)$$

$$+(v_i-U(v_i))(n-\ell)f(v_i)]=0 \tag{35}$$

과 같이 된다. 식(35)의 〔　　〕를 재정리하면

$$U'(v_i)F^{n-\ell}(v_i)+U(v_i)(n-\ell)F^{n-\ell}(v_i)f(v_i) \\ =v_i(n-\ell)F^{n-\ell-1}(v_i)f(v_i) \tag{36}$$

가 되어

$$\frac{\partial\{U(v_i)F^{n-\ell}(v_i)\}}{\partial v_i}=\frac{v_i\partial F^{n-\ell}(v_i)}{\partial v_i} \tag{37}$$

와 같이 변환된다.

그런데 최저경매가로 낙찰받기 위해서는 최저경매가로 응찰하여야 한다. 따라서 평가액이 v_*인 입찰자의 평형입찰전략은 $U(v_*)=m$이 되고 최저경매가를 v_*로 표현하면 식(16)의 $U(v_*)$와 같이 된다.

식(37)의 양변을 v_*에서 v_i까지 적분하여 정리하면

$$U(v_i)F^{n-\ell}(v_i)=U(v_*)F^{n-}(v_*)+zF^{n-\ell}(z)\Big|_{v_*}^{v_i} \\ -\int_{v_*}^{v_i}F^{n-\ell}(z)dz \tag{38}$$

로 되고 응찰조건인 식(16)을 이용하면 식(32)를 얻는다. 그리고 b^*가 $U(v_i)$일 때 기대이익이 최대가 됨을 定理 1의 證明에서 보였다. 따라서 이 定理가 성립한다.

이 경매의 평형입찰전략은 자신의 평가액보다

$$\frac{\int_{v_*}^{v_i}F^{n-\ell}(z)dz+\dfrac{cF^{n-\ell}(v_*)}{H(v_*)}}{F^{n-\ell}(v_i)} \tag{39}$$

만큼 낮음을 알 수 있다. 최저경매가와 참가비가 없으면 $v_*=\underline{v}$, $c=0$이 되어 이 때의 평형입찰전략은 Ortega-Reichert〔9〕의 그것과 같게 된다.

定理 4 와 최저경매가와 참가비가 없는 경우의 평형입찰전략을 비교하면

$$\frac{\int_{\underline{v}}^{v_*}F^{n-\ell}(z)dz}{F^{n-\ell}(v_i)}-\frac{cF^{n-\ell}(v_*)}{F^{n-\ell}(v_i)H(v_*)} \tag{40}$$

만큼 변하는데 이는 평형입찰전략이 최저경매가가 있으면 높아지고 참가비가 있으면 낮아지기 때문이다.

(4) 올려부르기경매(progressive auction)

다음과 같은 올려부르기경매를 다루고자 한다. 경매자가 가격을 부르면 그 가격에 응찰하는 입찰자들이 신호를 보낸다. 이 때 응찰자가 ℓ명 이상이면 다시 더 높은 가격을 부르고 이 가격에 응찰하는 입찰자는 다시 신호를 보낸다. 이렇게 반복하여 ℓ명의 입찰자가 응찰할 때 응찰자는 마지막 부른 가격으로 한 품목씩 낙찰한다. 경매자는 최저경매가부터 부르기 시작한다. 처음 부른 가격(최저경매가)에 응찰자가 ℓ명 이하이면 모든 응찰자는 이 가격으로 낙찰한다. 그리고 올려부르는 가격의 간격이 아주 좁다고 가정하자.

앞 경매모형에서와 같이 최고입찰자들이 낙찰자가 되므로 첫 부르는 가격(최저경매가)이 낙찰가로 되는 입찰전략 $U(v_*)$의 낙찰확률은 식(2)의 $H(v_*)$가 된다. 그러므로 v_*는 식(5)를 만족하는 값과 같게 된다.

평가액이 $v_i(\geq v_*)$인 입찰자 i가 응찰하여 낙찰되지 않으면 참가비 c만큼 손해다. (v_i-c)보다 낮은 가격으로 낙찰되면 이익은 陽이고 이보다 높은 가격으로 낙찰되면 이익은 陰이다. 부른 가격이 (v_i-c) 보다 낮으면 평가액이 v_i인 입찰자는 당연히 응찰할 것이다. 부른 가격이 $(v_i-c+\varepsilon)$이었다 하자. ε이 零보다 크고 참가비보다 적으면 즉 $o<\varepsilon<c$이면 낙찰되었을 때 ε만큼 손해이다. 그러나 참가비는 이미 지불하였으므로 낙찰되지 않는 것보다는 $c-\varepsilon$만큼 이익이다. 따라서 부른 가격이 $(v_i-c+\varepsilon)$, $o<\varepsilon<c$이면 응찰할 것이다. ε이 참가비보다 크면, 즉 $\varepsilon<c$이면 $(v_i-c+\varepsilon)$으로 낙찰될 때 ε만큼 손해이고 낙찰되지 않는 것보다 $(\varepsilon-c)$만큼 더 손해이다. 따라서 부른 가격이 $(v_i-c+\varepsilon)$, $\varepsilon>c$이면 응찰하지 않는 것이 더 좋다. 그러므로 일단 응찰하게 되면 입찰자는 자신의 평가액에 이를 때까지 응찰하는 것이 평형입찰전략이 된다.

모든 응찰자가 평형입찰전략을 사용할 때 부르는 가격이 $(\ell+1)$번째 최고평가액을 넘으면 응찰자는 ℓ명만 남게 된다. 따라서 올려부르는 가격의 간격이 좁다면 낙찰가는 거의 $(\ell+1)$번째 최고평가액에 접근하게 된다. 또한 처음 부르는 가격에서 응찰자가 ℓ명 이하이면 최저경매가가 낙찰가로 된다.

일정가경매에서 모든 입찰자가 평형입찰전략을 사용할 때 응찰자가 $(\ell+1)$명 이상이면 낙찰가는 $(\ell+1)$번째 최고평가액이 되고 응찰자가 ℓ명 이하이면 최저경매가가 낙찰가로 되었다. 그리고 일정가경매와 올려부르기경매에서 낙찰자는 최고입찰자가 된다. 이렇게 일정가경매와 올려부르기경매에서 낙찰가와 낙찰자가 같다는 의미에서 이 두 경매는 전략적 동등(strategic equivalence)이다. 따라서 다음 定理가 성립하게 된다.

定理 5. 최저경매가와 참가비가 있는 올려부르기경매와 일정가경매는 전략적 동등이다.

최저경매가와 참가비가 있어도 일단 응찰하게 되면 Vickrey〔10〕와 Ortega-Reichert〔9〕의 평형입찰전략과 같음을 알 수 있다.

5. 비교분석 및 결론

지금까지 다룬 네 가지 경매모형의 평형입찰전략을 비교분석하여 보기로 한다.

평형입찰전략은 일정가경매와 올려부르기경매가 가장 높았고 다음은 동일제ℓ입찰가경매, 차별가경매의 순서로 낮아졌다. 이는 일정가경매의 낙찰가는 낙찰되지 않는 입찰자의 최고입찰가로 낙찰자의 입찰가보다 항상 낮고, 동일제ℓ입찰가경매의 낙찰가는 낙찰자의 최저입찰가로 낙찰자의 입찰가보다 낮거나 같고 차별가경매의 낙찰가는 낙찰자의 입찰가이기 때문이다. 그리고 올려부르기경매의 평형입찰전략은 자신의 평가액에 이를 때까지 응찰하는 것으로 일정가경매와는 전략적동등이었다.

그림 1은 $F(v)=v$, $o \leq v \leq 1$일 때 평가액의 변화에 따른 각 경매의 평형입찰전략을 나타낸 것인데 이로부터 각 경매의 평형입찰전략을 비교할 수 있고 입찰자수가 많아지면 평형입찰전략이 높아진다는 것도 알 수 있다.

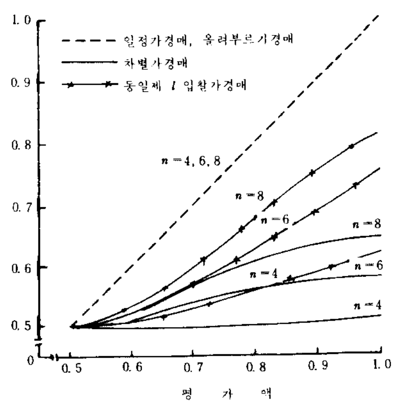

그림 1. 동시경매의 평형입찰전략 : $n=4, 6, 8$ $\ell=3$ $m=0.5$ $c=0$.

다음은 입찰자수, 품목수, 최저경매가, 참가비의 변화에 따른 평형입찰전략의 변화를 분석하여 보자.

먼저 일정가경매와 올려부르기경매의 평형입찰전략을 보면 定理 3으로부터 일정가경매에서입찰자 수, 품목 수, 최저경매가, 참가비는 응찰여부를 결정할 뿐 일단 응찰하게 되면 자신의 평가액으로 응찰하는 것이 평형입찰전략이 되었다. 또한 定理 5로부터 올려부르기경매도 응찰하면 자신의 평가액에 이들 때까지 응찰하는 것이 평형입찰전략이다. 즉, 이들 두 경매에서 일단 응찰하면 입찰자 수, 품목 수, 최저경매가, 참가비에 무관하게 평형입찰전략이 결정되었다.

다음은 차별가경매와 동일제ℓ입찰자경매의 평형입찰전략의 변화를 살펴보기로 하자.

(1) 입찰자수, 품목수와 평형입찰전략의 관계

차별가경매와 동일제ℓ입찰가경매에서 입찰자수가 품목수에 비하여 많아지면 식(5)로부터 v_*는 $\bar{v}$에 접근한다. 따라서 평가액이 높은 입찰자만이 응찰하게 된다. $v_* \rightarrow \bar{v}$일 때 응찰자의 평가액 $v \rightarrow \bar{v}$가 되고 $H(v) \rightarrow 1$. $\int_{v_*}^{v} H(z)dz \rightarrow 0$이 되어 차별가경매의 평형입찰전략 식(17)은 $v-c$에 접근한다. 또한 동일제ℓ 입찰가경매에서는 $v_* \rightarrow \bar{v}$, $v_\ell \rightarrow \bar{v}$이면 $F^{n-\ell}(v) \rightarrow 1$, $F^{n-\ell}(v_*) \rightarrow 1$, $H(v_*) \rightarrow 1$, $\int_{v_*}^{v} F^{n-\ell}(z)dz \rightarrow 0$이 되어 이 경매는 평형입찰전략, 식(32)도 $v-c$에 접근한다.

다음은 품목 수에 따른 이들 두 경매의 평형입찰전략의 변화를 보자. 차별가경매에서 품목 수가 많아져 입찰수자에 접근하면 즉 $\ell \rightarrow n$이면 식(2)로부터 $H(v) \rightarrow 1$이 된다. 이때 평형입찰전략, 식(8)은 $U(v) \rightarrow v_* - c$가 된다. 그런데 식(5)로부터 $\ell \rightarrow n$이면 $H(v_*) \rightarrow 1$이 되어 $v_* \rightarrow m+c$가 된다. 결국 평형입찰전략 $U(v)$는 m에 접근하게 된다. 따라서 차별가경매에서 품목수가 많아져 입찰자수에 접근하면 평형입찰전략은 최저경매가에 접근한다. 동일제ℓ입찰가경매에서도 품목수가 많아져 입찰자수에 접근하면 평형입찰전략은 최저경매가에 접근함을 위와 같은 방법으로 보일 수 있다.

(2) 최저경매가, 참가비와 평형입찰전략의 관계

참가비가 없고 최저경매가, $m(\geq \underline{v})$만 있으면 v_*는 m이 되고 최저경매가가 평가액보다 낮은 범위내에서 증가하면 평형입찰전략은 증가하여 평가액에 접근하게 된다. 최저경매가가 없고 참가비 c만 있으면 v_*는 $v_* H(v_*)=c$를 만족하는 값으로 된다. 따라서 이때 평

表 1. 차별가경매와 동일제ℓ 입찰가경매의 평형입찰전략과 최저경매가, 참가비, 입찰자수, 품목수의 관계

	(o, o)	(m, o)	(o, c)	(m, c)
응 찰 조 건	$v \geq o$	$v \geq m$	$vH(v) > c$	$v \geq v_*$
평형입찰전략	v가 클수록 $u(v)$ 증가	m이 클수록 $U(v)$ 증가	c가 클수록 $U(v)$ 감소	m, c에 따라 $U(v)$ 증가 또는 감소
$n \to \infty$	$U(v) \to v$	$U(v) \to v$	$U(v) \to v - c$	$U(v) \to v - c$
$\ell \to n$	$U(v) \to \underline{v}$	$U(v) \to m$	$U(v) \to o$	$U(v) \to m$
$v_* \to v$	$U(v) \to v$	$U(v) \to v$	$U(v) \to v - \frac{c}{H(v)}$	$U(v) \to v - \frac{c}{H(v)}$

가액이 v^*인 입찰자는 $vH(v) > C$이면 응찰하게 되고, 참가비가 $vH(v)$에 접근하면, 즉 $C \to vH(v)$이면 평형입찰전략은 낮아져 零에 접근한다.

최저경매가와 참가비가 있으면 차별가 경매와 동일제ℓ입찰가경매에서 평형입찰전략은 각각 식(24)와 식(40)만큼 변하여 최저경매가와 참가비가 없을 때보다 높거나 낮을 수 있다.

그리고 v_*가 평가액 v에 접근하면 定理 2와 定理 4로부터 두 경매의 평형입찰전략은

$$U(v) \to v - \frac{c}{H(v)}$$

가 된다.

차별가경매와 동일제ℓ입찰가경매의 평형입찰전략과 최저경매가, 참가비, 입찰자수, 품목수위 관계는 表 1과 같이 된다.

그리고 이들 네가지 경매모형에서 모든 입찰자가 평형입찰전략을 사용할 때 입찰자의 기대이익이 같았으며, 평형입찰에서의 기대이익은 입찰자수가 감소하거나 품목수가 증가할 때 높아졌고 또한 최저경매가나 참가비가 높을수록 낮아졌다.

참 고 문 헌

1. 김여근 "최저경매가와 참가비가 있는 다품목단일입찰경매에 관한 연구", 박사학위논문, 서울대학교 공대, 1986
2. 김여근, 박순달 '최저입찰가와 참가비가 있는 경쟁입찰모형", 한국경영과학회지, 제 9 권 2 호, 1984. 10.
3. Cox, J. C, V. L. Smith, and J. M. Walker, "Auction Market Theory of Hetero geneous Bidders." *Economics Letters*. Vol. 9. PP319~325, 1982.
4. Cox, J. C., V. L. Smith, and J. M. Walker, "Test of a Heterogeneous Bidders Theory of First Price Auction," *Economics Letters*, Vol. 12, PP. 207-212, 1983.
5. Cox, J. M., V. L. Smith, and J. M. Walker, "Theory and Behavior of Multiple Unit Discriminative Auctions, "*Journal of Finance*, Vol. 39, PP. 983-1010, 1984.
6. Harris, M. and A. Raviv, "Allocation Mechanisms and the Design of Auctions," *Econometrica*, Vol. 49, PP. 1477-1499, 1981.
7. Kendall, M. G. and A. Stuart, *The Advanced Theory of statistics*, Vol. 1, Hafner Publishing Company, New York, 1969.
8. Luce, R. D. and H. Raiffa, *Games and Decisions*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1957.
9. Ortega-Reichert, A., "Models for Competitive Bidding under Uncertainty," ph. D. Dissertation, Dep. of Industrial Engineering, Stanford University, Stanford, Calif., 1968.
10. Vickrey, W., "Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders," *Journel of Finance*, Vol. 16, PP. 8-37, 1961.