韓國經營科學會誌
第11券 第2號
1986年 10月

설비용량에 제한이 있는 입지선정 문제에 대한 기존해법간의 비교분석

A Comparative Study On Optimization Algorithms for Capacitated Facility Location

차 동 완*
정 승 학**
명 영 수***

Abstract

Capacitated facility location problems have received a great deal of attention in the past decade, resulting in a proliferation of algorithms for solving them. As is the case with mixed 0-1 integer programming problems, the computational success of such algorithms depends greatly on how to obtain lower bounds in good quality within a reasonable time.

The objective of this paper is to provide a comparative analysis of those algorithms in terms of lower bounds they produce. Analyses of the strategies for generating lower bounds as well as the quality of generated lower bounds are provided.

1. 서 론

용량에 제한이 있는 設備의 立地選定問題(Capacitated Facility Location Problem : CFLP)는 현실문제에의 광범위한 응용 가능성과 0-1 혼합형 정수계획문제(0-1 Mixed Integer Programming) 로서의 이론적 중요성 때문에 그동안 많은 연구가 이루어져 왔다.

일반적인 0-1 혼합형 정수계획문제와 마찬가지로 이제까지 제시된 CFLP의 해법들은 대다수가 Branch and Bound(B&B) 技法을 사용하고 있다. 단지 이러한 해법들에 차이를 둔다면 B&B과정상 이용되는 정수계획문제의 목적함수값에 대한 下限(lower bound)을 (最小化 문제인 경우) 어떻게 구하는 가에 있다. 이제까지 발표된 CFLP의 최적화 해법들 중 Davis와 Ray[5], Sa[13], Ellwein과Gray[6], Akinc와 Khumawala[1], Baker[2], 및 Guignard와 Spielberg[10] 등은 LP-relaxation 방법을 사용하여 下限을 구하였다. 또한 Geoffrion과 Mcbride[9], Nauss[12], Christofides와 Beasley[4], Barcello와 Casanovas[3], Klincewicz와 Luss[11] 및 Van Roy[14] 등은 Lagrangean relaxation 방법을 사용하였다. 그러나 이들 방법들은 下限을 구하는 방법이 같더라도, 下限을 구하는데 사용된 문제의 형태, 下限을 도출하는 방법

* 한국과학기술원 경영과학과
** 계명대학교 산업공학과
*** 단국대학교 경영학과

에 차이가 있다. 실제로 0－1 혼합형 정수계획문제에서 B&B기법의 성공 여부는 下限을 구하는 방법에 달려있다. 下限 그 자체만을 생각할 때는 원 문제의 목적함수 값에 가장 가까운 下限 즉 가장 강력한 下限을 구하는 것이 바람직할 것이다. 왜냐하면 강력한 下限을 구할 수 있다면 전체 B&B의 가지(tree) 數를 줄일 수 있기 때문이다. 그러나 강력한 下限을 얻기 위해 너무 많은 시간을 소요한다면 전체적 계산의 효율성을 떨어뜨릴 수도 있다. 따라서 CFLP의 최적화 해법의 최대과제도 어떤 方法으로 얼마나 효율적인 下限을 구할 것인가에 달려 있다. 따라서 기존에 개발된 해법들을 下限을 구하는 방법과 구해지는 下限이 원 문제의 최적 목적함수 값과 어떤 차이가 있는가를 비교해 보는 것은 의미가 있는 일이라 하겠다. 특히 서로 다른 문제 형태를 이용하고, 또한 서로 다른 relaxation 방법을 사용하는 해법들을 하나의 일관된 구조하에 비교할 수 있다면 더욱 바람직할 것이다.

본 논문에서는 이러한 관점에서 이제까지 제시된 CFLP해법들을 각 해법에 사용된 下限의 도출방법과 각 下限들의 효율성을 중심으로 분류하고, 비교함으로써 향후 새로운 해법의 개발에 방향을 提示하고자 한다.

2. 基本模型

CFLP는 다음과 같이 정식화 할 수 있다.

$$\text{(P)}\quad \text{Min} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij}+\sum_{i\in I} f_i y_i \qquad (1)$$

$$\text{s. t.} \sum_{i\in I} x_{ij}=d_j, \qquad j\in J \qquad (2)$$

$$\sum_{j\in J} x_{ij}\leq s_i y_i, \qquad i\in I \qquad (3)$$

$$x_{ij}\geq 0, \qquad i\in I,\ j\in J \qquad (4)$$

$$y_i = 0 \text{ or } 1, \qquad i\in I \qquad (5)$$

단, $I=\{1, 2, 3, \cdots\cdots, m\}$: 설비입지 후보지들의 集合

$J=\{1, 2, \cdots\cdots n\}$: 수요지들의 集合

d_j : 수요지 j의 수요량

s_i : 공급지 i의 용량

f_i : 공급지 i의 개설비용

c_{ij} : 공급지 i로부터 수요지 j까지의 제품 단위당 공급비용

x_{ij} : 공급지 i로부터 수요지 j까지의 제품 공급량

y_i : 공급지 i가 개설될 경우에는 1의 값을 그외에는 0값을 갖는 변수.

(1)은 비용요소로서 총 수송비용과 설비개설비용의 합을 최소화시키는 것을 나타내고, 제약식 (2)는 각 수요지에서의 수요량이 반드시 만족되어야 함을 나타낸다. 제약식 (3)은 설비의 용량에 대한 上限을 표현하고, 제약식 (5)는 설비 i를 개설 혹은 폐쇄함에 따라 y_i가 1 또는 0의 값을 갖기위한 조건이다.

CFLP를 정식화하기 위해서는 위에서 사용된 제약식들 이외의 다른 제약식이 사용될 수도 있다. 이때 사용될 수 있는 제약식의 형태중 대표적인 것은 다음과 같다.

$$x_{ij}\leq d_j y_i, \qquad i\in I,\ j\in J \qquad (6)$$

$$\sum_{j\in J} x_{ij}\leq s_i, \qquad i\in I \qquad (7)$$

$$\sum_{i\in I} s_i y_i \geq \sum_{j\in J} d_j. \qquad (8)$$

제약식 (6)은 모든 설비의 공급량은 어떤 수요지의 수요량보다도 크다는 가정하에서 표시된 것이나, 이러한 가정이 바뀌어도 약간의 변환을 통하여 동일한 형태의 제약식으로 나타낼 수 있다.

위의 각 식은 기본모형에 사용된 제약식들에 부가될 때는 無用한(redundant) 제약식들이다. 다만 (6), (7)식이 같이 사용될 경우는 제약식 (3)을 생략할 수 있다. 다음 節에서 이러한 제약식들의 사용방법에 따라 下限을 구하는 방법과 구해진 下限의 효율성에 크게 차이가 있음을 보일 것이다.

3. 기존연구결과

앞서 언급한대로 이제까지 제시된 CFLP에 대한 최적화 해법은 B&B기법을 사용하고 있다. 이들 B&B해법의 중요한 요소는 (1) 변수고정방법(Variable fixing rule) (2) 下限의 도출 (3) Node의 선택규칙(Node selection criterion) (4) Branching변수의 결정방법들이다. 그러나 실제로 각 해법들의 효율성을 결정적으로 좌우하는 것은 역시 각 Node에서 발생되는 후보문제(candidate problem) － 원 문제에서 몇개의 y_i의 값을 0 또는 1로 고정시킨 문제 － 의 목적함수 값에 대한 下限을 구하는 방법이다.

일반적으로 0－1 혼합형 정수계획문제의 下限을 구하는데는 정수변수 y_i의 제약을

$$0\leq y_i\leq 1, \qquad i\in I \qquad (9)$$

表 1. CFLP 해법별 대상문제 형태와 下限 도출 방법

사용된제약식	下限 도출 방법	해법	비고
(2) (3) (4) (5)	LP relaxation	Akinc와 Khumawala[1] Sa[13] Ellwein과 Gray[6]	
	Lagrangean relaxation	Geoffrion과 Mcbride[9] Christofides와 Beasley[4] Barcelo와 Casanovas[3]	(2)식 완화 (2)식 완화 (2)식 완화, 단일 배정
(2) (4) (5) (6) (7)	LP relaxation	Davis와 Ray[5]	
(2) (3) (4) (5) (6)	LP relaxation	Guignard와 Spielberg[10] Baker[2]	
	Lagrangean relaxation	Klincewicz와 Luss[11]	(3)식 완화
(2) (3) (4) (5) (8)	Lagrangean relaxation	Nauss[12]	(2)식 완화
(2) (3) (4) (5) (6) (8)	Lagrangean relaxation	Van Roy[14]	(3)식 완화

의 제약식으로 완화한 선형계획문제를 이용하는 LP-relaxation 방법과, 일부의 제약식만을 Lagrangean승수를 이용하여 완화시키는 Lagrangean relaxation 방법이 사용된다. 그러나 이 두가지 方法을 CFLP에 적용하는 경우에도 어떠한 형태의 제약식을 이용하여 CFLP를 표시하느냐에 따라 下限을 구하는 方法과 구해진 下限의 효율성에 커다란 차이가 생기게 된다.

이제까지 제시된 대표적인 CFLP의 해법들을 이러한 관점에서 각 해법에 사용된 제약식들과 下限을 구하는 방법에 대해 분석한 것이 表 1에 표시되어 있다. 여기서는 각 경우의 대표적인 해법들에 대해서 분석하기로 한다.

3. 1. 下限을 구하는 方法

이들 각 해법들에서 下限을 구하기 위해 사용된 방법은 다음과 같다.

(Akinc와 Khumawala의 해법)

Akinc와 Khumawala[1]가 다룬 문제의 형태는 특별히 CFLP의 "Weak formulation"이라 하는데 이 문제의 완화된 선형계획문제는 수송문제로 표시될 수 있다. 왜냐하면 완화된 선형계획문제의 최적해에서 제약식 (3)은 항상 등식으로 성립되어야 하므로 이를 이용 변수 y_i를 소거할 수 있기 때문이다.

(Davis와 Ray의 해법)

Davis와 Ray[3]는 (6)번 제약식 때문에 Akinc와 Khumawala의 경우보다 제약식이 m×n개만큼 추가되어 완화된 선형계획문제도 대규모의 문제가 된다. 그래서 이들은 완화된 선형계획문제의 쌍대문제를 Dantzig-Wolfe의 Decomposition方法을 이용하여 풀었다.

(Guignard와 Spielberg의 해법)

Guignard와 Spielberg[7]가 다룬 문제형태를 CFLP의 "Strong formulation"이라 하는데 이 경우도 Davis와 Ray의 경우처럼 대규모 문제가 된다. 그래서 이들도 완화된 선형계획문제를 직접 풀지 않고, 쌍대문제의 실행가능해를 발견적해법(heuristic)으로 구하는 방법을 사용하였다. 따라서 이 경우에 구해진 下限은 완화된 선형계획문제의 최적해에 대한 목적함수 값보다 낮은 값이 된다.

(Baker의 해법)

Baker[2] 역시 Guignard와 Spielberg처럼 strong formulation을 다루었으므로 완화된 선형계획 문제가 대규모 문제가 된다. Baker는 완화된 선형계획문제를 풀기 위하여 Lagrangean완화식을 사용하였다. 즉 완화된 선형계획문제에서 제약식 (6)을 Lagrangean방식으로 처리하면 Lagrangean副問題(Subproblem)가 Akinc와 Khumawala의 경우처럼 수송문제로 변화됨을 이용 下限을 구하였다.

(Geoffrion과 Mcbride의 해법)

Geoffrion과 Mcbride[6]는 "Weak formulation" 형

태에서 수요에 대한 제약식 (2)를 완화시키는 Lagrangean완화방법을 사용 下限을 구하였다. 이때 제약식 (2)에 대한 Lagrangean승수를 λ_j라 하면 Lagrangean 副問題는 다음과 같은 형태가 된다.

$$\begin{aligned} LR(\lambda) \quad & \text{Min} \ \sum_{j\in J}\lambda_j d_j + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(c_{ij}-\lambda_j)x_{ij} \\ & \qquad + \sum_{i\in I} f_i y_i \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j\in J} x_{ij} \leq s_i y_i, \quad i\in I \qquad (3) \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i\in I,\ j\in J \quad (4) \\ & y_i = 0 \text{ or } 1, \quad i\in I. \qquad (5) \end{aligned}$$

(Nauss의 해법)

Nauss[8] 역시 Geoffrion과 Mcbride처럼 수요에 대한 제약식 (2)를 완화시키는 Lagrangean완화방법을 사용하였다. 다만 차이가 있다면 Nauss의 경우는 Lagrangean副問題가 LR(λ)에 제약식 (8)이 추가된 형태이므로 문제의 해결이 조금 복잡해진다. 그러나 Nauss는 LR(λ)가 m개의 작은문제로 나누어지므로 제약식 (8)을 고려한 추가적인 0 − 1 Knapsack 문제를 풀어 해결할 수 있음을 보였다. 이때 Lagrangean 승수는 Subgradient방법을 사용 도출하였다.

(Van Roy의 해법)

Van Roy[9]는 Nauss처럼 제약식 (8)을 추가하였으나 後者와는 달리 제약식 (3)을 완화시키고, 副問題에 제약식 (6)을 추가하였다. 따라서 Van Roy의 경우는 Lagrangean副問題가 용량에 제한이 없는 입지선정문제(Uncapacitated Facility Location Problem)에 제약식 (8)이 추가된 형태가 된다. Van Roy는 이러한 副問題를 풀기 위하여 Erlenkotter[4]의 dual−based 해법을 사용하였다. 특히 Lagrangean승수는 副問題를 풀때 구해진 정수변수 y_i의 값을 대입시켜 푼 수송문제의 쌍대해를 이용 도출하였는데, 이러한 기법을 그는 교차분할기법(Cross decomposition method)이라 칭하였다.

3.2. 구해진 下限들간의 관계

여기서는 각 해법들에서 구해질 수 있는 最上의 下限들간의 관계를 살펴보기로 한다. 여기서 "最上의 下限"이라 한 것은 어떤 기법은 下限을 구할 때 최적해까지 구하지 않는 경우가 있기 때문이다. 즉 最上의 下限이란 LP완화 방법의 경우 완화된 선형계획문제의 최적해, Lagrangean완화 방법을 사용하는 경우 최적승수를 이용하여 구한 副問題의 최적해에 해당하는 下限을 의미한다.

분석을 위해 각 해법에서 구해지는 최상의 下限은 어떠한 선형계획문제의 최적 목적함수 값에 대응되는지 표시하고 대응되는 문제의 실행가능 영역을 비교하여 下限들간의 관계를 비교하기로 한다. 이를 위해서는 Lagrangean완화 방법을 사용할 때 구해지는 最上의 下限이 어떤 선형계획문제의 최적목적함수 값과 일치하는지를 알아야 한다. 이를 위해서는 Geoffrion

表 2. 해법別 최상의 下限과 동일한 목적함수 값을 주는 문제

해 법	실 행 가 능 영 역	下限 표시
공통(목적함수)	Min $\sum_i\sum_j c_{ij}x_{ij} + \sum_i f_i y_i$	
Akinc & Khumawala	s. t. (2)(3)(4)(9)	LB_{AK}
Davis & Ray	s. t. (2)(6)(7)(4)(9)	LB_{DR}
Guignard & Spielberg	s. t. (2)(3)(6)(4)(9)	LB_{GS}
Baker	s. t. $x_{ij} \leq d_j u_i$, $i\in I$, $j\in J$ $(x_{ij}, y_i) \in Co\{(x_{ij}, y_i) \mid$ satisfying (2)(3)(4)(9)$\}$	LB_B
Geoffrion & Mcbride	s. t. $\sum_i x_{ij} = d_j$, $j\in J$ $(x_{ij}, y_i) \in Co\{(x_{ij}, y_i) \mid$ satisfying (3)(4)(5)$\}$	LB_{GM}
Nauss	s. t. $\sum_i x_{ij} = d_j$, $j\in J$ $(x_{ij}, y_i) \in Co\{(x_{ij}, y_i) \mid$ satisfying (3)(8)(4)(5)$\}$	LB_N
Van Roy	s. t. $\sum_j x_{ij} \leq s_i y_i$, $i\in I$ $(x_{ij}, y_i) \in Co\{(x_{ij}, y_i) \mid$ satisfying (2)(6)(8)(4)(5)$\}$	LB_V

〔5〕이 제시한 Lagrangean 완화와 partial convex hull 완화와의 관계를 이용할 수 있다.

이러한 방법을 통하여 구해진 내용이 表2에 나타나 있다. 즉 表2는 각 기법들에 구해지는 최상의 下限은 어떠한 실행가능 영역을 갖는 선형계획 문제의 최적목적함수 값과 일치하는지를 보여주고 있다. 이때 기호 Co는 어떤 집합의 Convex hull을 표시하는 것으로 정의한다.

表2의 분석을 통해 각 기법이 제공하는 最上의 下限들간의 관계를 다음과 같이 도출할 수 있다.

Property.

(1) $LB_{AK} \leqq LB_{GS} = LB_{GM} = LB_{B} \leqq LB_{V}$

(2) $LB_{DR} \leqq LB_{GS} \leqq LB_{N}$

여기서 관계가 不明한 것은 LB_{AK}와 LB_{DR} 그리고 LB_{V}와 LB_{N}인데 이는 자료의 성질-비용계수등 -에 따라 좌우된다. 그러나 평균적으로는 LB_{DR}이 LB_{AK}보다 LB_{V}가 LB_{N}보다 강력한 것으로 나타나 있다.

4. 결 론

앞 節의 下限을 구하는 방법과 구해진 下限의 효율성간의 관계를 살펴보면 0-1 혼합형 정수계획법에서의 일반적인 사실처럼 강력한 下限을 구하려면 下限을 구하는 문제의 난이도가 높아진다는 것을 알 수 있다. 따라서 해법의 효율성문제는 下限의 효율성 증가에 대한 난이도의 증가의 관계에 좌우된다. 이제까지 CFLP의 경우 단편적인 자료이기는 하나 각 논문에 발표된 계산결과를 분석하면 Van Roy의 기법이 가장 효율적인 것으로 나타나 있다. 이는 강력한 下限을 구하는데 Erlenkotter의 dual-based기법을 사용 상대적으로 적은 노력을 들일 수 있었기 때문이다.

따라서 향후 CFLP의 효율적 해법을 개발하는 노력도 下限의 효율성과 이러한 下限을 구하는데 드는 노력의 정도를 감안하여 이루어져야 한다. 이를 위해서는 表1 및 表2에 표시된 기존 해법들의 下限간의 관계와 이 下限을 구하는데 사용된 방법 즉 완화된 선형계획법의 풀이방법, Lagrangean副問題의 해결방법 및 Lagrangean승수의 도출방법 등을 참고할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

1. Akinc, U. and Khumawala, B. M., An Efficient Branch and Bound Algorithm for the Capacitated Warehouse Location, *Management Science,* Vol 23, No 6, pp 585-594, 1977.
2. Baker, B. M. A Partial Dual Algorithm for the Capacitated Warehouse Location Problem, *European Journal of Operational Research,* Vol 23, pp 48-56, 1986.
3. Barcelo, J. and Casanovas, J. A heuristic Lagrangean algorithm for the Capacitated Plant Location Problem, *European Journal of Operational Research,* Vol 15, pp 212-226, 1984.
4. Christofides, N. and Beasley, J.E., An Algorithm for the Capacitated Warehouse Location Problem, *European Journal of Operational Research,* Vol 12, pp 19-28, 1983.
5. Davis, P.S. and Ray, T.L., A Branch and Bound Algorithm for the Capacitated Facilities Location Problem, *Naval Research Logistics Quarterly,* Vol 16, No 3, pp 331-344, 1969.
6. Ellwein, L.B. and Gray, P., Solving Fixed Charge Location - Allocation Problems with Capacity and Configuration Constraints, *AIIE Transactions* Vol 3, pp 290-298, 1971.
7. Erlenkotter, D., A Dual-based Procedure for Uncapacitated Facility Location, *Operations Research,* Vol 26, pp 992-1009, 1978.
8. Geoffrion, A.M., Lagrangean Relaxation for Integer Programming, *Mathematical Programming Study,* Vol 2, pp 82-114, 1974.
9. Geoffrion, A.M. and Mcbride, R., Lagrangean Relaxation Applied to Capacitated Facility Location Problems, *AIIE Transactions,* Vol 10, No 1, pp 40-47, 1978.

10. Guignard, M. and Spielberg, K., A Direct Dual Method for the Mixed Plant Location Problem with Some Side Constraints, ***Mathematical Programming*** Vol 17, pp 198 – 228, 1979.

11. Klincewicz, J.G. and Luss, H., A Lagrangean Relaxation Heuristic for Capacitated Facility Location with Single – Source Constraints, ***Journal of Operational Research Society,*** Vol 37, No 5, pp 495 – 500, 1986.

12. Nauss, R.M., An Improved Algorithm for the Capacitated Facility Location Problem, ***Journal of Operational Research Society,*** Vol 29, No 12, pp 1195 – 1201, 1978.

13. Sa, G., Branch and Bound and Approximate Solutions to the Capacitated Plant Location Problem, ***Operations Research,*** Vol 17, pp 1005 – 1016, 1969.

14. Van Roy, T.J., A Cross Decomposition Algorithm for Capacitated Facility Location, ***Operations Research,*** Vol 34, No 1, pp 145 – 163, 1986.