
 論 文

大韓造船學會誌
 第23卷 第3號 1986年 9月
 Journal of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 23, No. 3, September 1986

케이블구조물의 고유진동수 추정을 위한 근사식

이 상 무* · 김 용 철*

A Simple Technique to Predict the Natural Frequencies of the Sagged Cable Structures

by

Sang-moo Lee · Yong-chul Kim

Abstract

This paper deals with a simple, approximate formula to predict the natural frequencies of the sagged cable structures.

Assuming that the propagation velocity of the lateral wave is dependent only on the local mass per unit length and local tension, the explicit simple formula to predict the fundamental period is newly derived. The modified form of this formula is also presented for the prediction of the fundamental period of general shaped cable structures. The results of comparisons shows fairly good agreements with experimental results and with theoretical ones.

This formula is also used to predict the natural frequencies of a long vertical cable and the derived approximate formula in that case, becomes identical to the exact solution.

Nomenclature

C_i : wave propagation velocity
 $E(\alpha, k)$: elliptic integral of the second kind
 $F(\alpha, k)$: elliptic integral of the first kind
 g : gravitational acceleration
 H : horizontal component of the cable tension
 L : cable length
 m : mass of the cable per unit length
 Δm : added mass per unit length
 s : tangential coordinate along the cable length
 T_c : cable tension
 T_0 : bottom end tension of the vertical cable
 T_1 : fundamental period of the cable structure

v : parameter ($\sqrt{T_0/m}$)
 x : horizontal coordinate originated at the tangent touch down
 z : vertical coordinate originated at the tangent touch down point
 ϕ : horizontal angle of the cable
 ϕ_0 : horizontal angle at one end of the cable
 ϕ_1 : horizontal angle at the other end of the cable

1. 서 언

최근에 힘이나 전기적 신호를 멀리까지 보낼 수 있는 케이블구조물의 특성을 이용하여 수심이 깊은 대양의 해저에까지 인간의 활동영역을 넓혀 나가고 있으며 이러한 케이블 구조물은 예인시스템이나 제류시스템에

있어서 필요불가결한 장비가 되었다. 해양조사를 위해 사용하는 수중음파탐지기나 수중촬영기를 예인하는 경우나 구난정의 예인, 해양구조물등을 예인, 선박이나 해양구조물 및 수상, 수중부표의 계류등 그 용도가 다양하다.

해양구조물의 표류운동을 구속하기 위하여 사용되는 계류삭은 주위환경의 영향을 받아 형상이 시시각각으로 변한다. 특히 환경하중이나 부유체의 운동에 의하여 계류삭이 고유진동수로 기진되는 경우에는 공진현상에 의한 대변형과 아울러 대단히 큰 하중이 반복적으로 작용하여 피로파괴가 일어날 수 있다.

중력의 영향에 의하여 처진 cable이나 계류삭등은 구조물이 간단하기 때문에 그 특성을 파악하는 것이 쉬울 것처럼 보이나 일반적인 구조물과는 달리 중력과 인장력, 관성력의 3가지 힘이 동시에 작용하기 때문에 특성을 파악하기가 쉽지 않다. 처진 케이블에 관련된 여러가지 문제를 해석하는 과정에서 수학적함수나 방정식등이 발견되기도 하였다. 16세기말엽에 현에 하중을 주는 실험으로부터 힘의 삼각형이 발견되었고 17세기말에 J. Bernoulli, Leibnitz, Huygens등에 의하여 현수선의 식(catenary equation)이 유도되었다.

현의 진동문제는 18세기초에 활발히 연구되었으며 특히 Lord Rayleigh가 공헌을 많이 하였다. 1738년에 D. Bernoulli는 한쪽끝이 매달려있는 사슬의 고유진동수에 대한 해를 발표했다. 그 해는 무한급수로 표현된 것이었는데 지금은 zero order Bessel함수로 표현된다. 케이블의 진동에 있어서 1820년에 Poisson은 일반적인 하중상태에의 케이블요소의 움직임에 대한 편미분방정식을 발표하였다. 그후 여러 사람들이 케이블문제에 관여하였다. 1953년에 Saxon and Cahn[2]은 케이블이 비탄성이란 가정하에 현수선이 포함되는 수직면에서 일어나는 평면내진동에 관한 이론을 발표하였으며, 처짐이 큰 케이블에도 적용될 수 있으면서 그때까지 알려진 처짐이 작은 경우에도 일치하는 결과를 얻었다. 한편, Goodey[3]는 다른방법으로 처짐이 큰 경우에 대한 해를 구하였다. 근래에는 F.E.M등과 같은 수치해석방법을 이용하여 임의 형상의 케이블구조물에 대한 고유진동형을 추정하고 있다.

본 논문에서는 선박이나 석유추진등의 해양구조물에 사용되는 계류삭의 고유진동수를 간단하게 추정할 수 있는 근사식을 계류삭에 파동이 전달되는 속도개념으로부터 유도하였으며, 이에 대한 검증을 보이고자 한다.

2. 근사식의 유도

Fig. 1과 같은 현수선이 재질이 균일하고, 굽힘강성이 작으며, 중력에 의한 영향이 유체항력보다 지배적이면, 현수선의 정적 평형상태로부터 현수선의 식은

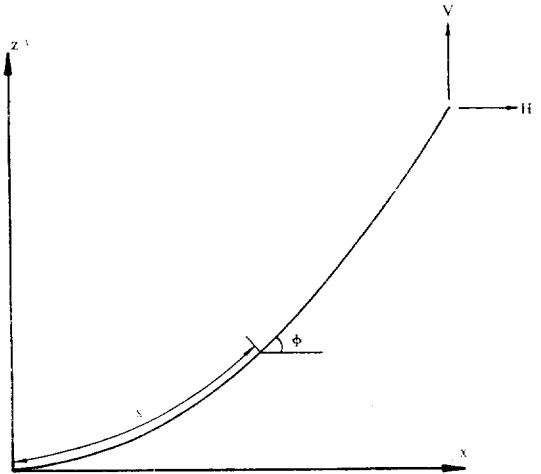


Fig. 1 Coordinate system for a catenary cable

$$\frac{mgs}{H} = \tan \phi \tag{1}$$

이 때 현수선상의 임의의 위치는

$$x = \frac{H}{mg} \sinh^{-1} \tan \phi$$

$$z = \frac{H}{mg} \sec \phi$$

와 같이 주어진다. 여기에 mg 는 단위길이당 무게를 나타내고, s 는 현수선을 따라 정의되는 접선좌표, H 는 현수선에 걸리는 정적 인장력의 수평방향분력이며, (x, z) 는 현수선의 기울기가 영이 되는 위치에 원점을 둔 직교좌표계이며, ϕ 는 현수선의 임의점에서의 각도를 의미한다.

현수선이 횡방향진동을 할 때에 진동은 단위길이당의 질량에 의한 관성력과 인장력에 의해 진동이 일어난다. 현의 진동문제에서는 인장력이 진동에 의해 변하는 양이 작다고 하여 운동방정식이 유도된다. 케이블의 운동문제나 계류삭의 운동문제에 있어서도 인장력과 관성력에 의하여 진동이 일어난다고 가정하고, 케이블의 미소요소에서의 진동은 인장력의 변화를 수반하지 않는다고 보면, 케이블을 따라 전파되는 파동의 전파속도는

$$C_t = \sqrt{\frac{T_e}{m + \Delta m}} \quad (2)$$

로 쓸 수 있다. 여기에 T_e 는 인장력을 나타내고, m 은 단위길이당의 케이블의 질량을 나타내며, Δm 은 부가 질량을 나타낸다.

이와 같은 파동의 전달개념은 진동형상이 파동전달 속도에 영향을 미치지 않은 경우에 적용될 수 있다. 현의 진동이나 비틀림진동, 축방향의 탄성진동이 이런 부류의 진동에 해당된다[5]. 그러나, 중력의 영향에 의하여 치진 케이블은 진동형에 따라 파동의 전달속도가 달라질 수 있다. 이에 대하여는 뒤에서 다시 거론될 것이며, 여기서는 진동형이 파동의 전달속도에 주는 영향이 작다고 보고 파동전달속도 개념을 적용한다. 파동이 케이블의 미소길이 ds 만큼 전파되는데 소요되는 시간은

$$dt = ds/C_t$$

로 쓸 수 있다.

현수선의 식으로부터 인장력 T_e 는 위치에 따라 달라지게 되며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_e = H \sec \phi = H \sqrt{1 + \left(\frac{mgs}{H}\right)^2} \quad (3)$$

케이블의 한 쪽 경계에서 다른 한쪽 경계까지 파동이 전파되고 다시 돌아와서 도착할 때까지 걸리는 시간은 기본주기 T_1 으로

$$T_1 = 2\sqrt{\frac{m + \Delta m}{H}} \int^L \left\{1 + \left(\frac{mgs}{H}\right)^2\right\}^{-1/4} ds \quad (4)$$

로 표시된다. 여기서 L 은 케이블의 전체길이를 나타낸다. 이 식은 케이블의 기본고유주기를 케이블을 따라서 왕복하는 파동이 정상파를 이룰 때의 주기라고 보는 것이다.

식(4)의 적분변수 s 를 식(1)의 관계를 이용하여 적분변수 ϕ 로 바꾸면

$$T_1 = 2\sqrt{\frac{m + \Delta m}{H}} \cdot \frac{H}{mg} \cdot f(\phi_0) \quad (5)$$

여기에

$$f(\phi_0) = \int_0^{\phi_0} \sec^{3/2} \phi d\phi \quad (6)$$

이며, ϕ_0 는 케이블의 끝단에서의 경사각을 의미한다. 케이블을 따라서 인장력이 변하는 효과는 $f(\phi_0)$ 로만 나타나게 된다.

식(6)의 적분형은 해석적으로 적분이 가능하다. 또한 식(6)은 문헌 [3]에서 지지점의 높이가 같은 케이블의 고유진동수에 대한 식을 구하는 과정에서도 나타난다. 식(6)의 해는 다음과 같다.

$$f(\phi_0) = 2 \tan \phi_0 \cdot \sqrt{\cos \phi_0}$$

$$+ \sqrt{2} \left[F\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2E\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right] \quad (7)$$

여기서,

$$\alpha = \cos^{-1}(\sqrt{\cos \phi_0})$$

$$F(\alpha, k) = \int_0^\alpha (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta$$

$$E(\alpha, k) = \int_0^\alpha (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta \quad (8)$$

이며 $F(\alpha, k)$ 는 제 1종 타원적분이고, $E(\alpha, k)$ 는 제 2종 타원적분이다.

식(5)에서 부가질량의 효과는 계류근의 함수로 나타나고 있으므로, 수중에서의 케이블형상이 공기중에서의 정적평형 형상과 일치한다면 수중 케이블의 기본주기는 공기중에서의 같은 형상의 기본주기에 $\sqrt{(m + \Delta m)/m}$ 를 곱하여 얻을 수 있다.

3. 계류삭형상의 기본 고유주기

해상구조물의 위치 확보에 흔히 쓰이는 계류삭은 용도에 따라서 수중에서의 정적 평형형상이 다양하다. 해저에서 계류삭의 기울기가 영이 되는 경우가 대부분이나 경우에 따라서는 해저에서의 경사각이 영이 되지 않을 수도 있다.

이 때는 Fig. 2a와 같이 해저에서의 계류삭의 경사각을 ϕ_1 이라고 계류되는 부유체와 만나는 위치에서의 경사각을 ϕ_0 라 하면, 계류삭의 기본주기는 식(4) 혹은 식(5)로부터

$$T_1 = \frac{2\sqrt{(m + \Delta m)H}}{mg} \{f(\phi_0) - f(\phi_1)\} \quad (9)$$

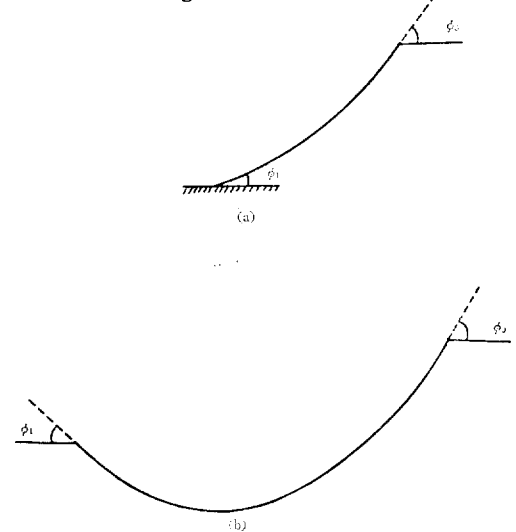


Fig. 2 General shape of sagged cables

이 된다.

한편, 어떤 지점과 지점을 잇는 케이블등의 경우에는 Fig. 2b와 같이 케이블상의 임의의 위치에 가장 쳐진 부분이 있고, 이런데서 케이블의 경사각이 영이 될 수 있다. Fig. 2b와 같이 쳐진 케이블에서, 기울기가 영이되는 위치를 경계로 좌우로 분리하여, 각 케이블에 대하여 식 (4)와 식(5)를 적용하고, 각 케이블에 대한 기본 고유주기를 구하여 더하면, 전체 기본고유주기는

$$T_1 = \frac{2\sqrt{(m+\Delta m)H}}{mg} \cdot \{f(\phi_0) + f(\phi_1)\} \quad (10)$$

된다.

쳐진 케이블의 진동은 케이블을 포함하는 수직 평면 내에서 일어나는 평면내진동형과 그 수직평면에 다시 수직인 방향으로 진동이 일어나는 평면의 진동형으로 나눌 수 있다.

기본고유주기 T_1 이 얻어졌을 때, 기본진동수는 $\omega_1 = 2\pi/T_1$ 으로 얻어진다. 고차고유진동수의 고유주기는 T_1 을 정수배로 나눈 값이 된다고 보고, 고차 고유진동수는 다음 식과 같이 추정할 수 있다[1, 4].

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T_1} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

이 식은 평면의 진동형의 고유진동수를 추정하는 데 적용할 수 있다. 반면에, 평면내 진동형의 고유진동수는

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_1} (1+n) \quad n=1, 2, 3, \dots$$

으로 나타내어진다. 평면내 진동형의 최저고유진동수는 평면의 고유진동수의 최저진동수보다 $2\pi/T_1$ 만큼 크게 추정해야 한다. 이는 중력장에 놓여있는 쳐진 구조물의 특성 때문이다[1]. 일반적으로 계류삭이나 현수선의 고유진동수는 평면의 진동형의 제일차 고유진동수가 최저진동수가 된다.

고차 고유진동수를 이러한 방법으로 추정하는 데에는 오차가 개입될 소지가 많다. 왜냐하면, 진동수가 높아질수록 등인장력의 효과가 크게 나타나서 케이블을 따라 전달되는 파동의 속도가 달라지기 때문이다.

같은 높이에서 지지되는 케이블의 고유주기에 관한 문제는 오래전부터 여러 사람들의 관심의 대상이 되어 왔으며, 여러문헌에서 이론계산 및 실험결과등을 찾아볼 수 있다[2, 3]. 식(10)에서 부가절단을 영이라하고, 지지점의 끝단에서의 경사각이 같으므로 $\phi_0 = \phi_1$ 으로 놓으면

$$T_1 = \frac{4}{g} \sqrt{\frac{H}{m}} f(\phi_0) \quad (11)$$

으로 근사시킬 수 있다. 경사각이 미소한 경우에 $f(\phi_0)$

$\sim \phi_0$ 가 되고 식(1)에서 $\frac{mgL}{2H} \sim \phi_0$ 가 되므로 케이블의 최저 고유진동수는

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{H}{m}} \quad (12)$$

가 되어 현의 고유진동수식과 일치하게 된다. 여기서, L 은 현의 길이이다.

4. 자중을 고려한 수직 케이블구조물의 고유진동수

앞에서 서술한 파동의 전달개념은 수직으로 고정된 구조물의 고유진동수를 추정하는데에도 적용될 수 있다. Fig. 3과 같이 케이블의 길이를 L , 단위길이당 무게를 mg , 케이블하단에서의 인장력을 T_0 라 하자. 또한 수직케이블의 하단에 원점을 잡고, 수직상방으로 Z 축

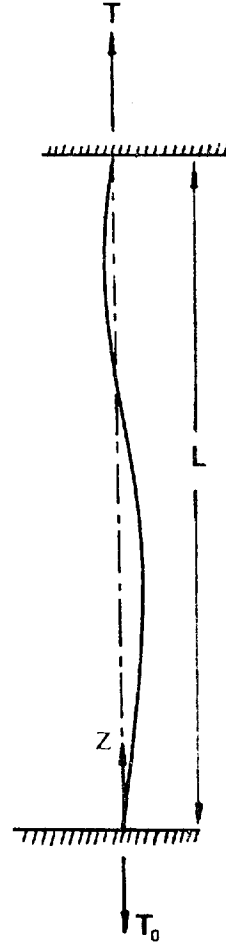


Fig. 3 A vertical cable subject to its own weight

을 취하던 인장력은

$$T_s = mgz + T_0 \tag{13}$$

이 된다.

현수선의 경우와 같이 파동의 전달속도를

$$C_i = \sqrt{T_s / (m + \Delta m)}$$

으로 적용하던 제일차 고유진동수의 기본고유주기는

$$T_1 = 2 \sqrt{\frac{(m + \Delta m)}{T_0}} \int_0^L \left(1 + \frac{mgz}{T_0}\right)^{-1/2} dz \tag{14}$$

으로 주어지게 된다. 적분을 수행하고 나면 기본고유주기는

$$T_1 = 4 \sqrt{\frac{m + \Delta m}{m}} \cdot \frac{v}{g} \cdot \left[\sqrt{\frac{gL}{v^2} + 1} - 1 \right] \tag{15}$$

이 된다 여기에 $v = \sqrt{T_0/m}$ 이다. 고차진동수는 ω_1 에 n 배를 취하여 얻어질 수 있다. 식(15)에서 부가질량에 영인 경우에는 F.H. Wolff[4]가 엄밀해로 부터 근사시켜서 얻은 식과 일치한다.

5. 계산결과 및 고찰

처진 케이블의 진동은 케이블을 포함하는 평면에 수직하게 진동하는 평면외 진동형(out-of plane)과 평면 내에서 진동하는 평면내 진동형(in-plane)의 두가지로 나뉘고, 평면내의 진동형을 다시 대칭진동형과 비대칭진동형으로 나뉘어진다. 케이블의 진동은 진동형에 따라서 진동특성이 달라지게 된다. 현의 진동과는 달리 케이블의 최저차 진동형은 비대칭 진동형이 된다. 비대칭진동형은 케이블의 인장력변화를 수반하지 않기 때문이다[1]. 따라서 케이블구조물에 있어서 최저차 진동형은 평면외 진동형으로 주어지게 되며 식(11)은 이 때의 고유주기를 나타낸다. 또한 평면내 진동형은 식(11)로 주어지는 값에 2배를 취하여 기본주기를 추정하여 볼 수 있다.

결론적으로 본 논문에서 얻어지는 근사식은 진동형에 구애되지 않으므로 평면외진동형과 평면내진동형에 둘다 적용될 수 있게 된다. 반면에 근사치라는 점에 유의해야 한다. 왜냐하면 현의 진동은 최저차 진동형이 대칭진동형이며 증력효과에 의한 처짐이 어느정도 이상 증가하면 최저차진동형이 비대칭진동형으로 바뀌어진다. 최저차 진동형이 바뀌는 현상등은 본 논문에 의한 식으로서는 설명이 되지 않기 때문이다. 이에 대해서는 Irvine[1]에 자세하게 설명되어 있다.

한 끝단이 해저에 놓여 있는 계류사의 고유진동수는 비선형 영향을 많이 받는다. 계류사가 부유체에서 나와서 해저에 닿는 지점에서 anchor까지는 보통 상당한

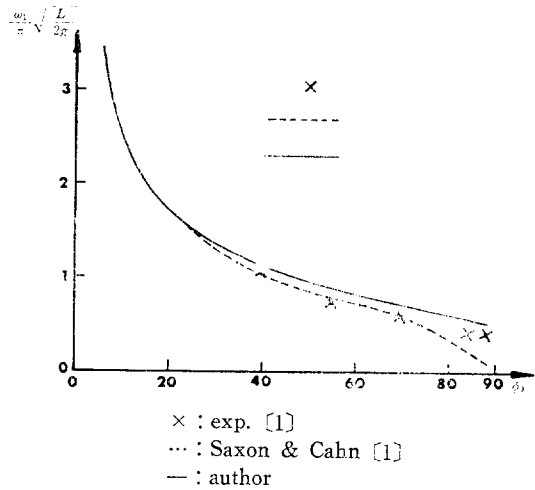


Fig. 4 First natural frequency for a evenly suspended cable

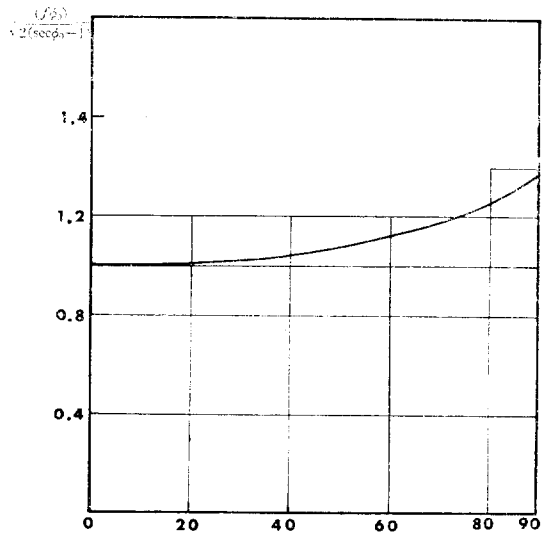


Fig. 5 Period factor $f(\phi)$

거리, payout length가 있다. 해저에 닿아있는 계류사는 위로는 움직일 수 있으나 해저 밑으로 내려갈 수는 없다. 이러한 계류사의 고유진동수를 추정하는 경우에 경계조건 설정이 쉽지 않으므로 계류사의 고유진동수를 정의하기 어렵게 된다. 이런 이유로 복잡하면서도 정밀한 계산보다 간단한 근사식이 필요하게 되는 것이다.

여기서 제시하는 방법은 Fig. 5와 소형 calculator를 이용하여 임의의 케이블구조물의 고유진동수를 근사적

케이블구조물의 고유진동수 추정을 위한 근사식

으로 추정하는데 적용될 수 있다.

계산 방법의 정도비교를 위하여 같은 높이로 지지되는 케이블의 고유진동수를 계산하여 보았다. 지지점에서의 경사각 변화에 대한 고유진동수 변화를 살펴 보았으며 계산결과는 Fig. 4에 도시하였다. 끝점에서의 경사각이 작을 경우에 Saxon & Cahn의 결과와 비슷하다. 반면에 경사각이 40° 근처에서 차이가 벌어지고 있음을 관찰할 수 있다. 차이가 발생하는 원인은 기본주기식을 유도하는데 무시하였던 동인장력의 영향으로 보인다. 즉, 케이블이 처짐이 클수록 정적평형 인장력의 변화가 크고, 동인장력의 변화가 상대적으로 달라지면서 파동의 전달속도에 영향을 주기 때문인 것으로 사료된다.

한편, 동인장력의 효과는 케이블의 전체적인 형상에 좌우될 것이므로 경계조건에 따라 달라지게 된다. 예를 들면, 한쪽경계점에서의 경사각이 85°이고, 다른 한쪽 경사각이 80°이며, 최대처짐이 그 사이에 없는 경우에는 동인장력의 영향은 크지 않을 것이다. 반면에 같은 경계조건이면서도 최대처짐이 그 지지점 사이에 있는 경우에는 동인장력의 영향이 상대적으로 크게 나타날 것이다. 따라서, 본 근사식유도에서는 동인장력을 무시하였으므로, 동인장력의 효과가 크게 미칠

수 있는, 처짐량이 큰 구조물에 대하여 적용할 때에는 주의하여야 한다.

지지점의 한 끝단은 위에 있고 다른 한 끝단은 아래에 크게 경사져 있는 경우에는 식(15)을 적용할 수 있다.

지지점의 높이가 같고, 경사각이 90°에 가까울 경우에 케이블 구조물의 진동수 극한값은 $1.20\sqrt{2g/L}$ 이고 본 논문에서의 방법으로는 $1.6\sqrt{2g/L}$ 정도가 되고 있다. Goodey [3]의 결과에 의하면 제 2 차고유진동수는 제 1 차고유진동수에 일치한다고 보여졌다. 그 이유로 하단이 자유롭게 데달린 케이블구조물인 진동형이 끝부분에서만 조금 다르기 때문이라고 지적하였다. 여기서의 방법으로는 제 2 차고유진동수는 단순히 제 1 차고유진동수의 1.5배로 나타난다. 따라서 본 논문에서의 근사식은 경사각이 90° 근처에서 고차진동수를 추정하는 데에서는 주의를 요한다.

수직케이블 구조물의 경우는 F.H. Wolff[4]의 근사식과 일치하며 Bessel식으로 나타나는 엄밀해와 비교해서 Table 1에 보인 범위에서 오차가 5%이내이다. 특히 현의 길이에 걸쳐 일정한 인장력이 걸린다고 보고서 고유진동수를 추정하는 고전이론과 비교해보면, 케이

Table 1 Fundamental period for vertical cables

v (m/sec)	Fundamental Period(Sec) For Various Cable Lengths(m)									
	15.2	30.5	61	122	183	244	305	366	427	
152.5	A	0.20	0.40	0.80	1.60	2.40	3.20	4.00	4.60	5.60
	B	—	—	—	1.58	2.35	3.12	3.88	4.63	5.37
	C	—	—	—	1.58	2.36	3.12	3.88	4.627	5.368
61	A	0.50	1.00	2.00	4.00	6.00	8.00	10.00	12.00	14.00
	B	—	—	—	3.72	5.42	7.02	8.54	10.00	11.41
	C	—	—	—	3.72	5.41	7.01	8.53	9.99	11.38
30.5	A	1.00	2.00	4.00	8.00	12.00	16.00	20.00	24.00	28.00
	B	0.96	1.86	3.51	6.38	8.88	11.12	13.18	15.09	16.88
	C	0.962	1.86	3.50	6.37	8.85	11.07	13.09	14.97	16.73
15.24	A	2.00	4.00	8.00	16.00	24.00	32.00	40.00	48.00	56.00
	B	1.75	3.19	5.56	9.29	12.31	14.93	17.27	19.42	21.40
	C	1.75	3.15	5.53	9.19	12.13	14.67	16.93	18.98	20.88
6.1	A	5.00	10.00	20.00	40.00	60.00	80.00	100.0	120.0	140.0
	B	3.11	5.06	7.97	12.23	15.57	18.41	20.43	23.23	25.34
	C	3.08	4.99	7.79	11.83	14.96	17.61	19.94	22.06	24.00

A: Classical Vibrating Solutions $T_1=2L\sqrt{\frac{g}{T_0}}$ (gravity effects neglected)

B: Exact Solutions (Bessel function type) [4]

C: Approximate Solution Eq. (15)

블구조물이 길이가 길어질 때 그 차이가 크게 나타나고 있음을 알 수 있다.

6. 결 론

지금까지의 결론으로

1) 본 논문에서 유도된 근사식을 사용하여 cable이나 mooring line 등의 고유진동수를 간단하게 추정할 수 있다.

2) 이 근사식은 같은 높이로 지지되는 경우나 두 끝점의 높이가 다른 경우에도 적용할 수 있으며 평면내 진동형과 평면의 진동형에 상관없이 적용될 수 있다.

3) 수직케이블의 고유진동수를 추정하는데도 쉽게 사용할 수 있으며 해수중 부가질량의 효과를 고려하여 고유진동수를 추정할 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] Irvine, H.M., *Cable Structure*, The MIT Press, Cambridge MA., 1981.
- [2] Saxon, D.S., and Cahn, A.S., "Modes of Vibration of a Suspended Chain", *Q.J. Mech Appl. Math.* 6, 1953.
- [3] Goodey, W.J., "On the Natural Modes and Frequencies of a Suspended Chain", *Q.J. Mech. Appl. Math.* Vol. 14, 1961.
- [4] Wolff F.H., "Dynamics of Long Vertical Cables", Classification. (개인소장 복사본, 연도미확인)
- [5] Meirovitch, L., "Elements of Vibration Analysis", McGraw-Hill, 1975.