

最近의 數值電界計算法 (IV)

朴 鍾 根
(서울大 工大 教授)

■ 차 례 ■

5. 表面電荷法

- 5.1 序論
- 5.2 表面電荷法の 原理
- 5.3 一般三次元場의 解析
 - 5.3.1 座標變換
 - 5.3.2 四角形要素 解析式
 - 5.3.3 三角形要素 解析式
 - 5.3.4 電界
- 5.4 靜電容量計算

5.5 計算例

- 6. 몬테칼로 法
- 6.1 序論
- 6.2 基本理論
- 6.3 Green 함수를 이용한 效率改善
- 6.4 電荷重疊法과의 並用計算
- 6.5 計算例
- 參考文獻

5 表面電荷法

5.1 序論

表面電荷法은 電荷重疊法에 비해 계산 시간이나 精密度에서 뒤떨어지는 반면 電荷重疊法으로 다루기 곤란한 얇은 電極이나 복잡한 形狀이 包含된 場, 多媒質場을 解析할 수 있는 長點이 있다.

表面電荷法은 원래 同輻케이블의 靜電容量을 구하기 위해 사용되던 것을 1970년대초 獨逸의 H. Singer가 回轉對稱場 解析方法을 확립하여 케이블 端末部를 解析하였다. 그후 架空電線에 의한 靜電誘導問題를 解決하려면 一般三次元場의 電界分布가 解析되어야 하고, 高電壓送電이 人體에 미치는 影響을 연구하려면 一般三次元 물체의 靜電容量을 구해야만 하므로 一般三次元場을 解析할 수 있는 表面電荷法이 必要하다.

5.2 表面電荷法の 原理

表面電荷法이란 電極表面을 여러 개로 나누어 各分割片 表面의 電荷密度를 좌표의 함수로 두어 境界條件으로부터 이 電荷密度를 구하여 電極表面에 대한 面積分을 함으로써 任意點에 電位, 電界를 구하는 方法이다. 대부분의 電界는 電極의 表面에 존

재하는 表面電荷에 의해 形成되므로 表面電荷分布를 近似的으로 구하여 계산點의 電位, 電界를 구한다는 것은 電極內部에 假想電荷를 두는 電荷重疊法에 비해 物理的 意味가 크다.

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} ds \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \left[\int_{S_i} \frac{\sigma_i(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} ds \right] \end{aligned} \quad (1)$$

回轉對稱場의 경우 링電荷에 의한 電位 ϕ_R 은 式(2)

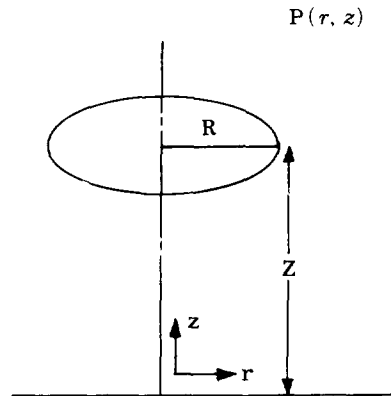


그림 1. 링電荷

와 같다.

$$\phi_R = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} R \frac{K(k)}{\sqrt{(z-Z)^2 + (r-R)^2}} \quad (2)$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}}$$

$$k = \frac{4rR}{\sqrt{(z-Z)^2 + (r+R)^2}}$$

電極이 回轉對稱일 경우 分割片은 그림 1의 링電荷의 集合體로서 그림 2와 같이되므로, 分割片에 의한 電位 ϕ^T 는 다음과 같다.

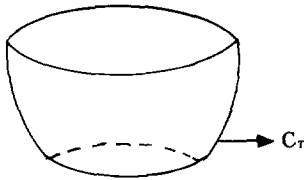


그림 2. 分割片

$$\phi^T = \phi_R(t) dt \quad (3)$$

t : 曲線 C_T 의 파라메터

또한 電荷密度 σ 는 電極表面의 曲線을 따라 변하므로 σ^T 를 t 의 다항식으로 近似시키면 式(4)와 같다.

$$\sigma^T(t) = \sum_{m=0}^M \sigma_m^T t^m \quad (4)$$

σ_m^T : T 번째 分割片 電荷密度 함수 $\sigma_m^T(t)$ 의 m 次係數

따라서 ϕ^T 는 다음 式으로 나타난다.

$$\phi^T = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \sum_{m=0}^M \left[\sigma_m^T \int_{C_T} R \cdot t^m \frac{K(k)}{\sqrt{(z-Z)^2 + (r+R)^2}} dt \right] \quad (5)$$

5.3 一般三次元場의 解析

電極表面을 T 개의 要素(삼각형 또는 사각형)로 나누면 點 $p(x, y, z)$ 의 電位 ϕ_p 는 $\phi_p = \sum_{e=1}^T \phi^e$ 로 주어지며, 單一要素에 의한 電位 ϕ^e 는 電極表面을 $X-Y$ 평면으로 보았을 때 다음과 같다.

$$\phi^e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_R \frac{\sigma^e}{l} ds \quad (6)$$

$$l = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}$$

$$\sigma^e = \alpha_1^e + \alpha_2^e X + \alpha_3^e Y + \alpha_4^e XY$$

(삼각형요소인 경우 마지막 項은 없음)
: e 번째 요소의 전하밀도 함수

式(6)의 우변의 積分은 解析的으로 나타낼 수 있

으므로 電荷密度 함수 $\sigma(x, y)$ 는 係數 α^e 를 未知數로 두었을 때, 式(6)은 式(7)로 된다.

$$\phi^e = [g_1^e \ g_2^e \ g_3^e \ g_4^e] \begin{pmatrix} \alpha_1^e \\ \alpha_2^e \\ \alpha_3^e \\ \alpha_4^e \end{pmatrix} \quad (7)$$

g^e : 電位係數 행렬

方法自體는 有限要素法과 類似하게 보이나, 分割領域이 境界分割인 點에서 分割領域이 領域 分割인 有限要素法과 크게 다르다. 때문에 다른 方法보다 靜電容量을 바로 구할 수 있는 長點이 있다.

電極의 分割方法은 面積分을 容易하게 하기 위해 사각형, 삼각형 分割方法을 사용하며, 一般三次元의 面積分은 三重積分이 되므로 이를 피하기 위해 場의 좌표를 電極部 表面電荷좌표로 변환하여 二重積分으로 만들어 계산하는 것이 편리하다. 다음은 座標變換方法이다.

5.3.1 座標變換: $(x, y, z) \rightarrow (X, Y, Z)$

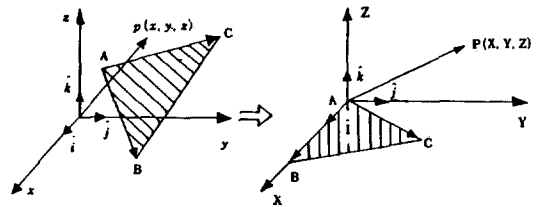


그림 3. 座標變換

\vec{AB}, \vec{AC} 가 이루는 平面이 $X-Y$ 平面과 一致하도록 座標의 basis를 變換한다.

$$\hat{I} = \vec{AB} / |\vec{AB}|$$

$$\hat{J} = a \vec{AB} + b \vec{AC}$$

$$\hat{K} = \hat{I} \times \hat{J}$$

$$a = 1 / \sqrt{|\vec{AB}|^2 \left(\frac{|\vec{AB}|^2 \cdot |\vec{AC}|^2}{(\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} - 1 \right)}$$

$$b = \pm |\vec{AB}| / \sqrt{|\vec{AB}|^2 \cdot |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$$

(X, Y, Z) 가 (x, y, z) 의 變換된 좌표라 하면 座標變換式은 式(8)과 같다.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = (\hat{I} \ \hat{J} \ \hat{K})^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (8)$$

5.3.2 四角形要素 解析式

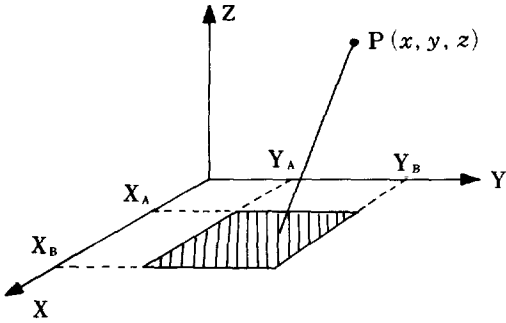


그림 4. 四角形要素

$$\phi^e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_R \frac{a_1 + a_2 X + a_3 Y + a_4 XY}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}} dXdY \quad (9)$$

이 積分의 最終式은 다음과 같다.

$$\phi^e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} I(X, Y) \begin{Bmatrix} X_B \\ X_A \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_B \\ Y_A \end{Bmatrix}$$

$$I(X, Y) = \alpha_1 I_1 + \alpha_2 (I_2 + x I_1) + \alpha_3 (I_3 + y I_1) + \alpha_4 (I_4 + x I_3 + y I_2 + xy I_1)$$

$$I_1 = (Y-y)(F_x + (X-x)F_y - z \sin^{-1} \frac{X_z + (X-x) \cdot D_1}{(D_1 + (X-x)) \cdot \sqrt{X_z}})$$

$$I_2 = ((Y-y) \cdot D_1 + X_z \cdot F_y) / 2$$

$$I_3 = ((X-x) \cdot D_1 + Y_z \cdot F_x) / 2$$

$$I_4 = D_1^2 / 3$$

$$F_x = l_n(D_1 + X - x), \quad F_y = l_n(D_1 + Y - y)$$

$$X_z = (X-x)^2 + z^2, \quad Y_z = (Y-y)^2 + z^2$$

$$D_1 = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}$$

實際, 이 解析式을 利用할 때는 式(9)의 積分過程中 右項수 積分이 包含되어 있음을 고려해야 한다.

5.3.3 三角形要素 解析式

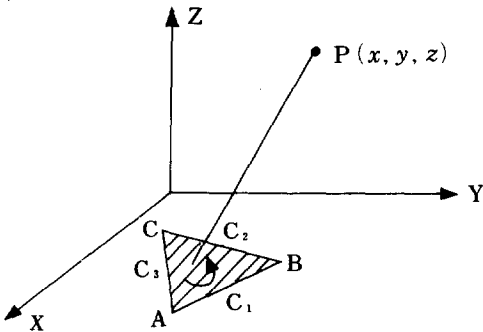


그림 5. 三角形要素

$$\phi^e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_R \frac{a_1 + a_2 X + a_3 Y}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}} dXdY \quad (10)$$

Green의 定理를 利用하여 面積分을

$$\iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_C (f dx + g dy)$$

線積分으로 變換하면 最終式은 다음과 같다.

$$\phi^e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_C [\alpha_1 \cdot S_1 + \alpha_2 (x S_1 + T_1) + \alpha_3 (y V_1 + U_1)]_A^B \quad (11)$$

$$S_1 = (Y-y)F_x - (Y-y) - N_s \cdot Q_s + P_s$$

$$V_1 = -(X-x) \cdot F_y + (X-x) - S_1 \cdot N_s \cdot Q_s - P_v$$

$$T_1 = \frac{S_m}{2 \cdot S^2} [(X-x + S_m \cdot (Y-y)) \cdot D_1 + D_1 \cdot Q_s]$$

$$U_1 = -T_1 / S_m$$

$$F_x = l_n(X-x + D_1), \quad F_y = l_n(Y-y + D_1)$$

$$Q_s = l_n(X-x + S_m \cdot (Y-y) + S \cdot D_1)$$

$$P_s = 2 \cdot S_1 \cdot z \tan^{-1} \left[\frac{(S+1)(X-x + D_1) + S_m(Y-y)}{|S_m| \cdot z} \right]$$

$$P_v = 2 \cdot S_1 \cdot z \tan^{-1} \left[\frac{(S + |S_m|)(Y-y + D_1)}{z} + \frac{S_1(X-x)}{z} \right]$$

$$D_1 = S \cdot (N_s^2 + z^2), \quad N_s = \frac{x \cdot S_m + S_n - y}{S}$$

$$S_1 = S_m / |S_m|, \quad S = \sqrt{1 + S_m^2}$$

$$D_1 = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}$$

$$S_m = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}, \quad S_n = \frac{Y_A X_B - X_A Y_B}{X_B - X_A}$$

여기서 \sum_C 는 曲線 C₁, C₂, C₃에 대한 合을 意味한다.

5.3.4 電界

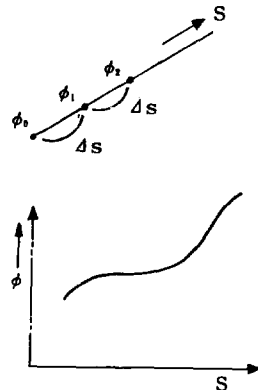


그림 6. 電界 설명도

電界의 解析式은 $\vec{E} = -\text{grad}(\phi)$ 로부터 구해질 수 있지만, 解析式의 項이 많고 電界를 구하기 위한 새로운 서브루틴이 必要하며 프로그램이 길어질 뿐 아니라 電荷의 影響을 크게 받는 電界를 近似的으로 구한 電荷密度로써 바로 구하게 되면 誤差가 커질 수 있으므로 다음과 같은 數值의 方法을 사용하였다.

임의의 S 방향으로 電位의 變化를 2次함수로 近似시키고 計算點의 電位를 $\phi_0, \Delta S$ 와 $2\Delta S$ 떨어진 點의 電位를 각각 ϕ_1, ϕ_2 라고 하면 電界는 式(12)로 된다.

$$E = (3\phi_0 - 4\phi_1 + \phi_2) / (2 \cdot \Delta s) \quad (12)$$

5.4 靜電容量 計算

그림 7은 正四角形($a \times a$)의 경우 a 에 대한 靜電容量의 變化를 나타낸 것으로 靜電容量은 幾何學的인 配置가 同一할 때 導體面積의 平方根에 比例함을 알 수 있다. 여기서 $a=1$ 일 때의 靜電容量은 $38.4pF$ 이다.

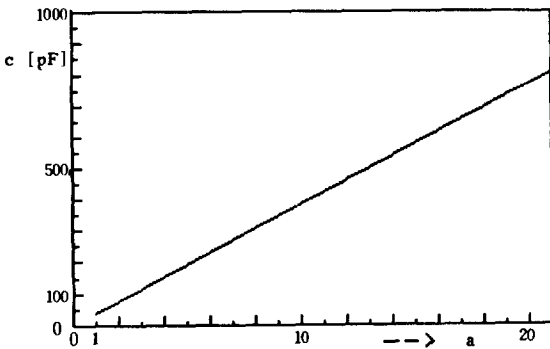


그림 7. 正四角形要素의 靜電容量

5.5 計算例

그림 8은 사각형과 삼각형要素 分割方式을 解析解와 比較하기 위해 圓板導體를 모델로 한 結果이다.

좌표의 原點을 圓板의 中心에 두었을 때 電荷密度의 對稱性을 이용하면 第一四分面의 電荷密度만 未知數로 되어 未知數의 갯수가 1/4로 줄어들어, 또 사각형 要素로만 分割할 경우 境界處理의 難點을 줄이기 위해 境界部分은 삼각형要素로 分割하는 Combination方式을 사용하여 보았다.

計算된 結果를 보면 계산시간은 삼각형分割이 四角形分割의 두배이지만 境界部分에서의 誤差는 적고, 이 두 방식의 長點만 살린 Combination 方法의

경우 精度가 앞의 두 방식보다 좋을 뿐 아니라 계산시간은 三角分割보다 훨씬 줄어든다. Combination 方法을 사용하더라도 境界面에 近接할 수록 誤差가 커지지만 이것은 境界部分을 더 細密하게 分割해줌으로써 補完할 수 있다.

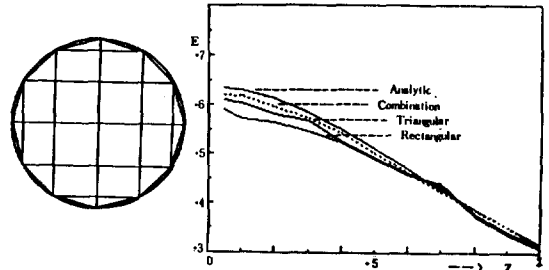


그림 8. Combination方法 分割상태와 얇은 Disk電極에 의한 電界

電荷重疊法과 有限要素法과 比較하기 위해 그림 9와 같이 誘電體가 배치되었을 경우 空氣層의 電界強度는 誘電體가 없을 때보다 세어진다. 그림 10은 誘電體 上部에서 R 방향으로의 電界를, 그림 11은 Z 방향으로의 電界를 誘電體가 없을 때의 解析解와 比較해 본 것이다.

表面電荷法은 電荷重疊法에 비해 1/5정도의 未知數를 사용했지만 그 結果가 비슷하다. 誘電體의 두께가 더욱 얇아지면 電荷重疊法은 未知數가 너무 많아져서 곤란하고 有限要素法은 分割이 까다로와 지지만 表面電荷法으로는 誘電體의 두께에 관계없이 相對적으로 적은 未知數로써 計算可能하므로 이러한 모델에 대해 아주 適合한 方法임을 알 수 있다.

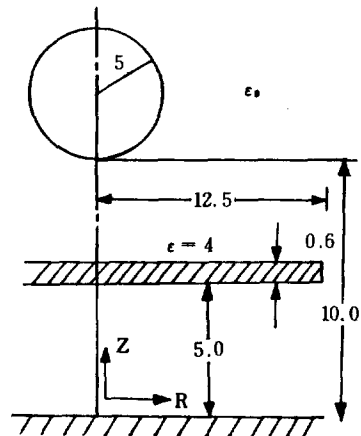


그림 9. 얇은 誘電體가 포함된 모델

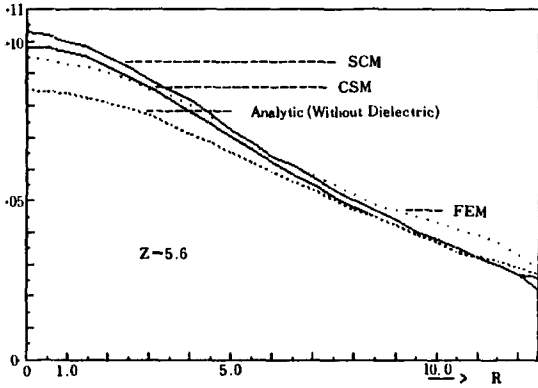


그림10. 誘電體 表面 R方向 電界

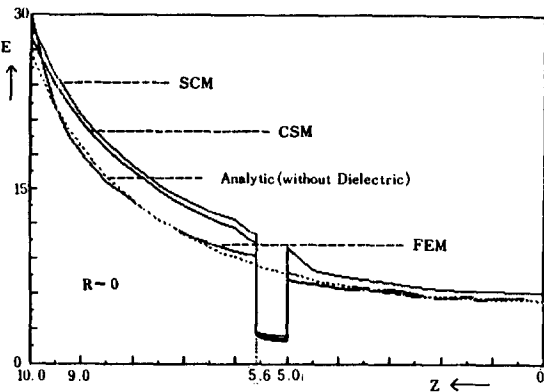


그림11. Z方向 電界

⑥ 몬테칼로法

6.1 序論

電界計算하기 위해 필요한 수학적 기법들은 잘 알려져 있지만 실제로 복잡한 3차원의 문제를 해석하고자 하는 경우에 電荷重疊法, 差分法, 有限要素法 등의 방법으로는 未知數의 갯수가 급격히 증가하기 때문에 입력 데이터의 작성이 방대해져 노력이 많이 들며 數値 誤差로 인하여 해의 풀이가 어려워진다.

그러나, 몬테칼로방법은 統計的 방법을 이용하여 경계의 모양이 복잡하거나 차원이 증가하여도 未知數가 증가하지 않아 일반 3차원장의 문제에 대하여 汎用的으로 적용할 수 있는 電界 解析方法이다.

Brownian Motion과 Potential Theory와의 관계는 1944년 Kakutani가 처음으로 밝혔고 이후 여러사람들이 이론을 발전시켰다.

6.2 基本理論

Dirichlet 境界조건의 靜電界 문제에 대하여 살펴본다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 & , \text{ 境界 } \Gamma \text{ 내부} & (13) \\ \phi &= \phi(\Gamma) & , \text{ 境界 } \Gamma \text{ 에서} \end{aligned}$$

여기서, 電位 함수 ϕ 는 s 가 반경이 α 이고 중심이 r 인 구면이고, 境界 포함 장 내부에 있다면 平均值 정리에 의해

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\alpha^2} \int_s \phi(r') ds' \quad (14)$$

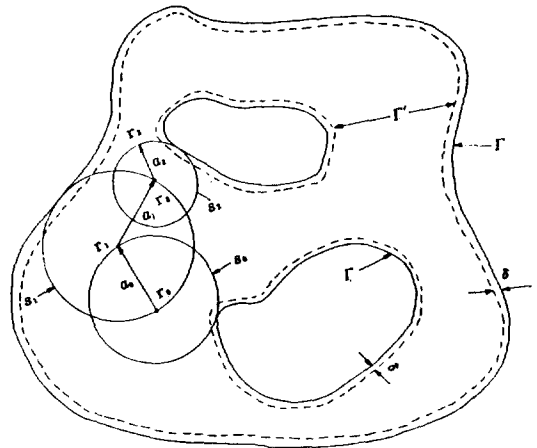
이다.

즉, 구 중심의 電位는 구면 電位 값의 平均 값이다.

式(14)을 바탕으로 Brownian Motion 즉 Random Walk Experiments와 式(13)과의 관계는 다음과 같이 간단히 설명된다.

영역 내부의 점 r_0 의 電位를 $\phi(r_0)$ 라 하면, r_0 에서 Random Walk를 시작하여 境界 Γ 의 r^* 에 도달할 때까지 Random Walk를 계속하면 未知 電位 $\phi(r_0)$ 는

$$\begin{aligned} \phi(r_0) &= E[\phi(r^*)] & (15) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(r_i^*) \end{aligned}$$



Γ : 境界표면

Γ' : 가상의 境界표면. Γ 과 Γ' 사이에 Random Walk가 도달하면 한 Random Experiment를 끝낸다.

그림12. Random Walk

이다. 여기서, $\phi(\mathbf{r}_i^*)$ 는 i 번째 Experiment에서 \mathbf{r}_0 로부터 Random Walk 후 경계에 도달한 점 \mathbf{r}_i^* 의 電位이다.

Random Walk의 거리를 크게 하기 위하여 式(14)을 만족하는 최대 반경 즉, Random Walk 점과 경계와의 최소거리를 Random Walk의 크기로 잡는다.

그림12에서 Random Walk 점을 \mathbf{r}_i 라고 하면 다음 Random Walk 점 \mathbf{r}_{i+1} 은 구 표면 S_i 위에 위치한다, 구 S_i 의 반경 a_i 는 중심점 \mathbf{r}_i 의 위치에 따라 결정되며 \mathbf{r}_{i+1} 은 구 S_i 위에 Random 하고 均一하게 위치한다.

Random Walk \mathbf{r}_i 점이 경계 Γ 에 δ 이내의 거리에 들어오면 경계에 도달한 것으로 보고 Random Walk를 끝내며 또 Random Experiment를 有限번 시행하면,

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(\mathbf{r}_i^*) \quad (16)$$

이다.

따라서, 실제 계산에는 다음의 두 誤差원인이 존재한다.

- i) N 은 無限大일 수 없으므로 有限해야 한다.
- ii) δ 는 無限小일 수 없으므로 有限한 값을 가져야 한다.

Random Walk의 크기를 a_s 라고 하고, 독립인 Normal Deviates를 W_i , $i=1,2,3$ 이라 하면 한 Random Walk 후의 점은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_{s+1} &= x_s + a_s W_1 \\ y_{s+1} &= y_s + a_s W_2 \\ z_{s+1} &= z_s + a_s W_3 \end{aligned} \quad (17)$$

Normal Deviate W_i 는 單位球 表面上에 均一하게 생성시킨다.

6.3 Green 함수를 이용한 效率의 改善

앞에서 설명한 Floating Random Walk에 의한 방법은 간단하지만, 계산시간이 많이 걸리고 電界값을 구할 때는 數值微分이 필요해 誤差가 커진다.

Green 함수를 이용하면 한 Experiment에서 여러 점의 電位값을 구할 수 있고 電界값을 구할 때 數值微分을 하지 않는다.

중심이 \mathbf{r}_0 이고 반경이 a_0 인 구 S_0 내부의 점 \mathbf{r}_p 에서의 電位는 Green정리에 의해 다음과 같다.

$$\phi(\mathbf{r}_p) = -\frac{1}{4\pi} \int_{s_0} \phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}')}{\partial n} ds' \quad (18)$$

단, \mathbf{r}' : 구면 s_0 위의 점

$G_0(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}')$: 구 S_0 에 대한 Green 함수

$\frac{\partial}{\partial n}$: 바깥 수직 미분 연산

따라서 Random Walk를 \mathbf{r}_0 에서 시작하여 N 번 시행했을 때 구 S_0 내의 \mathbf{r}_p 점에서의 電位는

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}_p) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(\mathbf{r}_i^*) a_0^2 \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_{i1})}{\partial n} \quad (19)$$

이다.

분산은

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2[\hat{\phi}(\mathbf{r}_p)] &= \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\phi(\mathbf{r}_i^*) a_0^2 \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_{i1})}{\partial n} \right]^2 - \hat{\phi}^2(\mathbf{r}_p)}{N-1} \end{aligned} \quad (20)$$

이다.

電界값은 式(19)을 직접 해석적으로 微分하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{E}(\mathbf{r}_p) &= -\nabla \hat{\phi}(\mathbf{r}_p) \\ &= -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(\mathbf{r}_i^*) a_0^2 \nabla \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_{i1})}{\partial n} \end{aligned} \quad (21)$$

분산은

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2[\hat{E}(\mathbf{r}_p)] &= \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\phi(\mathbf{r}_i^*) a_0^2 \nabla \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_{i1})}{\partial n} - \hat{E}(\mathbf{r}_p) \right]^2}{N-1} \end{aligned} \quad (22)$$

이다.

\mathbf{r}_0 를 중심으로 반경 a_0 내의 점 \mathbf{r}_p 의 電位 電界값은 式(19), 式(21)으로부터 구할 수 있다. 특히 式(21)은 數值微分을 하지 않아 誤差가 적다. 그러나, $|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_0|$ 가 커질 수록 誤差가 증가한다.

6.4 電荷重疊法과의 並用計算

Dirichlet 경계조건의 靜電界 문제는 장내부의 정확한 해를 알 수 있는 경계값 $\phi(\mathbf{r}')$ 를 갖는 문제와 원래 문제의 경계값 $\phi(\mathbf{r}')$ 와 해를 알 수 있는 문제의 경계값 $\phi(\mathbf{r}')$ 와의 차를 경계값으로 갖는 문제로 분리할 수 있다.

즉, \mathbf{r}_p 점에서의 電位 電界는 $\phi(\mathbf{r}')$ 가 경계 조건인 문제의 정확한 해 $\phi(\mathbf{r}_p)$ 와 $\phi(\mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r}_p)$ 를 경계 조건으로 하는 문제의 解와의 합이다.

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\mathbf{r}_p) &= \phi(\mathbf{r}_p) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_0^2 \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_{i1})}{\partial n} \{ \phi(\mathbf{r}_i^*) - \phi(\mathbf{r}_p) \} \\ \hat{\sigma}^2[\hat{\phi}(\mathbf{r}_p)] &= \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ a_0^2 \frac{\partial G_0(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_{i1})}{\partial n} \{ \phi(\mathbf{r}_i^*) - \phi(\mathbf{r}_p) \} \right\}^2}{N-1} \end{aligned}$$

$$\frac{\{\hat{\phi}(r_p) - \phi_k(r_p)\}^2}{N-1} \quad (23)$$

ϕ_k 는 電荷重疊法으로 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned} \phi_k(r_p) &= \mathbf{g}(r_p) \cdot \mathbf{q} \\ \phi_k(r_i^*) &= \mathbf{g}(r_i^*) \cdot \mathbf{q} \end{aligned} \quad (24)$$

여기서, 모의전하 \mathbf{q} 는

$$\phi(r') = \mathbf{G} \cdot \mathbf{q} \quad (25)$$

에서 구한다. 단, $\phi(r')$ 는 경계의 電位 벡터이고 \mathbf{G} 는 輪郭點, \mathbf{g} 는 계산점의 電位 계수 행렬이다.

電界 계산에 있어서도 마찬가지로

$$\begin{aligned} \hat{E}(r_p) &= -\nabla \phi_k(r_p) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \nabla a_0^2 \frac{\partial G_0(r_p, r_{1i})}{\partial n} \{ \phi(r_i^*) \\ &\quad - \phi_k(r_i^*) \} \quad (26) \\ \hat{\sigma}(r_p) &= \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\nabla a_0^2 \frac{\partial G_0(r_p, r_{1i})}{\partial n} \{ \phi(r_i^*) - \phi_k(r_i^*) \} \right]^2}{N-1} \\ &\quad - \frac{[\hat{E}(r_p) + \nabla \phi_k(r_p)]^2}{N-1} \end{aligned}$$

이다.

6.5 計算例

그림13과 같은 回轉對稱場 문제의 AB간의 電位 電界를 電荷重疊法과 몬테칼로法으로 각각 계산하여 그림14에 나타냈다. 電位 電界값은 거의 차이가 없다는 것을 알 수 있다. 그림 13의 진극을 90° 回轉시키면 回轉對稱이 깨져 3 차원 모델이 된다. 이 모델을 電荷重疊法으로 계산하려면 모의 전하를 많이 배치해야 하고 또 특수한 전하를 사용하여야 할

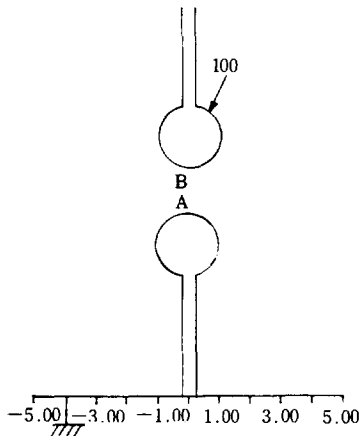


그림13. 回轉對稱場 모델

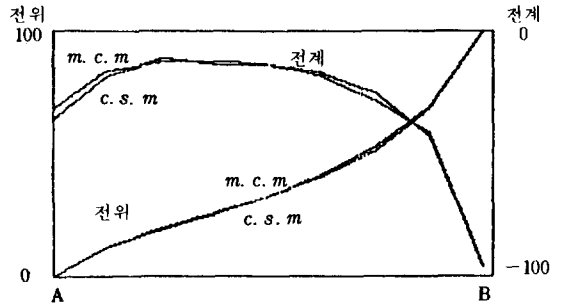


그림14. 그림12의 AB간의 電位 및 電界분포

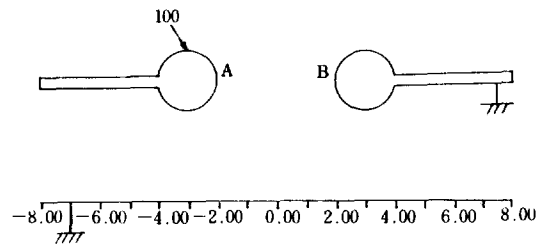


그림15. 3 차원장 모델

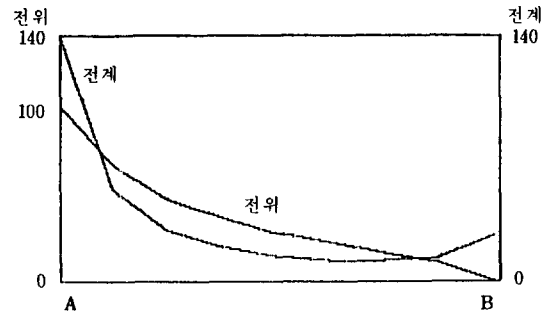


그림16. 그림15의 AB간의 電位 및 電界분포

다. 有限要素法으로 계산하고자 하면 3 차원의 모델이라 입력데이터 작성에 시간이 상당히 걸린다. 몬테칼로법으로 계산하고자 하면 그림13의 경우와 같이 입력데이터 작성에 수십분이면 된다. 계산 결과는 그림 16에 나타냈다. 그림13의 문제를 電荷重疊法과 並用했을 때와 하지 않았을 때의 比較는 표1, 표2에 나타냈다. 그림17의 a)는 5개의 모의전하에 의해 나타나는 電位를 경계값으로 갖는 모델이다. 모의 전하를 5개만 사용하였기 때문에 원래의 경계조건 100과는 어느 정도 誤差가 있게 된다. 그림17의 b)의 경계조건은 이 誤差分 만큼이다.

표1, 표2에서 알 수 있듯이 모의 전하를 5개

표 1. 電荷重疊法과 並用 하지 않았을 경우

Z 좌표	ϕ	σ^2	E	σ^2
6.5	11.67	0.344	-19.20	4.519
7.0	19.14	0.516	-17.70	1.729
7.5	25.17	0.628	-14.33	1.097
8.0	31.61	0.718	-13.99	1.623
8.5	40.57	0.804	-19.36	1.842
9.0	52.24	0.832	-29.20	5.340
9.5	68.54	0.719	-42.35	27.461

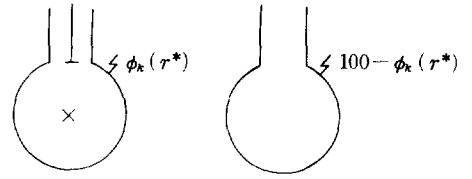
random experiment : 3000 회

표 2. 電荷重疊法과 並用 하였을 경우

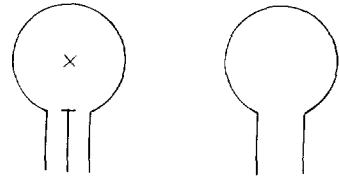
Z 좌표	ϕ	σ^2	E	σ^2
6.5	11.32	0.012	-16.01	0.176
7.0	18.67	0.018	-12.62	0.056
7.5	25.07	0.024	-12.73	0.035
8.0	31.66	0.024	-14.26	0.012
8.5	39.94	0.018	-18.23	0.022
9.0	50.61	0.024	-26.46	0.066
9.5	67.55	0.015	-44.31	0.136

random experiment : 600 회

모 의 전 하 : 5 개



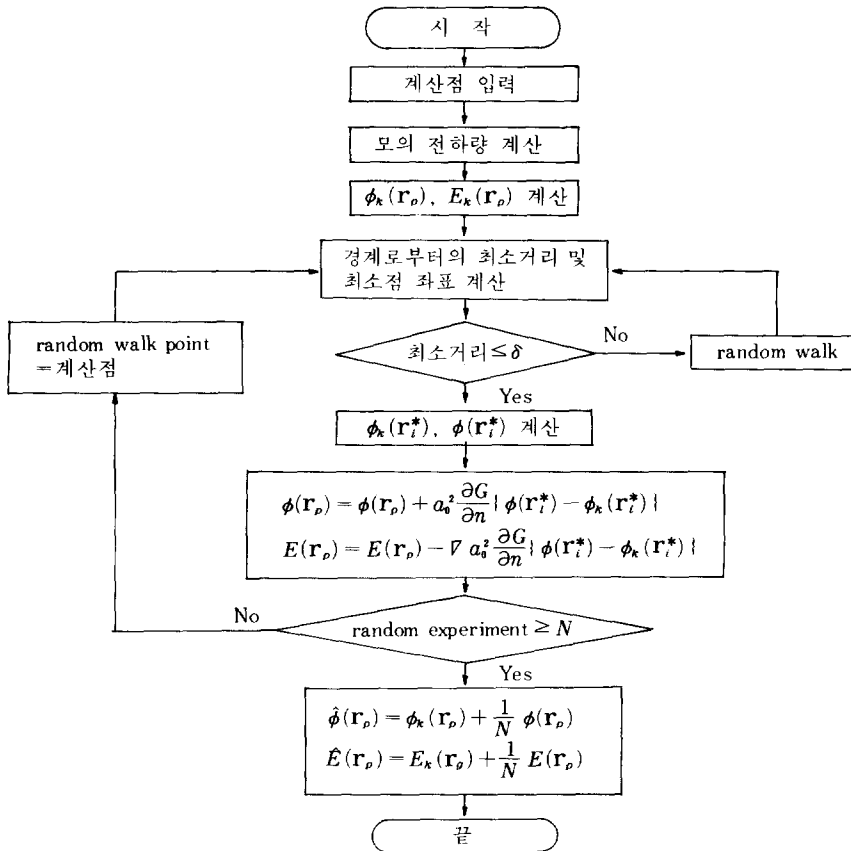
X : 점전하
I : 선전하



a) 전하중첩법을 위한 경계조건
b) 몬테칼로법을 위한 경계조건

그림 17. 電荷重疊法과 의 並用

표 3. 순서도



만 사용하여도 계산시간은 약 1/4로 줄고 분산값도 약 수십분의 일로 줄어들음을 알 수 있다.

일반적인 순서도는 표 3에 나타냈다. 일반 3차원장의 문제에 있어서 국부적으로 관심있는 영역만 해석하고자 할 때 입력데이터 작성시간까지 포함하여 고려하면 몬테카로법이 電荷重疊電, 有限要素法보다 더 有利하다.

참 고 문 헌

- 1) H.Singer, "Berechnung von Hochspannungsfeldern mit Hilfe von Flächenladungen", Habilitation-Schrift, Technischen Universität München (1973).
- 2) Moon & Spencer, Field Theory for Engineers, D. Van Nostrand, Toronto (1961).
- 3) Magnus et al, Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics, Springer, Berlin (1966).
- 4) 宅間, 河本, "三角形表面電荷法에 의한 三次元電界의 計算," 電力中央研究報告書 No. 180029 (1980-12)
- 5) 河野, 宅間, 數值電界計算法, 코로나社(1980-11)
- 6) 電氣學會 技術報告, "最近의 電界計算法(Ⅱ部)", 第98號(1980).
- 7) 大久保外, "表面電荷에 의한 電界計算과 그 應用", 電氣學會放電研究會 HV-80-8(1980).

- 8) 村島定行, 代用電荷法과 그 應用, 森北社(1983).
- 9) H. Prinz, Hochspannungsfelder, Oldenbourg, München (1969).
- 10) Gradshteyn & Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products, Academic, London (1980).
- 11) 金光洙, 朴鍾根, "表面電荷法을 이용한 一般三次元 電界解析", 電氣學會 論文集, 1985. 9.
- 12) S. Kakutan, "Two dimensional Brownian motion and harmonic functions", Proc. Imp. Acad. (Tokyo), vol. 20, 1944, pp. 706-714
- 13) M. E. Muller, "Some continuous Monte Carlo methods for the Dirichlet problem", Ann. Math. Stat., vol. 27, 1956, pp. 569-589
- 14) J. H. Pickles, "Monte Carlo field calculations", Proc. IEE. 1977, 124(12), pp. 1271-1276
- 15) G. Marsaglia, "Choosing a point from the surface of a sphere", Ann. Math. Stat., 3(2) 1972, pp. 645-646.
- 16) 羅德一, 朴鍾根, "數值電界計算法에서 몬테칼로法の 利用", 전기학회 전력계통분야 후계 학술연구발표회 논문초록집, 제19회, 1985, pp. 44-46.
- 17) J. D. Jackson, "Classical electrodynamics", John Wiley & Sons, New York, 1975.
- 18) G. M. Royer, "A Monte Carlo procedure for potential theory problems", IEEE Trans. MTT-19, No. 10, 1971, pp. 813-818.