

論 文
35~3~2

월쉬 급수 전개에 의한 분포정수계의 해석에 관한 연구

A Study on Analysis of Distributed Parameter Systems via Walsh Series Expansions

安斗守* · 沈在先** · 李明珪***
(Doo-Soo Ahn · Jae-Sun Shim · Myung-Kyu Lee)

Abstract

This paper describes two methods for analyzing distributed parameter systems (DPS) via Walsh series expansions.

Firstly, a Walsh-Galerkin expansion approach technique (WGA) introduced by S.G. Tzafestas, is considered. The method which is based on Galerkin scheme, is well established by using Walsh series. But then, there are some difficulty in finding the proper basic functions at each systems.

Secondly, a double Walsh series approach technique (DWA) is developed. The essential feature of DWA proposed here is that it reduces the analysis problem of DPS to that of solving a set of linear algebraic equation which is extended in double Walsh series.

1. 서론

상태공간에 존재하는 물체의 물리적 현상은 공간 위치와 시간 함수로 표현되기 때문에 이는 곧 편미분방정식으로 기술되어 분포정수계 (distributed parameter system)로 구성 취급되고 있다. 이러한 예는 열 공정 (thermal process)이나 전송선로등에서 찾아볼 수 있다.^{1), 2), 3)}

편미분방정식으로 표현되는 분포정수계의 해석이나 매개 변수 식별 (parameter identification) 등에 푸우리에 급수 (Fourier series)나 직교함수 즉 블록 펄스 (block pulse) 함수 혹은 월쉬 급수 (Walsh series) 등을 이용한 여러 방법들이 응용되어 왔다.^{4)~6)}

푸우리에 급수를 이용하는 방법은 원함수와의 오차 폭이 크고 일정하지 않으며, 급수의 수를 늘림에 따른 원함수와의 접근 속도가 느린 단점이 있다.

블록 펄스 함수는 월쉬 급수보다 쉽게 응용될 수 있으나 그 함수 자체가 불완전한 집합 (incomplete set) 이기 때문에 완전한 집합 (complete set) 으로 구성되는 월쉬 급수를 이용하는 접근 방법이 유용하다.^{6), 9)}

P. A. Orner는 기저함수 (basic function)의 선정에 의한 양호한 접근 방법을 제시하였다.⁷⁾ 이 방법에 의하면 다른 직교함수 (orthogonal function)에 의한 방법들 보다도 원함수에 대한 접근 속도가 빠르지만, 매 계마다 적합한 기저함수를 선정해야하는 어려운 점이 있다.^{7), 10)}

S. G. Tzafestas는 P. A. Orner의 방법을 응용, 매 계마다 선정되어야 하는 기저함수를 정현파형에 기초를 두고, 월쉬 급수를 도입하여 분포정수계의 최적제어기 (optimal controller)의 설계에 이용하였다.^{11), 12)}

Paraskevopoulos는 선형 편미분방정식으로 표현되는 분포정수계의 매개 변수 식별 (parameter identification)에 있어, 편미분방정식을 적분방정식으로 변환한 다음 월쉬 급수를 도입하는 과정에서

* 正 會 員 : 成均館大 工大 電氣工學科 教授 · 工博
 ** 正 會 員 : 三陟工專大 電氣科 助教授
 *** 正 會 員 : 成均館大 大學院 電氣工學科 博士課程
 接受日字 : 1985年 10月 4日

더블 월쉬 급수(double Walsh series)의 개념을 확립하였다.⁵⁾

본 연구에서는 분포정수계의 해석을 위해, 먼저 S. G. Tzafestas가 제안한 Galerkin scheme을 기초로 하고 월쉬 급수를 이용한 적용기법 즉, Walsh-Galerkin expansion approach technique(WGA)을 고찰한다.

또한 Paraskevopoulos에 의해 도입된 더블 월쉬 급수의 개념을 이용한 새로운 접근기법 즉 더블 월쉬 급수 적용기법(double Walsh series approach technique : DWA)을 제시하고자 한다.

WGA에 의하면 기저함수로 미분가능한 직교함수를 이용하여야 하기 때문에 단위 계단(unit step)함수로 구성되는 월쉬 급수를 기저함수로 이용할 수 없다.

그러나 본 연구에서의 방법에 의하면 WGA와는 달리 기저함수의 사용없이 편미분방정식으로 주어진 계를 적분방정식으로 변환하고 월쉬 급수의 특성을 이용하여 간단한 수학적 연산만으로 계를 해석할 수 있음을 제시하고자 한다. 또한 자료가 이산치(discrete-data)로 주어질 경우에도 쉽게 이용할 수 있음을 보이고자 한다.

2. 분포정수계의 해석을 위한 직교함수의 적용

시간 함수는 어떤 직교함수의 조합으로 표현될 수 있다. 주어진 계가 그 함수들의 조합으로 표현될 때, 그 함수들로부터 요구되는 계의 제반 장치 즉 제어기(controller), 관측자(observer)나 필터등의 설계상의 특성을 알 수 있다. 특히 함수의 직교성을 이용하면, 간단한 수학적 연산만으로 계를 해석할 수 있는 편리한 점이 있다.⁶⁾

다음의 편미분방정식으로 주어진 계를 고려하자.

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = Df(x,t) + u(x,t)$$

여기서 D 는 미분자(differential operator)를 의미한다. 시간 t 와 변위 x 의 함수로 표현되는 분포정수계에서는 t 와 x 에 대한 각각의 직교함수의 조합이 필요하다.^{5), 7), 11)}

$f(x,t)$ 를 직교함수로 전개하면 다음과 같다.

$$f(x,t) \cong f^m(x,t) \triangleq \sum_{j=1}^n z_j(t) \varphi_j(x)$$

$$\frac{d}{dt} z_j(t) = \sum_{i=1}^n C_{ij} \phi_i(t)$$

첨자 n 은 n 차 근접치를 나타내며, 이때의 오차 $E(x,t)$ 는

$$E(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} f^m(x,t) - Df^m(x,t) - u(x,t)$$

가 된다. Galerkin scheme에서는 $E(x,t)$ 와 기저함수 $\varphi_j(x)$ 가 직교하도록 즉,

$$\int E^T(x,t) \varphi_j(x) dx = 0, \text{ (for } j=1, 2, \dots, n \text{) 이 되도록 } z_j(t) \text{를 결정한다.}^{11), 12)$$

또한 Paraskevopoulos는 매개 변수 식별에 있어, 편미분방정식으로 주어진 계를 월쉬급수를 이용하여 간단한 수학적 연산으로 해결할 수 있는 방정식으로 변환하는 과정에서, $f(x,t)$ 를 다음과 같이 결정하였다.⁸⁾

$$f(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f_{ij} \varphi_i(x) \phi_j(t)$$

이때 f_{ij} 는 최소자승오차 $\epsilon = \int \int [f(x,t) - \sum \sum f_{ij} \varphi_i(x) \phi_j(t)]^2 dx dt$ 가 최소가 되도록 결정한다.

이제, Galerkin scheme에 의한 WGA를 먼저 살펴 보고, Paraskevopoulos에 의해 도입된 더블월쉬급수가 분포정수계의 해석을 위해 어떻게 응용되는가를 보도록 한다.

2.1 Walsh - Galerkin expansion approach technique (WGA)¹²⁾

다음과 같이 편미분방정식으로 주어지는 분포정수계를 고려하자.

$$a_2 \frac{\partial}{\partial t} y(x,t) + a_1 \frac{\partial}{\partial x} y(x,t) = u(x,t) \quad (1)$$

$$y_0(x) = y(x,0), \quad y_0(t) = y(0,t)$$

Galerkin scheme에 월쉬 급수를 도입하면 다음의 관계가 있다.

$$y^n(x,t) = \sum_{j=1}^n z_j(t) \varphi_j(x) \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt} z_j(t) = C_j^T \phi_m(t) \quad (2.2)$$

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^n u_j(t) \varphi_j(x) \quad (3)$$

여기서 $\varphi_j(x)$ 는 미분가능한 직교함수로 선정되어야 하는 기저함수이다. C_j 는 m 차 열 매트릭스(column matrix)로 월쉬 계수이며, $\phi_m(t)$ 는 월쉬 급수로 구성되는 m 차 열 벡터(column vector)이다.

식(1)로 주어진 분포정수계에 식(2), (3)의 함수들로 근접시키면 오차가 발생한다.

$$E_c(x,t) = a_2 \frac{\partial}{\partial t} y^n(x,t) + a_1 \frac{\partial}{\partial x} y^n(x,t) - u(x,t) \quad (4)$$

식(2)에서의 $z_j(t)$ 는 기저함수와 오차 $E_c(x,t)$ 가 직교하도록 다음과 같이 결정된다.^{7), 11), 12)}

$$\int E_c^T(x,t) \varphi_j(x) dx = 0 \quad (5)$$

식(2)~(4)를 식(5)에 적용한다.

$$a_2 \sum_{j=1}^n f_{j\nu} z_j(t) + a_1 \sum_{j=1}^n y_{j\nu} z_j(t) - \sum_{j=1}^n f_{j\nu} u_j(t) = \quad (6)$$

$$f_{j\nu} = \int \varphi_i^T(x) \varphi_j(x) dx,$$

$$g_{j\nu} = \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \varphi_i(x) \right]^T \varphi_j(x) dx$$

이때 $\varphi_i(x)$ 가 orthonormal 한 함수라 하면, $f_{j\nu}$ 로 구성되는 매트릭스 $[f_{j\nu}]$ 는 단위매트릭스(unit matrix)임을 알 수 있다.

식(6)을 매트릭스형으로 나타내자.

$$a_2 \mathbf{FZ}(t) = -a_1 \mathbf{GZ}(t) + \mathbf{FU}(t) \quad (7)$$

$$\mathbf{F} = [f_{j\nu}], \quad \mathbf{G} = [g_{j\nu}]$$

$$\mathbf{Z}(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)]^T$$

$$\mathbf{U}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)]^T$$

식(2, 2)에 월쉬 급수를 도입하면,

$$z_j(t) = \int \dot{z}_j(t) dt + z_j(0) \text{이므로, 다음과 같다.}$$

$$z_j(t) = \Phi_M^T(t) [C_j^T \mathbf{P}_m + C_j^T(0)] \quad (8)$$

$$C_j^T(0) = [z_j(0), 0, 0, \dots, 0]$$

\mathbf{P}_m 은 월쉬연산 매트릭스(Walsh operational matrix)라 하며 일반형으로 다음과 같이 나타낸다.^{5), 8), 13), 14)}

$$\mathbf{P}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{(m/2)} - \frac{1}{2m} \mathbf{I}_{(m/2)} \\ \frac{1}{2m} \mathbf{I}_{(m/2)} & \mathbf{O}_{(m/2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_1 = \frac{1}{2} \quad (9)$$

()안의 숫자는 그 매트릭스의 디멘전을 뜻한다.

식(8)에서의 $z(0)$ 는 $y(x, 0) = \sum_{j=1}^n z_j(0) \varphi_j(x)$ 에서 양변에 $\varphi_j^T(x)$ 를 곱하고 적분을 취하면 얻어진다.

또한 $u_j(t) = \mathbf{V}_j^T \Phi_m(t)$ 로 전개된다.

이상의 관계를 종합하면 식(6), (7)은 다음과 같다.

$$\Phi_m^T(t) \left[a_2 \sum_{j=1}^n f_{j\nu} C_j + a_1 \sum_{j=1}^n g_{j\nu} (\mathbf{P}_m^T C_j + C_j(0)) - \sum_{j=1}^n f_{j\nu} \mathbf{V}_j \right] = 0 \quad (10.1)$$

$$\text{즉, } \mathbf{C} = [\mathbf{I} \otimes a_2 \mathbf{F} + \mathbf{P}_m^T \otimes a_1 \mathbf{G}]^{-1} [-\mathbf{I} \otimes \mathbf{G} \mathbf{C}(0) + \mathbf{I} \otimes \mathbf{F} \mathbf{V}] \quad (10.2)$$

$$\mathbf{C} = [C_1^T, C_2^T, \dots, C_n^T]^T$$

$$\mathbf{V} = [V_1^T, V_2^T, \dots, V_n^T]^T$$

\otimes : Kronecker product^{13), 14)}

이와같이 \mathbf{C} 가 결정되고 식(8)로부터 $z_j(t)$ 가 구해지므로 식(2)에서 $y^n(x, t)$ 가 결정된다.

2.2 더블 월쉬 급수 접근기법(Double Walsh series approach technique ; DWA)

두개의 변수를 갖는 함수 $y(x, t)$; $x, t \in [0, 1]$ 를 x 와 t 에 대한 월쉬 급수로 각각 M, N 항까지 전개시켰다고 하고 다음과 같이 표현하자.^{5), 8)}

$$y(x, t) = \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} y_{ji} \phi_i(t) \varphi_j(x) \quad (11)$$

$$\triangleq \Psi_M^T(x) \mathbf{Y}_{MN} \Phi_N(t)$$

$\varphi_j(x), \phi_i(t)$ 는 각각 t 와 x 에 대한 월쉬 급수를 나타내며, $\Psi_M(x)$ 와 $\Phi_N(t)$ 는 월쉬 급수로 구성되는 M, N 차 열 벡터이다. $\mathbf{Y}_{MN} = [y_{ji}]$ 이며, y_{ji} 를 더블 월쉬 계수(double Walsh coefficient)라 한다. 이때 y_{ji} 는 최소자승오차 즉 $\epsilon = \int \int [y(x, t) - \sum \sum y_{ji} \phi_i(t) \varphi_j(x)]^2 dx dt$ 를 최소로 하도록 결정된다.⁵⁾

월쉬 급수의 직교성을 이용하면 ϵ 를 최소로 하는 월쉬 계수는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$y_{ji} = \int_0^1 \int_0^1 y(x, t) \phi_i(t) \varphi_j(x) dx dt \phi \quad (12)$$

식(1)로 주어진 계에 직접 월쉬 급수를 도입하는 것은 무리이므로, 월쉬 급수로 전개된 함수와 그 함수의 적분과의 관계를 나타내는 월쉬 연산 매트릭스 \mathbf{P} 를 이용하여야 한다.^{5), 14), 15)}

$$\int \dots \int \Psi_M^T(x) \mathbf{Y}_{MN} \phi_N(t) dx \dots dx dt \dots dt = \Psi_M^T(x) (\mathbf{P}_M^T)^l \mathbf{Y}_{MN} (\mathbf{P}_N)^m \phi_N(t) \quad (13)$$

위 식은 월쉬 급수로 전개된 함수를 x 와 t 에 대하여 각각 l, m 번 적분을 취했을 때의 관계를 보여 주고 있다. 식(1)을 각각 x 와 t 에 대하여 적분을 취하자.

$$a_2 \int \int y(x, t) dx + a_1 \int \int y(x, t) dt - a_2 \int \int y(x, 0) dx - a_1 \int \int y(0, t) dt = \int \int \int u(x, t) dx dt \quad (14)$$

$y(x, 0), y(0, t)$ 는 주어진 계의 초기, 경계조건으로 월쉬 급수로 다음과 같이 전개된다.^{5), 14), 15)}

$$y(x, 0) \cong \sum_{j=0}^{q-1} b_j \varphi_j(x) \quad (15.1)$$

$$\cong \sum_{j=0}^{q-1} b_j \Psi_M^T(x) \mathbf{E}_{j+1,1} \phi_N(t), \text{ for } q \leq M$$

$$y(0, t) \cong \sum_{i=0}^{r-1} c_i \phi_i(t) \quad (15.2)$$

$$\cong \sum_{i=0}^{r-1} c_i \Psi_M^T(x) \mathbf{E}_{1,i+1} \phi_N(t), \text{ for } r \leq N$$

$\mathbf{E}_{i,j}$ 는 i, j 번째 요소만이 1이고 나머지는 모두 0인 $M \times N$ 매트릭스이다.

이상의 관계를 이용하면 적분방정식으로 표현된 식(14)는 다음과 같다.

$$\Psi_M^T(x) \left[a_2 P_M^T Y_{MN} + a_1 Y_{MN} P_N - a_2 \sum_{i=0}^{q-1} b_i P_M^T E_{i+1,1} - a_1 \sum_{i=0}^{r-1} c_i E_{i,1} P_N \right] \phi_N(t) = \Psi_M^T(x) [P_M^T U_{MN} P_N] \phi_N(t) \quad (16.1)$$

$$\text{즉, } a_2 P_M^T Y_{MN} + a_1 Y_{MN} P_N = P_M^T U_{MN} P_N + a_2 \sum_{i=0}^{q-1} b_i P_M^T E_{i+1,1} + a_1 \sum_{i=0}^{r-1} c_i E_{i,1} P_N \quad (16.2)$$

위 식에서 $U_{MN} = [u_{ij}]$ 이고, u_{ij} 는 최소자승오차 즉 $\epsilon = \iint [u(x,t) - \sum \sum u_{ij} \varphi_i(x) \phi_j(t)]^2 dx dt$ 를 최소로 하도록 결정된다.

$$u(x,t) \cong \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} u_{ij} \varphi_i(x) \phi_j(t) \quad (17.1)$$

$$\cong \Psi_M^T(x) U_{MN} \phi_N(t)$$

$$u_{ij} = \iint u(x,t) \varphi_i(x) \phi_j(t) dx dt \quad (17.2)$$

Paraskevopoulos는 월쉬 급수에 의한 분포정수계의 매개변수 식별에서 $u(x,t)$ 가 x 와 t 의 수식으로 주어질 경우만을 고려하였다.⁵⁾

$u(x,t)$ 가 표로 주어진 자료 혹은 그래프 형태로 주어질 때는 위의 관계식을 적용할 수 없다.

입력 $u(x,t)$ 가 이산치로 즉 U_{MN}^* 으로 주어졌다고 하면, 더블 월쉬 계수 U_{MN} 은 다음의 관계식으로 결정되어야 한다.

$$U_{MN}^* = W_M U_{MN} W_N \quad (18.1)$$

$$U_{MN} = \frac{1}{M} W_M U_{MN}^* W_N \frac{1}{N} \quad (18.2)$$

여기서 $U_{MN}^* = [u^*(x_i, t_j)]$ 로 x_i, t_j 에서의 이산치이다. $W_M = [\varphi_{ij}]$, $W_N = [\phi_{ij}]$ 이고, φ_{ij} 와 ϕ_{ij} 는 각각 $\Psi_M^T(x)$, $\phi_N(t)$ 의 i 번째 월쉬 급수 $\varphi_i(x)$, $\phi_i(t)$ 의 j 번째 세부구간에서의 값이다. 이때 W 를 월쉬 매트릭스(Walsh matrix)라 하며 첨자는 디멘전을 의미한다.^{13), 14)}

결국 식(1)로 주어진 계는 다음과 같이 표현된다.

$$a_2 P_M^T Y_{MN} + a_1 Y_{MN} P_N \cong r_{MN} \quad (19)$$

$$r_{MN} = a_2 \sum_{i=0}^{q-1} b_i P_M^T E_{i+1,1} + a_1 \sum_{i=0}^{r-1} c_i E_{i,1} P_N + P_M^T U_{MN} P_N$$

$$r_{MN} \cong \begin{bmatrix} r_0^T \\ r_1^T \\ \vdots \\ r_{M-1}^T \end{bmatrix}, \quad Y_{MN} \cong \begin{bmatrix} Y_0^T \\ Y_1^T \\ \vdots \\ Y_{M-1}^T \end{bmatrix}$$

Y_i^T, r_i^T 는 각각 Y_{MN}, r_{MN} 의 $(i+1)$ 번째 행 벡터(row vector)이며, 위 식에서 다음의 과정으로 Y_{MN} 이 구해진다.

$$a_2 I_N \otimes P_M^T y + a_1 P_N^T \otimes I_M y = r \quad (20.1)$$

$$\text{즉, } y = [a_2 I_N \otimes P_M^T + a_1 P_N^T \otimes I_M]^{-1} r \quad (20.2)$$

$$y = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_{M-1} \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{M-1} \end{bmatrix}$$

위 식에서 y (즉, Y_{MN})가 결정되므로 $y(x,t)$ 의 함수가 결정된다.

$$y(x,t) = \Psi_M^T(x) \begin{bmatrix} Y_0^T \\ Y_1^T \\ \vdots \\ Y_{M-1}^T \end{bmatrix} \phi_N(t) = \Psi_M^T(x) Y_{MN} \phi_N(t)$$

또한 $y(x,t)$ 의 값을 이산치로 표시하면 $y(x,t) = W_M Y_{MN} W_N$ 임을 알 수 있다.

3. 적용 예

간단한 편미분방정식으로 표현되는 분포정수계로 예로 들어 본 연구에 의한 DWA를 적용하여 보고, WGA에 의한 결과와 비교·고찰하기로 한다.

3.1 예 1

$$\frac{\partial}{\partial t} y(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} y(x,t) = u(x,t)$$

$$y(0,t) = 0, \quad y(x,0) = x$$

$$u(x,t) = x + t + 1$$

그림1은 x 와 t 에 대한 월쉬 급수를 각각 8, 4항까지만 고려했을 때의 DWA에 의한 결과이다.

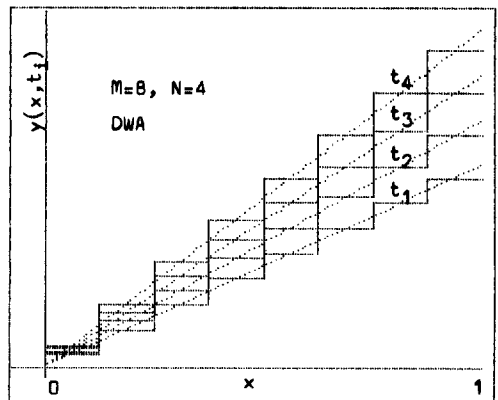


그림 1. DWA 예 1

Fig. 1. DWA example - 1.

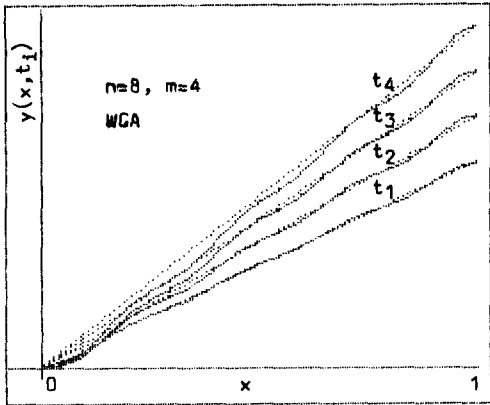


그림 2. GWA 예 1
Fig. 2. GWA example - 1.

그림2는 기저함수를 orthonormal한 함수 $\varphi_j(x) = \sqrt{2} \sin(j - \frac{1}{2})\pi x$ ($j=1, 2, \dots, 8$)로 선정하고, t 에 대한 월쉬 급수를 4항까지 취했을 때의 결과이다. 그림에서 점선은 산술해를 나타낸다.

표1(a), (b)는 두 방법에 의한 값과 산술해와의 오차를 보여주고 있다.

GWA에 의한 결과보다 DWA에 의한 결과가 원함수와의 오차가 상당히 적음을 알 수 있다. 그러나 DWA에서는 세부구간에서 평균값을 취하기 때문에 전구간에서의 오차의 합은 그림에서 보듯이 WGA보다 더 크다. 이것은 DWA보다 WGA가 적용한 직교함수의 수를 증가시킴에 따른 원함수와의 접근속도가 빠름을 의미한다.

3.2 예 2

$$\frac{\partial}{\partial t} y(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} y(x, t)$$

$$y(x, 0) = x, \quad y(0, t) = 0$$

그림3과 그림4는 본 연구에서의 DWA에 의해, t 에 대한 월쉬 급수를 4항까지 고려하고, x 에 대한 월쉬 급수를 그림3에서는 8항으로, 그림4에서는 16항

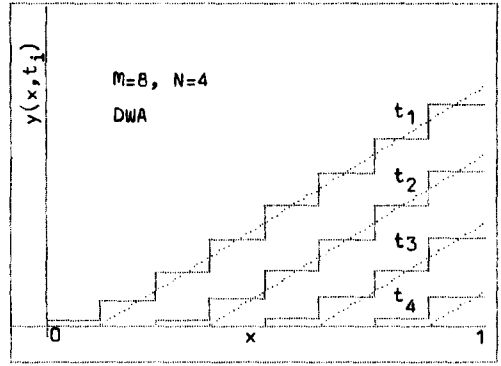


그림 3. DWA 예 2
Fig. 3. DWA example - 2.

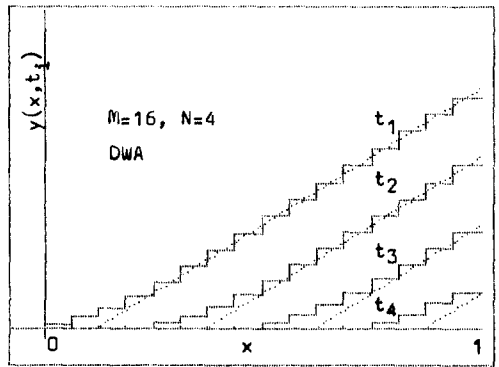


그림 4. DWA (M=16, N=4) 예 2
Fig. 4. DWA (M=16, N=4) example - 2.

표 1. (a) DWA $Y - \bar{Y}$ (b) WGA $Y - \bar{Y}$
Table 1. (a) DWA $Y - \bar{Y}$ (b) WGA $Y - \bar{Y}$

x	1 / 16	3 / 16	5 / 16	7 / 16	9 / 16	11 / 16	13 / 16	15 / 16
t4=7/8	0.	1E-08	1E-08	2E-08	0.	0.	0.	0.
t3=5/8	0.	1E-08	1E-08	1E-08	0.	0.	0.	0.
t2=3/8	0.	7E-08	1E-08	0.	1E-0	1E-08	0.	0.
t1=1/8	0.	0.	0.	0.	1E-08	0.		0.

Table 1 (b)

x	1 / 16	3 / 16	5 / 16	7 / 16	9 / 16	11 / 16	13 / 16	15 / 16
t4=7/8	0.0864	0.0498	0.0830	0.0403	0.0553	0.0007	0.0732	-0.0269
t3=5/8	0.0810	0.0452	0.0551	0.0140	0.0271	-0.0006	0.0217	-0.0265
t2=3/8	0.0647	0.0145	0.0264	-0.0005	0.0150	-0.0112	0.074	0.0258
t1=1/8	0.0242	-0.0002	0.0009	-0.0006	0.	-0.0008	0.0115	-0.0186

으로 취했을 때의 결과이다.

그림3보다는 그림4에서의 값들이 원함수에 더욱 근접되고 있음을 알 수 있다. 이것은 월쉬 급수의 적용 함수를 증가시킴으로써 원함수에 대한 보다 정확한 정보를 얻을 수 있음을 의미한다.

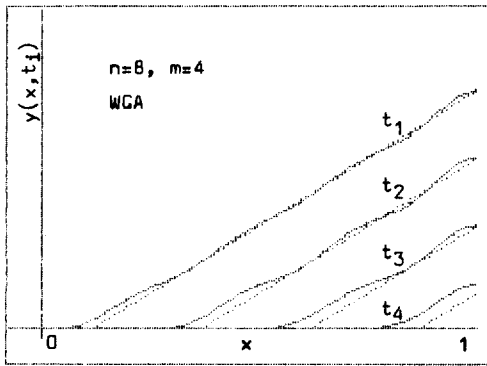


그림5. WGA 예 2

Fig.5. WGA example-2.

그림5는 WGA에 의해, 기저함수를 $\varphi_j(x) = \sqrt{2} \sin j\pi x$ ($j=1, 2, \dots, 8$)로 선정하고, 월쉬 급수를 4항까지 전개시켰을 때의 결과이다. 그림3과 비교해보면 DWA보다 WGA에 의해 추정된 값이 원함수에 밀접히 접근하고 있음을 알 수 있다.

예2의 산술해는 $y(x, t) = x - t$, $x \geq t$ 이다. 적용에서 입력으로 주어진 $u(x, t)$ 를 수식으로 표현되는 연속함수인 경우만을 고려하였다. 그러나 2. 1의 식(3)과 2. 2의 식(17), (18)을 비교해 보면 알 수 있듯이, 입력이 표로 주어진 자료이거나 그래프형태로 주어질 때는 DWA에 의한 방법이 더 유용함을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 직교함수에 의한 분포정수계의 해석을 위한 2가지 접근방법을 보였다.

먼저, S. G. Tzafestas가 제안한, Galerkin scheme을 기초로 하고 월쉬 급수를 도입한 Walsh-Galerkin expansion approach technique (WGA)을 고찰하였다.

또한 Paraskevopoulos가 분포정수계의 매개변수 식별을 위해 도입한 더블 월쉬 급수의 개념을 이용하여 새로운 접근기법 즉 더블 월쉬 급수 접근기법(double Walsh series approach technique : DWA)을 제시하였다.

WGA는 DWA보다 직교함수의 급수의 수를 증가시킴에 따른 원함수에 대한 접근속도가 빠르다. 그런데 WGA에서는 매 계마다 적합한 기저함수를 선정해야하는 어려운 점이 있다. 이때 선정되어야 하는 기저함수는 미분가능한 직교함수이어야 하는데, 월쉬 급수는 단위 계단 함수로 구성되기 때문에 이를 직접 기저함수로 이용할 수 없다.

본 연구에서의 DWA는 WGA와는 달리 orthonormal한 월쉬 급수만으로 계를 해석하는 방법이다. 먼저 최소자승법으로 월쉬 계수를 결정하였고, 편미분방정식으로 주어진 계를 적분방정식으로 변환하고, 월쉬 연산 매트릭스 P의 관계를 이용하여 간단한 수학적 연산만으로 계를 해석할 수 있음을 보였다.

또한 입력이 표로 주어진 자료이거나 그래프형태 즉 이산치로 주어질 때에도, 월쉬 계수와 이산치와의 관계를 규명함으로써, 분포정수계의 해석을 간편하게 할 수 있음을 보였다.

그리고 월쉬 급수의 세부구간 수를 증가시킴으로써 원함수에 대한 보다 정확한 추정을 할 수 있었다.

참 고 문 헌

- 1) A.J. Smith ; "Solving distributed heat-exchanger models by The method of characteristic", Trans. Inst., MC vol. 6, No. 2 pp. 83~88, 1984.
- 2) Yen-ping Shih ; "Optimal control of distributed parameter systems with integral equation constraints", Chemical Eng. Sci. vol. 24, pp. 671~680, 1969.
- 3) Courant, R. ; Methods of mathematical physics, New-York ; Interscience, 1953.
- 4) C. F.Chen ; "Evaluation of irrational and transcendental transfer functions via the fast Fourier transform", Int. J. Election vol. 35, No. 2 pp. 267~278, 1973.
- 5) P. N. Paraskevopoulos ; "Distributed parameter system identification via Walsh functions", Int. J. Syst. Sci. vol.9, No.1 pp.75~83, 1978.
- 6) Hsu. N. S & Cheng. B Int. J. Control vol. 36, pp. 281~287, 1978.
- 7) P. A. Orner ; "Least square simulation of distributed systems", IEEE Trans. Automatic Control, February pp. 75~83, 1975.
- 8) C. F. Chen ; "Walsh operational matrices for fr-

- actional calculus and their application to distributed system”, J. Franklin Inst. vol. 303, pp. 267~ , 1977.
- 9) K. G. Beauchamp; Walsh functions and their applications, Academic press, 1975.
 - 10) P. A. Orner; “A design procedure for a class of distributed parameter control systems”, ASME. J. Basic Eng. ser~D vol. 93, pp. 86 ~ 93, 1971.
 - 11) S. G. Tzafestas; “Walsh series approach to lumped and distributed system identification”, J. Franklin Inst. vol. 35, pp. 199~ , 1978.
 - 12) S. Tzafestas ; “Design of distributed parameter optimal controllers and filters via Walsh-Galerkin expansions”, IEEE Pro. 1983 pp.201 ~217, 1983.
 - 13) C.F. Chen ; “A Walsh series direct method for solving variational problems”, J. Franklin Inst. vol. 300, No.4 pp.265~280, 1975.
 - 14) C. F. Chen ; “A state-spach to Walsh series solution of linear systems”, Int. J. Syst. Sci. vol.6, No.9 pp.833~858, 1975.
 - 15) M.S. Corrington ; “Solution of differential and integral equations with Walsh functions”, IE EE Trans. Circuit Theory, CT.20, No.5 pp.470 ~476, 1973.
 - 16) Chen ; “Walsh series analysis in optimal control”, Int. J. Control, vol. 21, No.6 pp.881~897, 1975.