

외란 투입시 안정한 적응 제어기 설계

Design of a Stable Adaptive Controller in the Presence of Disturbance

千熙英* · 朴貴泰** · 朴勝燁***

(Hee-Young Chun · Gwi-Tae Park · Seung-Yub Park)

Abstract

The adaptive control of a plant in the presence of disturbance is considered. In several papers^{5)~8)}, it was shown that bounded disturbance made the basic adaptive scheme unstable. For achieving robust stability in adaptive control system in the presence of disturbance, the pure integration in the adaptive law is limited by means of an additional feedback term. In this paper, the suggested adaptive control law has property that the output error converges to zero whether the disturbance exist or not, without the priori knowledge. The adaptive controller suggested assure the boundness of all signal in the overall system. Finally, computer simulation show the effectiveness of the suggested adaptive control law.

1. 서 론

적응 제어 이론은 1950년대 자동 조타 장치 설계에 관련하여 연구되기 시작하여 1970년대 안정도를 증명하기에 이르렀다.^{5)~8)} 그러나 안정도를 증명하기 위해 이상적 가정을 설정하였으므로 80년대 들어서서 이 이상적 가정이 충족되지 않은 경우에도 안정도를 보장할 수 있는 적응 제어 방식에 관한 연구가 활발히 수행되고 있다. 이상적 가정 가운데 가장 비현실적인 것이 계통에 외란이 존재하지 않는다는 것과 제어계통의 차수가 계통모델보다 크지 않다는 것이다. 계통에 대해 이와 같은 이상적인 조건을 제거하기 위해서는 기본적인 적응 제어칙을 수정하여야 한다.^{9)~11)} 외란 투입시 안정한 제어기 설계는 Peterson⁸⁾, Samson⁹⁾, Kreisselmeier¹⁰⁾, Ioannou¹¹⁾ 등이 연구를 수행하였으나 이들 기법은 외란

의 최대치나 제어기 파라미터의 최대치등의 정보를 필요로 하거나 외란이 존재하지 않는 경우 수렴을 보장할 수 없다는 단점을 갖는다. 그리고 제어 계통의 차수가 모델의 차수보다 큰 경우, 예를 들어 계통에 모델화되지 않은 동특성이 존재할 때 저차 모델에 의해 적응 제어기를 구성하면 모델화 되지 않은 동특성에 의해 계통이 불안정해진다. 이에 대해 Ioannou^{7),11)}는 외란 처리와 마찬가지로 적응 제어칙의 적분을 제한함으로써 전체 계통을 안정화시킬 수 있음을 보여 주고 있다.

그러므로 본 논문에서는 계통에 외란이 들어온 경우만을 고려하여 선행 정보를 필요로 하지 않고 외란의 특성에 관계없이 항상 수렴을 보장할 수 있는 안정한 적응 제어 방식을 제시하고 이 방식을 사용한 수치예를 보인다.

2. 외란 투입시 적응 제어기 설계

다음 상태 방정식으로 주어지는 계통을 고려하자.

$$\dot{x}_p = A_p x_p + b_p u_p + d_p \quad (1.a)$$

$$y_p = c_p^T x_p \quad (1.b)$$

* 正 會 員 : 高麗大 工大 電氣工學科 教授 · 工博
 ** 正 會 員 : 高麗大 工大 電氣工學科 副教授 · 工博
 *** 正 會 員 : 高麗大 大學院 電氣工學科 博士課程
 接受日字 : 1986年 6月 3日

여기에서 x_p, u_p, y_p 와 d_p 는 각각 상태변수, 입력, 출력 그리고 외란을 나타낸다. 식(1)의 계통에 대한 전달함수는 다음과 같다.

$$W_p(s) = c_p^T (sI - A_p)^{-1} b_p = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \quad (2)$$

$W_p(s)$ 에 대해 다음과 같은 가정을 한다.

- i) $R_p(s)$ 는 차수 n 의 monic 다항식이다.
 - ii) $Z_p(s)$ 는 차수 $m (\leq n-1)$ 의 monic Hurwitz 다항식이다.
 - iii) k_p 의 부호는 알고 있다.
- 기준 모델은 다음 식에 의해 주어진다.

$$\dot{x}_m = A_m x_m + b_m r \quad (3.a)$$

$$y_m = c_m^T x_m \quad (3.b)$$

이때 기준 모델은 strict positive real의 조건을 만족하는 전달함수를 갖도록 선택하며 다음과 같다.

$$W_m(s) = c_m^T (sI - A_m)^{-1} b_m = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \quad (4)$$

식(4)의 전달함수에 대해 다음과 같은 가정을 한다.

- i) $R_m(s)$ 는 차수 n 의 monic Hurwitz 다항식이다.
- ii) $Z_m(s)$ 는 차수 $p (\leq m)$ 의 monic Hurwitz 다항식이다.
- iii) k_m 은 상수이다.

단 여기서 n 은 편의상 상대차수 $n^* = n - m = n - p = 1$ 이라 가정한다.

제어 목적은 식(1)과 식(2)로 주어지는 계통이 식(3)과 식(4)의 기준 모델의 출력을 추종하여 출력 편차 ($e_1 = y_p - y_m$)가 제한된 영역내에 수렴할 수 있도록 제어 입력 u_p 를 결정하는 것이다. 제어 목적을 달성하기 위해 다음 식으로 주어지는 제어기를 고려하자.

$$\dot{v}_1 = Fv_1 + gu_p \quad (5.a)$$

$$w_1 = c^T v_1 \quad (5.b)$$

$$\dot{v}_2 = Fv_2 + gy_p \quad (6.a)$$

$$w_2 = d_0 y_p + d^T v_2 \quad (6.b)$$

여기에서 $g^T = [0, 0, \dots, 1]$ 이며 F 는 $(n-1) \times (n-1)$ 의 안정한 행렬이다. 제어기 출력은 다음과 같다.

$$u_p = \theta^T w \quad (7)$$

여기에서 $w = [r, v_1^T, y_p, v_2^T]^T$, $\theta = [k_0, c^T, d_0, d^T]^T$ 이며 $k_0 = \frac{K_m}{K_p}$ 이다.

계통에 외란이 없는 경우 제어기를 포함한 전체 계통의 전달함수와 모델의 전달함수를 일치시키기 위한 제어기 파라미터 θ^* 가 존재한다. θ^* 는 미지이므로 이를 구하기 위하여 Narendra²⁾ 등은 다음과 같은 적응 제어칙을 사용하였다.

$$\dot{\theta} = -\Gamma e_1 w, \quad \Gamma = \Gamma^T > 0 \quad (8)$$

여기에서 $e_1 = y_p - y_m$ 이다.

계통에 외란이 존재하면 외란에 의해 제어기 파라미터가 표류(drift)하게 되므로 식(8)을 사용할 수 없다. 이 경우 안정성을 보장하기 위하여 식(8)의 적응제어칙에서 다음 식과 같이 적분 동작이 제한된 적응 제어칙을 사용하게 된다.

$$\dot{\theta} = -f\theta - \Gamma e_1 w \quad (9)$$

Kreisselmeier[10]는 deadzone 개념을 도입하여 f 를 다음과 같이 주었다.

$$f = \begin{cases} (1 - \|\theta\| / \|\theta^*\|_{max})^2, & \|\theta\| \geq \|\theta^*\|_{max} \\ 0, & \|\theta\| < \|\theta^*\|_{max} \end{cases}$$

이 방법은 $\|\theta^*\|_{max}$ 의 크기 결정에 의해 e_1 의 수렴 영역에 차이가 생기게 되는데 미지계통에서 $\|\theta^*\|_{max}$ 값의 결정은 어렵다. 그리고 Ioannou¹¹⁾는 선행 정보가 필요없는 다음 방식을 제안하였다.

$$f = \sigma$$

여기에서 $\sigma (0 < \sigma < 1)$ 는 설계 상수이다. 아 방법의 단점은 외란이 존재하지 않을 경우에 출력 편차를 0으로 수렴시킬 수 없다는 것과 σ 가 상수이므로 외란이 점차 감소하거나 증가할 경우 수렴 영역을 조정할 수 없다는 것이다. 또한 Peterson⁸⁾, Sams-on⁹⁾은 편차가 일정범위내로 수렴할 경우 식(8)과 같은 적응 제어칙의 적응 동작은 멈추고 편차가 일정범위내에서 벗어날 때 다시 적응 동작을 하도록 하였으나 그 일정범위값을 구하기 위해 외란의 크기가 주어져야 한다. 그러나 외란의 크기는 알 수 없으므로 설계자가 가정하여야 한다. 이때 이 값의 크기에 따라 편차의 수렴 영역에 차이가 생기게 된다.

그러므로 본 논문에서는 위에서 언급한 단점을 개선하기 위하여 다음과 같은 적응 제어칙을 제안한다.

$$\dot{\theta} = -\alpha |e_1| \theta - \Gamma e_1 w \quad (10)$$

여기에서 α 는 스칼라이다. ($\alpha > 0$)

이 방법은 적응 제어칙을 구성하기 위하여 Pet-

erson⁸, Samson⁹, Kreisselmeier¹⁰의 방법과 같이 별도의 선행 정보를 필요로 하지 않으며 Ioannou¹¹의 방법과는 달리 외란이 존재하지 않을때 출력 편차가 0으로 수렴할 것을 보장하며 또한 적응 제어칙이 출력 편차의 비에 의해 제한 되므로 외란이 서서히 변화할 경우에도 외란에 의한 출력 편차의 영향이 고려되므로서 수렴 영역을 적게 할 수 있는 장점을 갖는다.

이 방법을 사용할 경우 전체 계통의 안정도 해석은 다음 절에서 다룬다.

3. 안정도 해석

식(1)의 계통과 식(5)의 제어기를 포함하는 전체 계통은 다음 식으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \\ g c^T & 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_p \\ g \\ 0 \end{bmatrix} (\theta^T w) + \begin{bmatrix} d_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$\theta = \theta^* + \phi$ 라 가정하면 식(11)의 상태 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x} = A_c x + b_c (k_0^* r + \phi^T w) + D_c \quad (12)$$

여기에서

$$\begin{aligned} x^T &= [x_p^T, v_1^T, v_2^T] \\ A_c &= \begin{bmatrix} A_p + d_p^* b_p c_p^T & b_c c^{*T} & b_p d^{*T} \\ g d_p^* c_p^T & F + g c^{*T} & g d^{*T} \\ g c_p^T & 0 & F \end{bmatrix} \\ b_c^T &= [b_p^T, g^T, 0] \\ D_c &= [d_p^T, 0, 0] \end{aligned}$$

$\phi = 0$ 이면 즉 $\theta = \theta^*$ 이면 식(12)는 기준 모델도 역시 나타낼 수 있다. 기준 모델을 비최소 위상 계통으로 표현했을 때의 상태 변수를 x_{mc} 라 하면 기준 모델은 다음과 같다.

$$\dot{x}_{mc} = A_c x_{mc} + b_c k_0^* r \quad (13)$$

여기에서

$$x_{mc}^T = [x_m^T, v_{1m}^T, v_{2m}^T]^T$$

계통이 미지이므로 식(13)은 편차 방정식을 해석하기 위한 목적으로만 사용된다.

모델과 계통사이의 편차 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_c e + b_c (\phi^T w) + D_c \\ e_1 &= c_p^T e \end{aligned} \quad (14)$$

여기에서 $e = x - x_{mc}$

$\phi = \theta - \theta^*$ 이므로 식(10)은 다음과 같다.

$$\dot{\phi} = \dot{\theta} = -\alpha |e_1| \phi - \Gamma e_1 w - \alpha |e_1| \theta^* \quad (15)$$

식(1)의 계통에 대해 식(10)의 적응 제어칙을 사용할 경우 상태 변수 편차 e 와 제어기 파라미터 편차 ϕ 를 일정범위내로 제한시킬 수 있음을 증명하기 위해 다음의 Lyapunov 함수를 고려하자.

$$V = \frac{1}{2} e^T P_c e + \frac{1}{2} \phi^T \Gamma^{-1} \phi \quad (16)$$

여기에서 $P_c = P_c^T > 0$ 이고 다음 식을 만족한다.

$$P_c A_c + A_c^T P_c = -q q^T - \epsilon L, \quad P_c b_c = c_p \quad (17)$$

여기에서 q 는 임의의 벡터이며 행렬 $L = L^T > 0$ 이고 스칼라양 $\epsilon > 0$ 이다. 식(16)의 Lyapunov 함수를 시간에 대해 미분하면,

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{e}^T P_c e + \frac{1}{2} e^T P_c \dot{e} + \frac{1}{2} \dot{\phi}^T \Gamma^{-1} \phi + \frac{1}{2} \phi^T \Gamma^{-1} \dot{\phi} \quad (18)$$

식(18)에 식(14)와 식(15)를 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2} e^T (q q^T + \epsilon L) e + e^T P_c D_c - \alpha |e_1| \phi^T \Gamma^{-1} \phi \\ &\quad - \alpha |e_1| \phi^T \Gamma^{-1} \theta^* \end{aligned} \quad (19)$$

다음 식을 정의한다.

$$\lambda_0 = \frac{\epsilon}{2} \min \lambda(L) \quad (20. a)$$

$$M_0 = \max \lambda(P_c) \quad (20. b)$$

$$M_1 = \max \lambda(\Gamma^{-1}) \quad (20. c)$$

$$\lambda_1 = \min \lambda(\Gamma^{-1}) \quad (20. d)$$

여기에서 $\lambda(\cdot)$ 는 (\cdot) 의 고유치를 나타낸다. 식(20)을 식(19)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\lambda_0 \|e\|^2 + M_0 \|e\| \|D_c\| - \alpha |e_1| \lambda_1 \|\phi\| \|\theta^*\| \\ &\quad - \alpha |e_1| \lambda_1 \|\phi\|^2 \end{aligned}$$

외란이 존재하면 $|e_1| \neq 0$ 이므로 $\alpha |e_1|$ 보다 적은 임의의 상수 β 를 정의하는 것은 항상 가능하다. 그러므로 $0 < \beta < \alpha |e_1|$ 을 만족하는 β 에 의해 위 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{V} \leq -\lambda_0 \|e\|^2 + M_0 \|e\| \|D_c\| - \beta \lambda_1 \|\phi\|^2 \quad (21)$$

위 식을 제곱 형태로 고치면

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{\lambda_0}{2} \|e\|^2 - \frac{\lambda_0}{2} \left(\|e\| - \frac{M_0}{\lambda_0} \|D_c\| \right)^2 + \frac{M_0^2}{2\lambda_0} \|D_c\|^2 \\ &\quad - \beta \lambda_1 \|\phi\|^2 \end{aligned} \quad (22)$$

식(22)는 다음과 같다.

$$\dot{V} \leq -\frac{\lambda_0}{2} \|e\|^2 + \frac{M_0^2}{2\lambda_0} \|D_c\|^2 - \beta\lambda_1 \|\phi\|^2 \quad (23)$$

식 (16)은 식 (20)의 관계에 의해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$V \leq \frac{1}{2} M_0 \|e\|^2 + \frac{1}{2} M_1 \|\phi\|^2 \quad (24)$$

식 (23)에 식 (24)를 대입하면

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{\lambda_0}{2} \|e\|^2 + \frac{1}{2\lambda_0} M_0^2 D_0^2 - \beta\lambda_1 \|\phi\|^2 \\ & + \delta \left(\frac{1}{2} M_0 \|e\|^2 + \frac{1}{2} M_1 \|\phi\|^2 - V \right) \end{aligned} \quad (25)$$

여기에서

$$\delta = \min \left[2\beta \frac{\lambda_1}{M_1}, \frac{\lambda_0}{M_0} \right]$$

$$D_0 = \sup [D_c]$$

식 (25)를 정리하면

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\delta V - \frac{1}{2} \|e\|^2 (\lambda_0 - \delta M_0) - \frac{1}{2} \|\phi\|^2 (2\beta\lambda_1 - \\ & \delta M_1) + \frac{1}{2\lambda_0} M_0^2 D_0^2 \end{aligned} \quad (26)$$

식 (26)은 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$\dot{V} \leq -\delta V + \frac{1}{2\lambda_0} M_0^2 D_0^2 \quad (27)$$

식 (14), (15)로 주어지는 계통이 안정하기 위해서는 $\dot{V} < 0$ 인 조건을 만족해야 하므로

$$\delta V < \frac{1}{2\lambda_0} M_0^2 D_0^2$$

그러므로 V 는 다음과 같이 된다.

$$V < \frac{1}{2\delta\lambda_0} M_0^2 D_0^2$$

V 는 e 와 ϕ 의 함수이므로 결국 e, ϕ 는 다음 영역 내에 수렴한다.

$$D_R = \left\{ e, \phi; V < \frac{1}{2\delta\lambda_0} M_0^2 D_0^2 \right\} \quad (28)$$

만일 수렴 영역 D_R 밖에 e, ϕ 가 존재하면 그곳에서 $V > 0$ 이고 $\dot{V} < 0$ 이므로 V 는 감소하기 시작한다. 수렴 영역 D_R 에 도달하면 더 이상 $\dot{V} < 0$ 이 아니므로 그곳에 존재하게 된다. 이때 V 의 수렴 속도는 식 (27)에서 $\exp(-\delta t)$ 가 된다. 여기에서 V 의 수렴속도는 e^2, ϕ^2 의 수렴 속도이므로 e, ϕ 는 $\exp\left(-\frac{\delta t}{2}\right)$ 의 속도로 수렴하게 된다.

Ioannou⁽¹⁾의 방식에 의하면 수렴 영역은 다음과 같다. (Theorem1)

$$D_R = \left\{ e, \phi; V < \frac{1}{2\delta} \left(\sigma M_1 \|\theta^*\|^2 + \frac{M_0^2}{\lambda_0} D_0^2 \right) \right\}$$

외란이 존재하지 않으면 $D_0 = 0$ 이므로 본 연구에서 제안된 방식에서는 $D_R = \{e, \phi; 0\}$ 이 되어 e, ϕ 는 0으로 수렴하는데 비해 Ioannou의 방식은 $D_0 = 0$ 이 되어도 $D_R = \{e, \phi; V < \frac{1}{2\delta} \sigma M_1 \|\theta^*\|^2\}$ 이 되어 e, ϕ 는 0으로 수렴하지 못한다. 따라서 외란이 존재하지 않는 경우 제안된 방법은 출력편차를 0으로 할 수 있는 장점을 갖게 된다.

4. 수치 예

계통에 외란이 투입된 경우 식 (10)의 적응 제어칙을 사용하면 안정하게 소기의 제어 목적을 달성할 수 있다. 이 적응 제어칙을 사용할 경우 제어 성능을 보이기 위해 다음과 같이 간단한 2차 계통을 고려하자.

$$\dot{x}_p = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_p + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d_p$$

$$y_p = x_{1p}$$

여기에서 d_p 는 외란이다.

기준 모델은 다음과 같다.

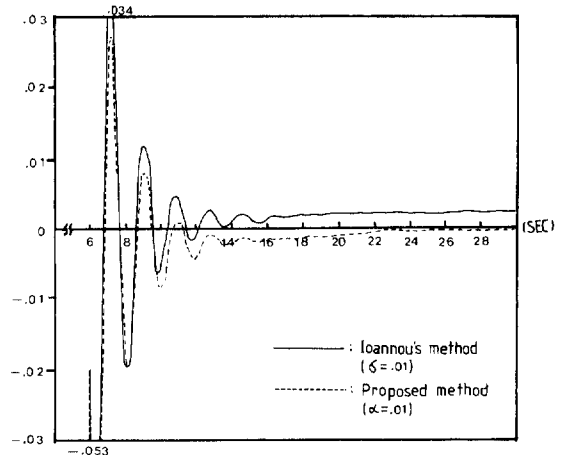


그림 1. 제안된 적응제어기의 출력편차 시간응답 ($\alpha=0.01$)

Fig. 1. Output error transient of the suggested adaptive controller. ($\alpha=0.01$)

$$\dot{x}_m = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x_m + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y_m = x_{1m}$$

여기에서 $r=2.0$ 으로 주었다.

외란을 다음과 같이 주었을 때 출력 편차의 시간 응답을 그림 1에 나타내었다.

$$d_p = 0.1 \sin t$$

본 논문에서 제시한 적응 제어칙과 Ioannou^{7),11)}가 제시한 적응 제어칙의 제어 성능을 비교하기 위하여 외란이 다음과 같이 시간이 지남에 따라 점차 감소할 때 출력 편차의 시간 응답을 그림 2에 나타내었다.

$$d_p = \exp(-0.1t)$$

그림 2에서 알 수 있듯이 외란이 점차 감소하는 경우 본 연구에서 제시한 적응 제어칙은 Ioannou가 제시한 적응 제어칙보다 우수한 성능을 갖으며 이는 3 절에서 예측한 결과와 일치한다.

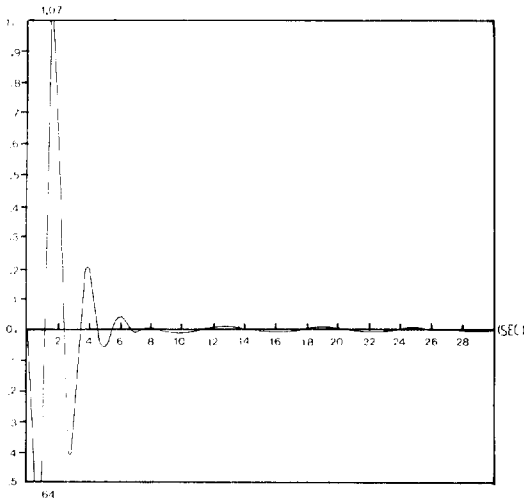


그림 2. 제안된 방식과 Ioannou의 방식의 출력편차 시간응답.

Fig. 2. Output error transient of the suggested method and Ioannou's method.

5. 결 론

본 논문에서는 계통에 외란이 투입될 경우 전체 계통을 안정화시킬 수 있는 적응 제어 방식을 제시하였다. 외란에 의해 계통이 불안정해지는 것을 막기 위해 적응 제어칙에 $-a|e_1|\theta$ 항을 첨가하여 적분 동작을 제한하였다. 이 방법은 상수항을 첨가할 경우 수렴 영역을 변화시킬 수 없는 단점을 해결할 수 있다. 만일 외란에 의해 출력 편차가 증가하면 첨가항도 커지므로 출력 편차를 줄일 수 있으며 외란이 존재하지 않으면 $|e_1| \rightarrow 0$ 이 되므로 일반적인 적응 제어칙²⁾과 일치하게 된다. 여기에서 제안한 방법은 외란의 최대치나 제어기 파라미터의 최대치 등의 정보가 필요없고 외란의 동특성에 관계없이 항상 수렴할 수 있는 특징을 갖는다.

참 고 문 헌

- 1) Monopoli, R.V., "Model reference adaptive control with an augmented error signal", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-19, pp. 474-484, 1974
- 2) Narendra, K.S and Valavani, L.S., "Stable adaptive controller design-direct control", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-23, pp. 570-583, 1978
- 3) Egardt, B., Stability of adaptive controllers. Springer-verlag, 1979
- 4) Landau, I.D., Adaptive control : The model reference Approach, Marcel-Dekker, 1979
- 5) "Analytical verification of undesirable properties of direct model reference adaptive control algorithms," Proc. 20th IEEE conference on Decision and control, pp. 1272-1284, 1981
- 6) Rohrs, C.E., Valavani, L., Athans, M. and Stein, G., in the presence of unmodeled dynamics", Proc. 21st IEEE conference on Decision and Control. pp. 3-11, 1982
- 7) Ioannou, P. A, and Kokotovic, P. V., Adaptive systems with reduced models. Springer-verlag, 1983
- 8) Peterson, B.B. and Narendra, K.S., "Bounded error adaptive control", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-27, No. 6, pp. 1161-1168, 1982

- 9) Samson, C., "Stability analysis of adaptively controlled systems subject to bounded disturbances", *Automatica*, vol.19, No.1, pp. 81-86, 1983
- 10) Kreisselmeier, G. and Narendra, K.S., "Stable model reference adaptive control in the presence of bounded disturbance ." *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-27, No. 6, pp.1169-1175, 1982
- 11) Ioannou, P.A. and Kokotovic, P.V., "Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control", *Automatica*, vol. 20, No. 5, pp.583-594, 1984