

<論 文>

비보존력을 받는 다수의 집중질량을 갖는
외팔보의 안정성에 관한 연구

노 광 춘* · 박 영 필**

(1985년 8월 9일 접수)

A Study on the Stability of the Cantilever Beam with Several
Masses Subjected to a Nonconservative Force

Kwang Choon Ro and Young Pil Park

Key Words: Nonconservative Force(비보존력), Cantilever(외팔보), Stability(안정성), Concentrated Mass(집중질량), Flutter Type Instability(플러터형 불안정), Flutter Load(플러터하중)

Abstract

The stability behavior of the cantilever beam carrying several masses and subjected to a follower force at its free end is investigated. The effects of the location and the mass ratio of the concentrated masses on the stability of the system are discussed.

An optimal location of the concentrated mass is determined to give maximum critical follower force. Discontinuities of the flutter load are observed for the system with more than two concentrated masses.

기 호 설 명

a_i : i 번째 집중질량의 무차원 위치
 E : 영률
 I : 관성 모멘트
 i : $= \sqrt{-1}$
 \mathcal{L} : 수정미분연산자
 L : 보의 길이

l_i : i 번째 집중질량의 위치
 M_i : i 번째 집중질량
 \bar{M}_i : 보의 질량에 대한 i 번째 집중질량의 질량비
 m : 보의 단위길이당 질량
 p : 종동력
 \bar{p} : 무차원 종동력
 \bar{p}_r : 무차원 플러터 하중
 $q_i(t)$: 임의의 시간에 대한 함수
 t : 시간

*연세대학교 대학원
**정회원, 연세대학교 공과대학 기계공학과

- $U(\bar{x}, \bar{t})$: 수정변수
 $u(x, t)$: 보의 측방변위
 x : 공간좌표
 δ : Kronecker delta
 λ_j : 보의 자유진동의 j 번째 고유치
 $\phi_j(\bar{x})$: 좌표함수
 $\Phi_j(\bar{x})$: 수정좌표 함수
 ω : 하중을 받는 보의 고유치

1. 서 론

18세기 Euler의 연구로 시작된 탄성계의 고전적 안정성 연구는 외력이 포텐셜을 가지고 있는 경우로 이러한 연구들은 주로 산업, 수송 및 토목공학적 구조물에 적용되었다. 그러나 최근 기계, 항공 및 로켓공학의 발달은 외력이 포텐셜을 갖지 않는 하중 즉, 비보존력의 경우에 까지 연구의 폭을 넓히게 되었다.

이 분야의 최초의 연구는 Nikolai⁽¹⁾에 의해 연구되었으며 그 후 많은 연구가 진행되었다^(2,3,4). 이러한 비보존 탄성계의 안정문제는 정적방법으로는 해석하지 못하고 동적방법에 의해 해석하여야 한다^(5,6).

비보존 탄성계의 안정문제중 중동력을 받는 외팔보에 대한 연구가 Beck⁽⁷⁾에 의해 연구 되었으며, 외팔보에 부착된 집중질량의 영향에 대해서는 Pflüger⁽⁸⁾가 외팔보의 자유단에 집중질량이 있는 경우에 대하여, Deineko와 Leonov⁽⁹⁾, Kordas와 Zyczkowski⁽¹⁰⁾는 2개의 집중질량이 있는 경우에 대하여, Leipholz와 Linder⁽¹¹⁾, Karpoor와 Leipholz⁽¹²⁾는 집중질량이 외팔보의 길이에 따라 위치가 변하는 경우에 대하여, Kounadis⁽¹³⁾, Kounadis와 Katsikadelis⁽¹⁴⁾는 3개의 집중질량이 있고 고정단이 탄성적으로 지지된 Timoshenko 외팔보의 안정성에 대해 연구하였다.

Oran⁽¹⁵⁾은 Deineko와 Leonov⁽⁹⁾의 논문을 재연구하는 과정에서 집중질량의 비에 따라 플러터형 불안정과 발산형 불안정이 나타나며, 집중질량 하나를 뺀으로 접근시켜 얻은 결과는 집중질량을 직접접으로 하여 얻은 결과와 일치하지 않는다. 즉, 부가된 미소질량은 비보존력을 받는 탄성계의 안정성에 커다란 영향을 미친다고 하였다. Kounadis와 Katsikadelis⁽¹⁴⁾는 계의 파라미터 변화에 따라 플러터하중도 변화하므로, 플러터하중을 계의 파라미터 변화에 따른 부분적인 연속함수로 볼 수 있다고 하였고, 이때 플러터하중은 점프현상에 의한 불연속이 존재하며 이러한 현상은 첫번째와 두번째 고유진동수의 일치에 의해 일어나면 플러터하중이 두

번째와 세번째 고유진동수의 일치에 의해 일어남으로써 점프현상을 야기시킨다 하였다. 또한 이러한 현상은 불연속단면을 갖는 외팔보의 경우에서도 나타난다⁽¹⁶⁾.

본 연구에서는 중동력을 받는 다수의 집중질량을 갖는 외팔보에 대해 집중질량의 위치, 집중질량간의 집중질량비 및 집중질량대 분포질량의 질량비에 따른 보의 안정성에 관해 연구하였다.

2. 이 론

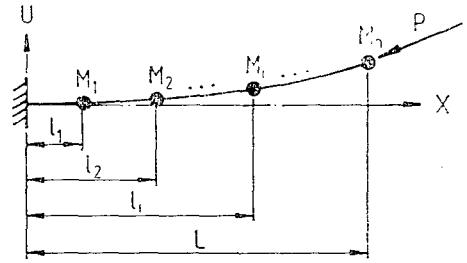


Fig. 1 Configuration of the cantilever beam with attached masses

Fig. 1은 본 연구의 수학적모델이다. 계의 지배방정식 및 경계조건은 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[m + \sum_{i=1}^{n-1} M_i \delta(x-l_i) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 u(L, t)}{\partial x^3} = M_n \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned} &\text{다음과 같은 무차원 매개변수를 도입하여,} \\ &\bar{x} = x/L, \quad \bar{t} = t/C, \quad \bar{M}_i = M_i/mL, \quad \bar{p} = pL^2/EI, \\ &a_i = l_i/L \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 $C^2 = mL^4/EI$

식 (1)과 (2)를 무차원화하면,

$$u'''' + \bar{p}u'' + \left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} \bar{M}_i \delta(\bar{x} - a_i) \right] \ddot{u} = 0, \quad (4)$$

$$u(0, \bar{t}) = 0, \quad u'(0, \bar{t}) = 0,$$

$$u''(1, \bar{t}) = 0, \quad u'''(1, \bar{t}) = \bar{M}_n \ddot{u}(1, \bar{t}), \quad (5)$$

이다. 여기서 "''"과 "'''"은 각각 \bar{x} 과 \bar{t} 에 대한 편미분이다.

여기에 다음과 같은 수정미분연산자와 수정변수를 도입한다.

$$\mathcal{L} = [L_1, L_2] \quad (6)$$

$$U = \begin{Bmatrix} u(\bar{x}, \bar{t}) \\ u(1, \bar{t}) \end{Bmatrix} \quad (7)$$

여기서

$$L_1 = \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}^4} + \bar{p} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} \bar{M}_i \delta(\bar{x} - a_i) \right] \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_2 = -\frac{\partial^3}{\partial \bar{x}^3} + \bar{M}_n \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (8)$$

이다. 식 (6), (7)를 이용하여 식 (4), (5)를 표시하면 다음과 같다.

$$\mathcal{L}[U] = 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u'(0, t) = 0, \quad u''(1, t) = 0 \quad (9)$$

식 (4)의 해를 다음과 같이 가정한다.

$$u(\bar{x}, t) = \sum_{j=1}^N q_j(t) \cdot \phi_j(\bar{x}) \quad (10)$$

여기서 $q_j(t)$ 는 어떤 시간에 대한 함수이고, $\phi_j(\bar{x})$ 는 좌표함수로서 다음의 경계치문제에 의해 결정된다.

$$\phi_j''' = \lambda_j^4 \phi_j$$

$$\phi_j(0) = 0, \quad \phi_j'(0) = 0, \quad \phi_j''(1) = -\bar{M}_n \lambda_j^4 \phi_j(1) \quad (11)$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

식 (11)를 만족하는 좌표함수는

$$\phi_j(\bar{x}) = \cos \lambda_j \bar{x} - \cosh \lambda_j \bar{x} - \frac{\cos \lambda_j + \cos h \lambda_j}{\sin \lambda_j + \sin h \lambda_j} \times$$

$$(\sin \lambda_j \bar{x} - \sinh \lambda_j \bar{x}),$$

$$j = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

이다. 여기서 λ_j 는 보의 자유진동의 j 번째 고유치이며 아래 방정식으로부터 구할 수 있다.

$$\bar{M}_n \lambda_j (\cos \lambda_j \sin h \lambda_j - \sin \lambda_j \cos h \lambda_j) + 1 + \cos \lambda_j \cos h \lambda_j = 0,$$

$$j = 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

그리고, 직교성조건은 다음과 같다.

$$\int_0^1 \phi_j \phi_k d\bar{x} + \bar{M}_n \phi_j(1) \phi_k(1) = \delta_{jk}$$

$$j, k = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

식 (10)을 식 (7)에 대입하면

$$U(\bar{x}, t) = \sum_{j=1}^N q_j(t) \begin{Bmatrix} \phi_j(\bar{x}) \\ \phi_j(1) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^N q_j(t) \Phi_j(\bar{x}) \quad (15)$$

이다. 여기서 Φ_j 는 수정좌표함수이며 다음과 같이 정의된다.

$$\Phi_j(\bar{x}) = \begin{Bmatrix} \phi_j(\bar{x}) \\ \phi_j(1) \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Galerkin 방법을 사용하면, 식 (15)와 식 (9)로부터 다음과 같은 수정내적(modified inner product) 방정식을 얻는다.

$$\langle \mathcal{L} \left[\sum_{j=1}^N q_j(t) \cdot \Phi_j(\bar{x}) \right], \Phi_k(\bar{x}) \rangle = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, N \quad (17)$$

식 (17)을 정리하면 다음과 같다.

$$[F_{jk}] \{\dot{q}\} + [G_{jk}] \{q_k\} = \{0\},$$

$$j, k = 1, 2, \dots, N \quad (18)$$

여기서

$$F_{jk} = \delta_{jk} + \sum_{i=1}^{n-1} \bar{M}_i \phi_j(a_i) \phi_k(a_i),$$

$$G_{jk} = \lambda_j^4 \delta_{jk} + \bar{p} [\phi_j'(1) \phi_k(1) - \int_0^1 \phi_j' \phi_k' d\bar{x}], \quad (19)$$

이다. 식 (18)의 $q_k(t)$ 를 다음과 같이 가정하면,

$$q_k(t) = Q_k e^{i\omega t}, \quad (20)$$

식 (18)은 다음의 고유치문제가 된다.

$$([G_{jk}] - \omega^2 [F_{jk}]) \{Q_k\} = \{0\}. \quad (21)$$

여기서 고유치 ω 는 일반적으로 복소수이므로

$$\omega = \omega_R + i\omega_I,$$

이다. 계의 안정성은 $\omega_I \geq 0$ 이면 안정, $\omega_I < 0$ 면 불안정이며, 이 경우 $\omega_R = 0$ 이면 발산형 불안정, $\omega_R \neq 0$ 면 플러터형 불안정이다.

3. 수치결과 및 검토

본 연구에서 수치계산에 사용된 컴퓨터는 Cyber, 170-825이며, 고유치를 계산하는 프로그램은 EISPACK PACKAGE의 RGG Subroutine을 사용하여 근사하는 $N=5$ 까지 구하였다.

Fig. 2는 플러터하중 \bar{p}_F 에 대한 집중질량의 위치 a

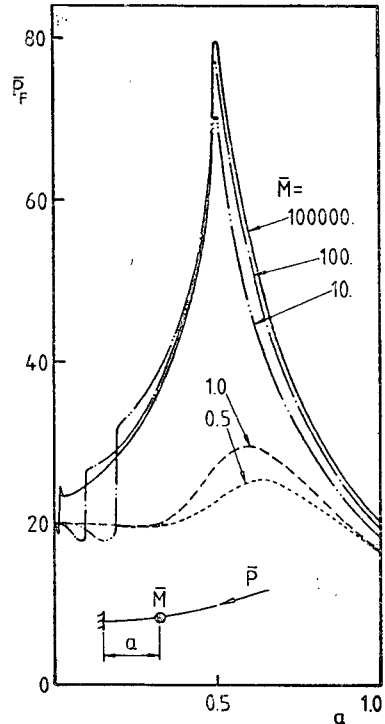


Fig. 2 Stability curves with single mass

및 질량비 \bar{M} 의 변화에 따른 영향을 나타낸 것이다. 주어진 \bar{M} 의 값에 대해 플러터하중은 최대치나 최소치를 갖는다. 질량비 \bar{M} 가 증가함에 따라 최대 플러터하중도 증가하며 최대 \bar{p}_F 를 갖는 집중질량의 최적 위치는 $a=0.5$ 에서 자유단쪽으로 이동한다. 이는 집중질량의 위치가 보의 진동형에 영향을 미치기 때문이다.

Fig. 3과 4는 두개의 같은 질량의 집중질량을 갖는 외팔보의 플러터하중에 대한 하나의 집중질량의 위치 변화의 영향이다. Fig. 3에서 \bar{M}_2 의 위치는 $a_2=0.5$ 에 고정되어 있으며, 정성적으로 Fig. 2와 같은 결과이다. Fig. 4에서 \bar{M}_2 의 위치는 $a_2=1.0$ 에 고정되어 있으며, 질량비가 증가하면 최적 플러터하중을 얻을 수 있는 집중질량 \bar{M}_1 의 위치는 자유단쪽으로 이동한다. Fig. 5는 Deineko와 Leonov⁽⁹⁾의 모델에 대한 결과이다. 여기서 Deineko와 Leonov의 모델은 분포질량을

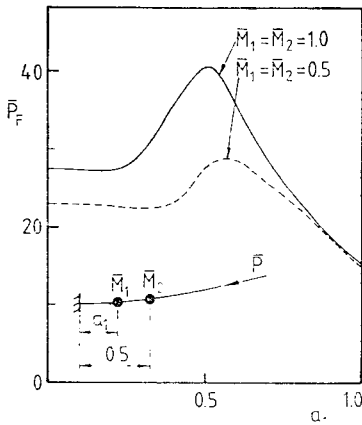


Fig. 3 Stability curves with two masses ($a_2=0.5$)

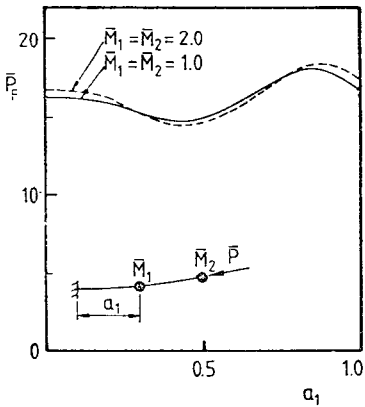
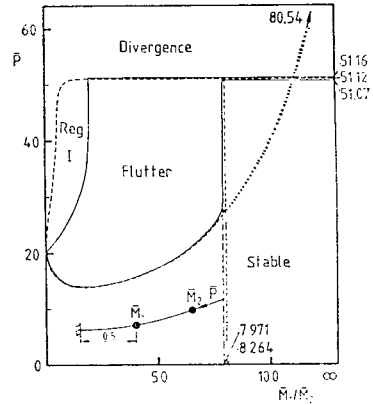
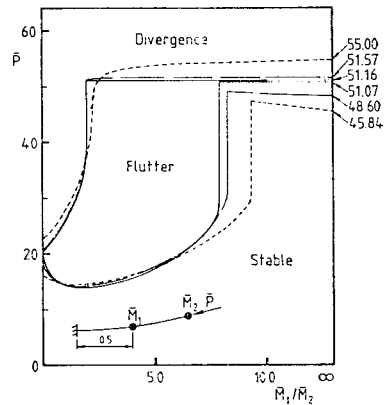


Fig. 4 Stability curves with two masses ($a_2=1.0$)



(— : present, ---- : Oran⁽¹⁵⁾, : Deineko and Leonov⁽⁹⁾)

Fig. 5 Instability regions- $\bar{M}_2=10000$



(— : $\bar{M}_2=10000$, ---- : $\bar{M}_2=10$, : $\bar{M}_2=1$)

Fig. 6 Instability regions

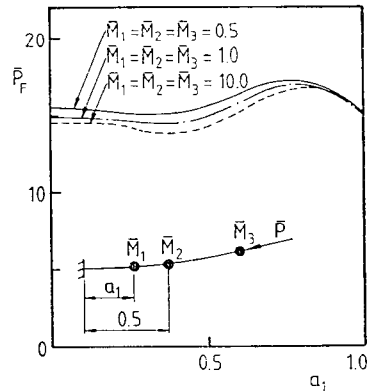


Fig. 7 Stability curves with three masses ($a_2=0.5$, $a_3=1.0$)

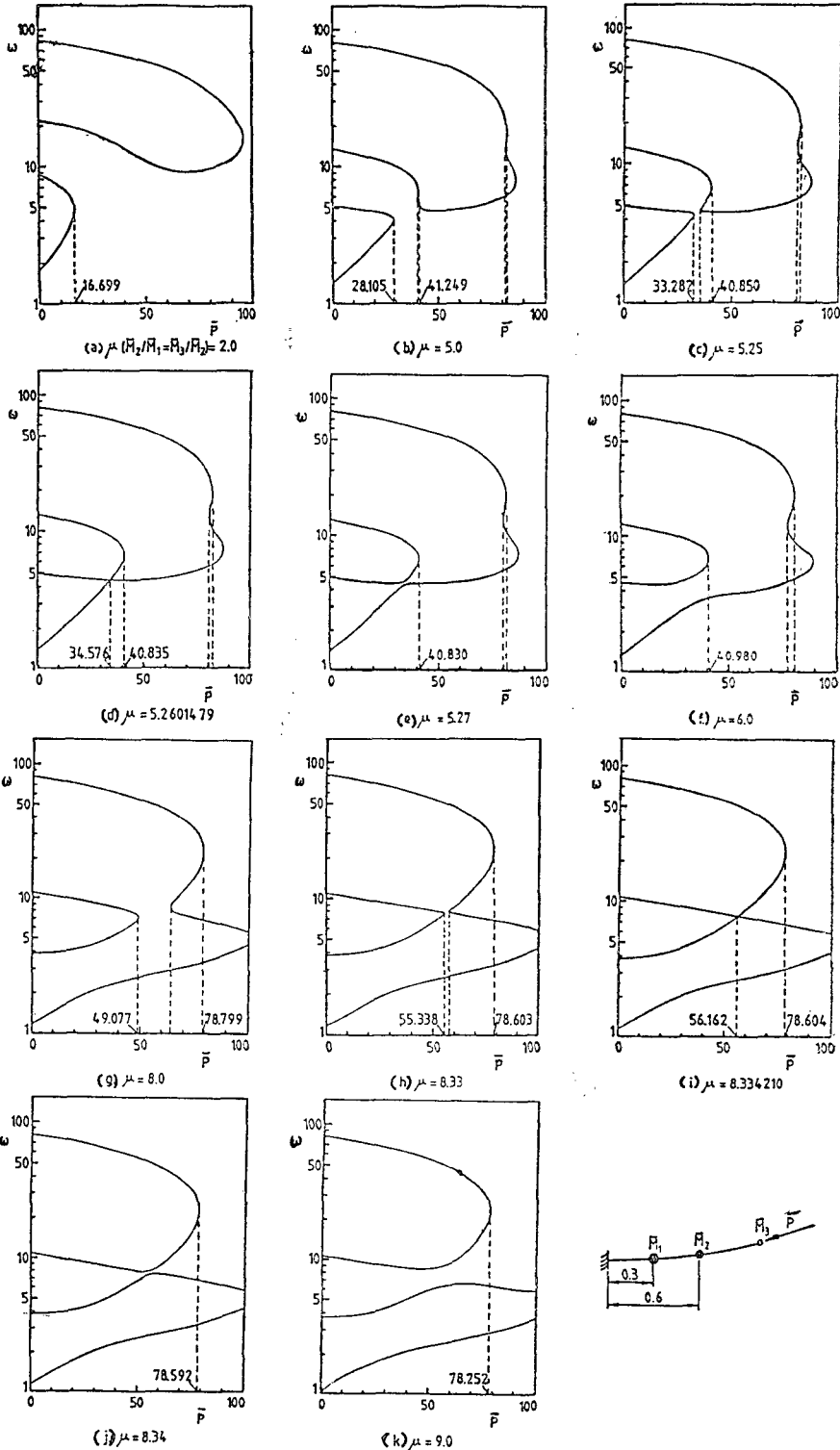


Fig. 8 Dependence of the first four eigenvalues upon \bar{p}

고려하지 않은 2 자유도계 모델이며, 본 연구에서는 분포질량을 고려한 다자유도계 모델이다. Oran⁽¹⁵⁾의 결과에 의하면 $\bar{M}_1/\bar{M}_2 < 8.264$ 인 경우 계의 불안정성은 하중의 증가에 따라 안정, 플러터 불안정, 발산형 불안정, 순으로 일어나며, $\bar{M}_1/\bar{M}_2 > 8.264$ 인 경우는 발산형 불안정만 일어난다. 그러나 본 연구에서는 \bar{M}_1/\bar{M}_2 의 모든 값에서 안정, 플러터 불안정, 발산형 불안정 순으로 일어난다. 그리고 $\bar{M}_1/\bar{M}_2 < 7.971$ 일 때 플러터하중은 첫번째와 두번째 고유치의 일치에 의해 일어나며, $\bar{M}_1/\bar{M}_2 > 7.971$ 일 때는 플러터하중은 두번째와 세번째 고유치의 일치에 의해 일어난다. 그리고 이 경우 작은 플러터 불안정 영역이 존재한다. $\bar{M}_1/\bar{M}_2 = 7.971$ 일 때 플러터하중에 불연속이 발생한다. 또한 영역 I는 Oran의 결과는 플러터 불안정 영역이나 본 연구에서는 발산형 불안정 영역이다. 이와 같은 현상의 차이는 연구모델의 차이에서 온 결과이며, Deineko와 Leonov의 모델에서는 세번째 이상의 고유치가 계의 불안정 현상에 미치는 영향을 관찰할 수 없기 때문이다. Fig. 6은 질량비 \bar{M}_2 의 변화에 따른 불안정 영역을 나타낸다. \bar{M}_2 의 감소에 따라 플러터 불안정 영역은 증가한다. $\bar{M}_2 = 10000, 10$ 과 1에 대해 플러터하중의 불연속은 각각 $\bar{M}_1/\bar{M}_2 = 7.971, 8.257, 9.360$ 일 때 일어난다. 그러므로, \bar{M}_2 의 감소에 따라 플러터하중의 불연속에 대한 \bar{M}_1/\bar{M}_2 의 값이 커진다. 또한 \bar{M}_2 의 감소에 따라 불연속에서의 플러터하중 P_F 는 감소한다.

Fig. 7은 3개의 집중질량이 있는 보의 경우 플러터하중에 대한 하나의 집중질량의 위치의 영향이다. 이 결과는 Fig. 4와 정성적으로 같은 결과이다. Fig. 8은 3개의 집중질량을 갖는 보에 중동력 β 와 가장 작은 4개의 고유치 $\omega_i (i=1, 2, 3, 4)$ 와의 관계이다. 이 모델은 집중질량 위치는 고정되어 있으며 집중질량비 $\mu (= \bar{M}_1/\bar{M}_2 = \bar{M}_2/\bar{M}_3)$ 는 변화한다. Fig. 8(a)~(d)에서 첫번째 플러터하중은 첫번째와 두번째 고유치의 일치에 의해 일어난다. 그리고 Fig. 8(a)~(d)에서 보는 바와 같이 이 하중이상의 값에서 2개의 작은 안정영역이 존재한다. 첫번째 작은 안정영역은 $\mu = 5.2601479$ 까지 증가한다. 이 집중질량비에서 플러터하중의 점프현상이 생긴다. 점프현상에 의한 플러터하중의 불연속은 첫번째와 두번째 고유치의 일치에 의해 얻어지는 플러터하중이 두번째와 세번째 고유치의 일치에 의해 얻어짐으로써 발생된다. Fig. 8(e)에서 플러터하중은 두번째와 세번째 고유치의 일치에 의해 얻어진다. 같은 현상에 의해 [Fig. 8(f)~(i)] 두번째 작은 안정영역 $\mu = 8.334210$ 까지 증가하며, 이 값에서 플러터하중의 불연속이 존

재한다. Fig. 8(j)~(k)에서 플러터하중은 세번째와 네번째 고유치의 일치에 의해 얻어진다. Fig. 9는 위의 관찰에서 얻어진 플러터하중에 대한 집중질량비의 영향이다.

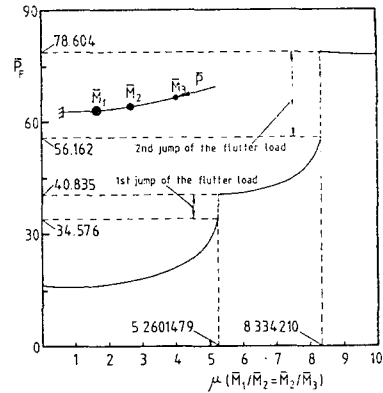


Fig. 9 Instability curve ($\bar{M}_3=0.5, a_1=0.3, a_2=0.6, a_3=1.0$)

4. 결 론

- (1) 모든 경우, 불안정현상은 플러터형 불안정이다.
- (2) 하나의 집중질량을 갖는 보의 경우 최대 플러터하중은 질량비의 증가에 따라 증가하며 집중질량의 최적위치는 질량비의 감소에 따라 $a=0.5$ 에서 자유단쪽으로 이동한다.
- (3) 두개의 집중질량을 갖는 보의 경우 집중질량비에 대한 플러터하중의 불연속은 단지 한번 존재하며, 플러터하중의 불연속의 \bar{M}_1/\bar{M}_2 의 값은 집중질량과 분포질량의 질량비의 증가에 따라 증가한다.
- (4) 세개의 집중질량을 갖는 보의 경우 집중질량비에 대한 플러터하중의 불연속은 두번 존재하며, 첫번째 불연속에 있어서 플러터하중의 아래값은 첫번째와 두번째 고유치의 일치에 의해 얻어지며, 윗값은 두번째와 세번째 고유치의 일치에 의해 얻어진다. 두번째 불연속에 있어서 플러터하중의 아래값은 두번째와 세번째 고유치의 일치에 의해 얻어지며, 윗값은 세번째와 네번째 고유치의 일치에 의해 얻어진다.

References

(1) Nikolai, E.L., "On the Stability of the Rectilinear Form of Equilibrium of a Bar in Compression and Torsion," Izv. Leningr. Poltekhn, in-ta, 31,

1928

- (2) Bolotin, V.V., *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability*, Pergamon Press, New York, 1963
- (3) Herrmann, G., "Stability of Equilibrium of Elastic Systems Subjected to Nonconservative Forces", *Appl. Mech. Rev.* Vol. 20, pp.103~108, 1967
- (4) Leipholz, H., *Stability of Elastic System*, Sijthoff & Noordhoff, 1980
- (5) Ziegler, H., "Linear Elastic Stability", *ZAMP*, Vol. 4, pp.89~121, 168~185, 1953
- (6) Ziegler, H., "On the Concept of Elastic Stability", *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 4, Academic Press, New York, pp.351~403, 1956
- (7) Beck, M., "Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes", *ZAMP*, Vol. 3, pp.225~228, 1952
- (8) Pflüger, A., "Zur Stabilität des tangential gedrückten Stabes", *ZAMM*, Vol. 35, p.191, 1955
- (9) Deineko, K.S. and Leonov, M.Ia., "A Dynamic Method for the Investigation of the Stability of a Compressed Bar", *Prikl. Mat. Mekh.*, Vol. 19, pp.738~744, 1955
- (10) Kordas, Z. and Zyczkowski, M., "On the Loss of Stability of a Rod under a Super-Tangential Force", *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, Vol. 15, pp.7~31, 1963
- (11) Leipholz, H. and Linder, G., "Über den Einfluss Massenverteilung auf das nichtkonservative Knicken von Staben", *Ing. Arch.*, Vol. 39, pp.187~194, 1970
- (12) Karpoor, R.N. and Leipholz, H., "Stability Analysis of a Damped Polygenic System with Relocatable Mass Along its Length", *Ing. Arch.*, Vol. 43, pp.233~239, 1974
- (13) Kounadis A.N., "Stability of Elastically Restrained Timoshenko Cantilevers with Attached Masses Subjected to a Follower Force", *J. Appl. Mech.*, Vol. 44, pp.731~736, 1977
- (14) Kounadis, A.N. and Katsikadelis, J.T., "On the Discontinuity of the Flutter Load for Various Types of Cantilevers", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 16, pp.375~383, 1980
- (15) Oran, C., "Some Observations on Nonconservative Problems of Elastic Stability", *J. Appl. Mech.* Vol. 37, pp.671~676, 1970
- (16) Saito, H. and Sasaki, M., "On the Dynamic Stability of a Stepped Beam Subjected to a Compressive Force", *Trans. Japan Soc. Mech. Engr.*, Vol. 49, No. 448, pp.2149~2154, 1983