

<論 文>

비균질체의 혼합상태에 대한 Walsh 해석과 응용

박 진 무*

(1985년 12월 2일 접수)

Walsh Analysis of the State of Mixture in Heterogeneous Media and its Application

Jin Moo Park

Key Words: Heterogeneous Medium(비균질체), Volume Distribution(체적디스트리버션), Walsh Function(Walsh 함수), Impormation Content(정보내용), Porous Solid(다공성 고체), Spherical Model(구형모델)

Abstract

Walsh analysis is applied to the numerical specification of the volume distribution which is the key parameter in the formulation of the constitutive equations of heterogeneous media, indicating the geometrical state of the mixture.

An example of two-dimensional volume distribution, its approximation, and the Walsh correlation coefficients are presented and the change of the information distribution in the operations is investigated.

The phenomena of information concentration upon the large-scale Walsh coefficients are applied to the volumetric response of porous solids, clarifying the validity of the spherical-model calculation.

1. 서 론

서로 다른 물질의 혼합으로 구성되는 비균질체의 거동은 각 구성원의 거동과 혼합의 기하학적 상태로 결정된다고 할 수 있다. 구성원은 대체로 균질체로서 그 개별적 거동은 비교적 잘 알려져 있는 반면 혼합상태의 해석은 그 기본변수의 설정부터 미흡한 것으로 보

인다. 예를 들면 구성입자의 분포, 크기, 체적비, 연결도, 굴곡도등이 널리 사용되고 있으나⁽¹⁾, 체적비를 제외한 다른 변수들은 객관적으로 정의하기가 곤란하여 측정방법에 따라서 상호관계를 찾기 어려운 여러가지 값을 줄 수 있다. 그러므로 이와 같은 변수들을 기초로한 이론적 해석이나 실험결과는 종합하기 어렵고 그 응용에 여러 제한성이 따르게 된다. 이와 같은 문제점은 혼합상태에 관한 많은 정보를 단순히 몇개의 숫자로 표시하려는데 기인한다고 생각되므로, 더 체계

* 정회원, 고려대학교 공과대학 기계공학과

적인 분석과 종합이 요구된다고 할 수 있다.

이 연구에서는 구성원의 분포를 명확히 지시하는 체적 distribution⁽²⁾을 기본으로하고 Walsh 해석⁽³⁾을 적용함으로써 혼합상태를 일련의 수치로 표시한다. 이 변환과정에서 정보량의 분포가 변하는 현상을 고찰한 후 그 특징을 비균질체의 단순한 형태인 다공성고체의 체적변화거동에 응용하여, 현재 통용되는 구형모델해석⁽⁴⁾의 이론적 근거를 밝힌다.

2. 체적 Distribution의 Walsh 변환

비균질체의 대표체적을 V , 구성원 C_1, C_2 가 차지하는 공간을 각각 V_1, V_2 라 하면, V_1 은 다음과 같은 체적 distribution으로 명시된다.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in V_1 \\ 0, & x \notin V_1 \end{cases}$$

두 구성원 사이의 경계층을 무시하면, V_2 는 V_1 과 상보관계 ($V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \emptyset$)이므로 $1 - \varphi$ 로써 결정된다. 그러므로 2상물체의 혼합상태는 φ 만으로 표시된다.

비균질체에 관한 보존법칙들을 정립하는데는 체적 distribution φ 의 평균치 φ^* (체적비)만으로 그 형태적 특징을 반영시킬 수 있다⁽²⁾. 그러나 구성방정식들은 에너지 같은 가산적(additive) 양의 보존에 관한 경우와 달리 구성원의 거동함수들을 고차적으로 조합해야 하므로 φ 에 대한 더 많은 정보가 필요하다.

편의상 Fig. 1과 같이 단위길이를 갖는 정사각형 대표체적의 예를 고찰한다.

$\varphi(x, y)$ 는 두 구성원의 혼합상태를 개념적으로 완전하게 표시하지만, 인공적 복합체와 같은 규칙적 배열을 제외하면, $\varphi(x, y)$ 의 구체적 표현은 매우 복잡하다. 그

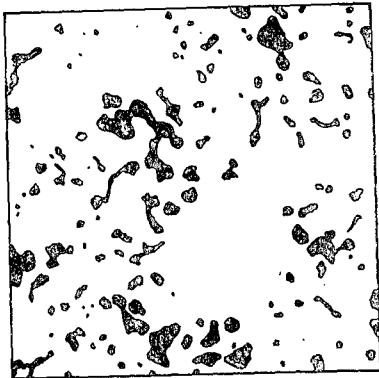


Fig. 1 Schematic illustration of a 2-dimensional representative volume element. Black areas represent constituent 1, white areas 2

러므로 이 연구에서는 먼저 Walsh 해석을 적용하여 $\varphi(x, y)$ 를 정돈된 일련의 수치로 표시한다⁽⁵⁾.

Walsh 함수 $WAL(i, x)$ 는 다음과 같이 축차적으로 정의된다⁽³⁾.

$$WAL(2j+q, x) = (-1)^{j(j+1)/2+q} \left\{ WAL\left[j, 2\left(x + \frac{1}{4}\right)\right] + (-1)^{j+q} WAL\left[j, 2\left(x - \frac{1}{4}\right)\right] \right\}$$

$q=0$ 또는 $1, \quad j=0, 1, 2, 3, \dots,$

$$WAL(0, x) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0, & x < -\frac{1}{2}, \quad x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

여기서 $[j/2]$ 는 $j/2$ 보다 작거나 같은 최대정수이다. 참고로 8개의 Walsh 함수를 Fig. 2에 도시한다.

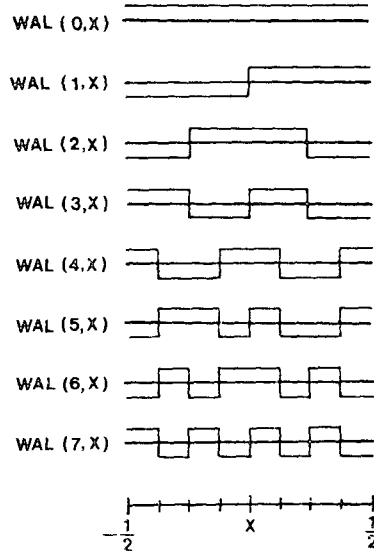


Fig. 2 Examples of walsh function

Walsh 함수계는 완전직교함수계이므로

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} WAL(i, x) WAL(j, x) dx = 0, \quad i \neq j \quad (3)$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [WAL(i, x)]^2 dx = 1, \quad i=0, 1, 2, \dots$$

또,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} WAL(i, x) dx = \begin{cases} 1, & i=0 \\ 0, & i=1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4)$$

2차함수 $\varphi(x, y)$ 를 급수전개하기 위하여 Walsh 함수의 Cartesian 적 $f_{i,j}(x, y)$ 를 구하면,

$$f_{i,j}(x, y) = WAL(i, x) WAL(j, y).$$

$f_{i,j}$ 도 완전직교함수계이므로, 체적 distribution $\varphi(x, y)$ 는 다음과 같이 무한급수로 전개된다.

$$\varphi(x, y) = c_{0,0} f_{0,0} + c_{1,0} f_{1,0} + c_{0,1} f_{0,1} + \dots + c_{i,j} f_{i,j} + \dots \quad (5a)$$

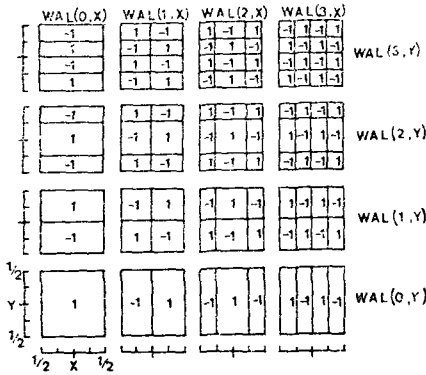


Fig. 3 Walsh functions $WAL(i, x)WAL(j, y)$

$$c_{i,j} = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \varphi(x, y) f_{i,j}(x, y) dx dy \quad (5b)$$

윗식에서 계수 $c_{i,j}$ 는 2상물체의 혼합상태 $\varphi(x, y)$ 를 2차원 Walsh 함수 $f_{i,j}(x, y)$ (Fig. 3 참조)에 비교하여 그 특성을 한개의 수치로 종합한 상관계수에 해당한다. 따라서 혼합상태는 Walsh 해석을 통하여 수열 $(c_{0,0}, c_{1,0}, c_{0,1}, c_{2,0}, \dots)$ 로 변환될 뿐 아니라, 큰 스케일의 기하학적 특징을 표현하는 상관계수 ($i+j$ 의 값이 작은 것)로부터 세부적 특성계수 ($i+j$ 의 값이 큰 것)까지 순서있게 정돈된다. 또한 계수 $c_{i,j}$ 들은 Parseval의 항등식 (6)으로 구속된다.

$$A = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} [\varphi(x, y)]^2 dx dy = c_{0,0}^2 + c_{1,0}^2 + \dots + c_{i,j}^2 + \dots \quad (6)$$

윗식에서 A 는 제 1구성원 C_1 이 차지하는 면적이다.

3차원 대표체적의 경우는 위 해석의 단순한 연장으로 그 상관계수들을 구할 수 있다.

3. 근사적 체적 Distribution과 유한 Walsh 해석

제 2항의 Walsh 해석을 구체적으로 시행하고 해석과 정에서 정보배분이 어떻게 변하는가 검토한다.

Fig. 1로 표시되는 혼합상태를 전면적의 $1/64$ 까지 분해 감지할 수 있는 계측기로 관찰 종합(C_1 이 반 이상 점유하는 사각형 요소는 $\varphi \equiv 1$, 그 외는 $\varphi \equiv 0$ 으로 함)하면 그 결과는 대략 Fig. 4와 같은 근사체적 distribution $\bar{\varphi}_{i,j}$ 가 된다.

Fig. 1의 $\varphi(x, y)$ 는 각 점을 어느 구성원이 차지하고 있는가 명시하므로 무한한 갯수의 정보를 포함하고 있다. 반면에 Fig. 4의 $\bar{\varphi}_{i,j}$ 는 64 비트의 정보만으로 그

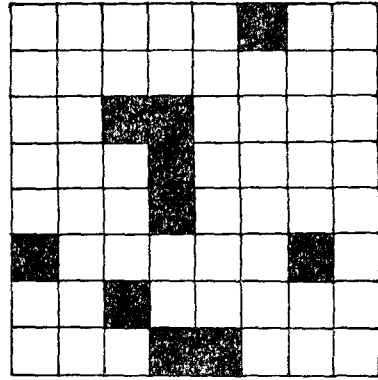


Fig. 4 Approximate volume distribution $\bar{\varphi}_{i,j}$ corresponding to Fig. 1

혼합상태를 대략 표시하며, 계기의 분해능력을 높이면 세부적 형태까지 묘사할 수 있다.

Table 1 Walsh coefficients $C_{i,j} (\times 64)$ representing the volume distribution in Fig. 4

7	0	2	-4	2	4	-2	4	2
6	-4	-2	0	-2	0	2	0	-2
5	0	2	-4	2	-4	-2	-4	2
4	0	2	4	2	4	-2	4	-6
3	2	-4	6	-4	2	4	2	0
2	2	-4	-2	-4	2	-4	2	0
1	-2	0	2	0	-2	0	-2	-4
0	10	-4	6	-4	2	-4	2	0
	$i=0$	1	2	3	4	5	6	7

한편 $\bar{\varphi}_{i,j}$ 를 Walsh 변환하면 유한급수로 전개되며, 그 상관계수들은 Table 1과 같다. 반대로 이 64개의 상관계수들을 알면 식 (5b)에 의하여 $\bar{\varphi}_{i,j}$ 를 구성할 수 있으므로 Table 1은 모두 64 비트의 정보를 내포한다.

그러나 Fig. 4와 Table 1의 총정보량은 같은 반면 그 배분은 서로 다르다. 즉 Fig. 4에서는 개개의 정사각형 요소를 어느 구성원이 차지하는가 ($\bar{\varphi}_{i,j} = 1$, 혹은 0)하는 독립된 극소적 정보를 제공하므로, 개별적인 값 $\bar{\varphi}_{i,j}$ 의 정보내용은 1 비트로 균일하다. 반면에 Table 1의 큰 스케일에 관한 계수는 세부적 형태에 관해서도 부분적 정보를 내포하므로, $i+j$ 값이 작은 계수는 $i+j$ 값이 큰 것보다 정보내용이 더 많다. 예를 들면 Table 1에서와 같이 $c_{0,0} (\times N)$ 의 값이 r 인 것만 알고, 즉 N 개의 요소중 r 개만 제 1구성원이 차지함을 알고, 주

측으로 Fig. 4 와 같은 구체적 형태 $\bar{\varphi}_{i,j}$ 를 맞출 가능성, 즉 조건부 확률 $P\{\bar{\varphi}_{i,j}|c_{0,0}=r\}$ 은 $1/C_r^N$ 이 되며, 계수값을 하나도 모르고 맞출 확률 $P\{\bar{\varphi}_{i,j}\}$ 는 $1/2^N$ 이다. 그러므로 $c_{0,0}$ 값이 r 이라는 사실이 구체적 형태 $\bar{\varphi}_{i,j}$ 의 결정에 기여하는 정보내용 $I(\bar{\varphi}_{i,j}; c_{0,0}=r)$ 은 다음 식으로 계산된다⁽⁶⁾.

$$I(\bar{\varphi}_{i,j}; c_{0,0}=r) = \log_2 \frac{P\{\bar{\varphi}_{i,j}|c_{0,0}=r\}}{P\{\bar{\varphi}_{i,j}\}} = \log_2 \frac{2^N}{C_r^N} \quad (7)$$

Fig. 4 의 구체적 예에서는 $N=64$, $r=10$ 이므로 $c_{0,0}$ 의 정보내용은 26.9 비트로서 전체정보의 45%에 해당한다. 이와 같은 정보집중현상은 $c_{0,0}$ 의 값이 0에 접근할수록 심화되어 6이면 59%, 3이면 76%가 된다. $c_{0,0}$ 값이 0이면 모든 정보를 독점하여 기타 63개의 계수는 아무런 정보내용도 포함하지 않는다. 이것은 균질체의 경우이므로 당연한 결과이다.

비균질체의 구성방정식을 구체적으로 정립하기 위해서는 체적 distribution의 주요정보 추출이 필수적인데, 위와 같은 정보집중현상은 4항에 검토되는 것과 같이 그 정립단계에서 매우 유용하게 된다.

4. 다공성 고체의 압력-체적변화 거동에 관한 검토

앞에서 전개한 해석을 구체적인 구성방정식의 정립에 응용하는 예로서, 암석이나 소결알미늄과 같은 다공성 고체의 압력-체적변화 거동을 검토한다. 이들 다공성 고체는 영역 V_1 이 비어 있고 V_2 는 고체물질이 차지하는 단순한 비균질체로 볼 수 있다.

Carrroll 등^(4,7)은 고체와 동공의 압착(compaction)을 구분하여 다음 두 단계로 구성방정식을 설정하였다.

$$P = F(\varphi^*), \quad (8a)$$

$$P_s = G(V_2^*) \quad (8b)$$

윗식에서 V_2^* 는 영역 V_2 의 체적이며, P 및 P_s 는 각각 다공성 고체 전반에 관한 평균압력 및 고체체적의 평균압력으로서 다음 관계식을 만족한다.

$$(V_1^* + V_2^*)P = V_2^*P_s \quad (9)$$

구성방정식 (8b)는 비교적 잘 알려져 있으므로 식 (8a)의 구체적 결정이 문제가 된다.

Fig. 5는 다공성 응회암(tuff)으로 실험하여 얻은 $P-\phi^*$ 관계와 이론적 계산을 비교한 것인데 문헌(7)에서 전제한 것이다. 여기서 이론적 결과는 응회암 시편과 같은 ϕ^* 값을 갖는 중심 중공구(hollow sphere)에

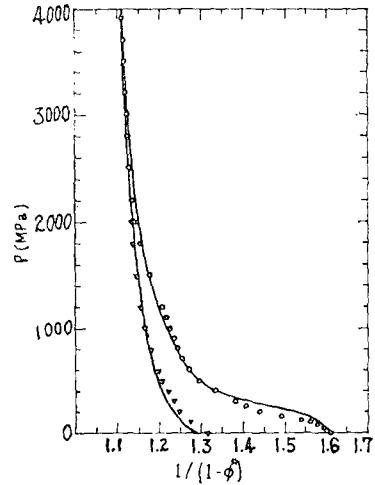


Fig. 5 Spherical model prediction(solid line) and experimental data (○; loading, ▽; unloading) for porous tuff (from [7])

정수압을 주어 압착하는 구형모델을 가정하여 계산하므로서 얻은 것이다.

즉, 평형조건식

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0,$$

경계조건

$$r=a(\text{내반경}) \text{에서 } \sigma_{rr}=0$$

$$r=b(\text{외반경}) \text{에서 } \sigma_{rr}=-P,$$

및 Mohr-Coulomb 항복조건

$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = Y_s - \beta_s \sigma_{rr} (Y_s, \beta_s; \text{재료의 항복계수})$ 에서 구한 것이다.

Fig. 5에 보이는 것과 같이 이 계산결과는 실험과 매우 잘 일치하나 다음 두가지 의문점에 대한 설명은 제시되지 않고있다. 첫째, 식 (8a)에서 φ 대신 φ^* 만을 변수로 취해도 충분한가, 둘째, 응회암 시편은 미소한 동공이 무작위로 분포되어 있으므로⁽⁸⁾ 이론적 모델과 일견 큰 차이가 있는데도 왜 두 결과가 잘 맞는가 하는 점이다.

이에 관한 설명은 Walsh 상관계수들을 검토하여 얻을 수 있다. 먼저 구좌표에서 체적요소 dV 는 $r^2 \sin \beta dr d\alpha d\beta$ 이므로, 반경방향 선분을 r^3 값 기준으로 나누어 3차원 Walsh 함수 $g_{i,j,k}$ 를 결정하면,

$$g_{i,j,k}(r, \alpha, \beta) \equiv \text{WAL}(i, r^{1/3}) \text{WAL}(j, \alpha/2\pi) \text{WAL}(k, \beta/2\pi), \quad (0 \leq r \leq 1, 0 \leq \alpha \leq 2\pi, 0 \leq \beta \leq \pi) \quad (10)$$

응회암 시편의 상관계수 $d'_{i,j,k}$ 는

$$d'_{i,j,k} = \int_{\beta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \phi' g_{i,j,k} r^2 \sin\beta dr d\alpha d\beta. \quad (11)$$

$\phi'(r, \alpha, \beta)$ 의 기하학적 형태는 미세한 동공이 무작위로 분포되어 전체적 구조는 r, α, β 와 특정한 관계가 없으므로 큰 스케일 상관계수(대체로 $3/(i+j+k)$ 값이 동공의 평균크기에 근접할 때까지)의 값은 식(4)에 의하여 모두 0이 된다. 그러나 작은 스케일 상관계수들은 크랙같은 세부적 형태를 반영하는 특정값을 가질 것이다.

반면에 구형모델의 ϕ^* 은 r 만의 함수이므로 식(4)에 의하여 $d^{*}_{i,0,0} (i=1, 2, 3, \dots)$ 을 제외한 모든 계수들의 값이 0이 된다. 그러므로 $d'_{i,j,k}$ 군과 $d^{*}_{i,j,k}$ 군을 비교하면 매우 근접함을 알 수 있다. 즉 전체적을 512 (=8³)개의 요소로 분할했을 때 두 군은 8개의 계수에서만 서로 다르고 나머지 504개에서는 일치한다고 볼 수 있다. 또 초기에 $d'_{0,0,0} (=d^{*}_{0,0,0})$ 의 값이 Fig. 5에서 0.38이므로 그 정보내용은 33 비트(전체의 6.5%)이고, 일치하는 다른 계수들의 정보량 까지 고려하면 서로 다른 계수들의 정보내용은 그 상대적 비중이 매우 작게 된다. 또한 압착과정에서 ϕ^* 를 제외한 다른 일치계수들은 계속 0의 값을 가지므로, 구성방정식에서 식(8a)과 같이 ϕ^* 만을 변수로 취할 수 있다.

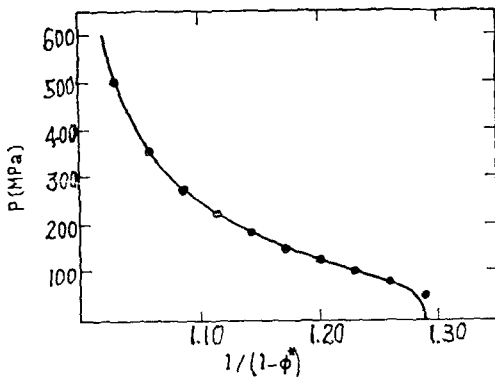


Fig. 6 Spherical model prediction(solid line) and experimental data(dots) for porous aluminum (from [7])

또 Fig. 5에서 압착이 진행될수록 실험과 이론이 더 잘 맞는 것은 ϕ^* 값이 감소하면서 정보집중현상이 가중되는 효과와, 크랙 같은 동공의 첨단에 응력이 집중되어 항복이 일어나고 그 결과 미시적 특성도 구형모델에 접근하는 영향으로 볼 수 있다. 이와 같은 설명은 Fig. 6에 보이는 다공성 알루미늄피의 경우⁽⁹⁾ 더 분명해진다.

이 경우 초기의 ϕ^* 값은 0.23이므로 정보량은 109 비트로서 전체의 21.3%가 집중되어 있다. 또 알루미늄

분말을 소결하여 제조하는 과정에서 크랙과 같은 결에 형태가 거의 제거되므로⁽¹⁰⁾ 압착과정 초기부터, 응회암의 경우보다 이론과 실험이 더욱 잘 맞는다고 볼 수 있다.

앞에서 $d_{i,0,0} (i=1, 2, 3, \dots)$ 값들이 시편과 모델에서 서로 다른 것은 모델의 경우 동공이 중심쪽에 집중되어 있는 반면 시편은 반경방향에 균일분포하기 때문이다. 이 같은 상이점의 정보량은 체적의 분포만을 개략적으로 고려할 경우 그 비중이 작으나, 표면적과 같은 다른 측면을 고려하면 그 차이가 크며 이 같은 차이가 시각적으로 종합 감지된다고 할 수 있다. 따라서 표면 효과가 중요한 문제의 해석에서는 Walsh 해석의 응용과 모델설정에 주의를 요한다.

5. 결 론

비균질체의 혼합상태를 합리적으로 묘사 및 분석하기 위하여 구체적 경우를 대상으로 Walsh 해석을 적용하고 응용한 결과 다음 사항을 추출할 수 있다.

혼합상태를 명확히 지시하는 체적 distribution은 Walsh 해석 과정을 통하여 혼합상태의 기하학적 스케일의 크기에 따라 정돈된 일련의 수치로 변환된다.

이 변환과정에서 혼합상태에 관한 정보의 배분이 바뀌어 큰 스케일 관련계수 편으로 정보가 집중되므로 혼합상태를 근사적으로 종합묘사하는데 매우 효율적이다.

다공성 고체의 압력-체적변화 관계에서 실험결과와 동심 구형모델에 의한 계산이 잘 일치하는 이유는 시편과 모델이, 외견상의 차이에도 불구하고, 체적의 분포라는 측면에서는 매우 유사하다는 Walsh 해석 결과에서 찾을 수 있다. 한편 표면적과 같은, 다른 측면에서는 동심구형모델이 시편과 큰 차이가 있으므로 그 효용성이 제한될 것이 예상된다.

참 고 문 헌

- (1) A.E. Scheidegger, The Physics of Flow through Porous Media, University of Toronto Press, 1974
- (2) K.G. Beauchamp, Applications of Walsh and Related Functions with an Introduction to Sequence Theory, Academic Press, 1984
- (3) 박진무, 비균질체의 역학적 및 열적 거동에 관한 기초해석, 대한기계학회논문집, 제 8권, 제 6호 pp. 599~603, 1984

- (4) M.M. Carroll, Mechanical Response of Fluid-Saturated Porous Materials, in Theoretical and Applied Mechanics, (ed, F.P.J. Rimrott), pp. 251~262, North-Holland, 1980
- (5) J.M. Park, A Continuum Theory of Heterogeneous Media, Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, 1983, Chapter 5, pp.46~66
- (6) F.M. Reza, An Introduction to Information Theory, p. 104, McGraw-Hill, 1961
- (7) J.J. Bhatt, M.M. Carroll and J.F. Schatz, A Spherical Model Calculation for Volumetric Response of Porous Rocks, J. Appl. Mech, Vol. 42, p. 363, 1975
- (8) H. Williams, et al, Petrography, p. 151, Freeman 1955
- (9) B.M. Butcher, M.M. Carroll and A.C. Holt, Shock Wave Compaction of Porous Aluminum J. Appl. Physics, Vol. 45, p. 3864, 1974
- (10) A.S.M. Metal Handbook, 8th ed. Vol. 8, p. 210, 1973