

<論 文>

좌표변환에 의한 상변화 과정의 수치해석

유 호 선* · 노 승 탁**

(1986년 5월 13일 접수)

Numerical Analysis of the Phase Change Processes
by Coordinate Transformations

Ho Seon Yoo and Sung Tack Ro

Key Words: Phase Change Problems(상변화문제), Coordinate Transformations(좌표변환),
Boundary-Fitted Coordinates(경계밀착좌표계), Moving Boundary Problems(이동
경계문제)

Abstract

A numerical method which can be used to predict 2-dimensional phase change processes with natural convection in the melt is presented. Difficulties associated with movement and irregular shape of the solid-liquid interface have been overcome by adopting the time-dependent Boundary-Fitted Coordinate System. Transformed governing equations, which are cast in geometrically conservative forms, can be solved by extending the computational procedures originally developed for the orthogonal coordinates to the nonorthogonal curvilinear coordinates. Numerical simulations have been performed for the melting process in the isothermally heated horizontal tube. Comparisons of the results with previous works show that the present method gives numerically stable solutions and is versatile tool for investigations of 2-dimensional phase change processes.

기 호 설 명

- | | |
|-----------------------|---------------------------------|
| c : 비 열 | m : 용해 질량비 |
| $ Fo$: Fourier 수 | $ Nu$: 평균 Nusselt 수 |
| $ f$: 대표종속변수 | $ n$: 법선 방향 |
| $ g$: 중력가속도 | $ Pr$: Prandtl 수 |
| $ h_f$: 용해잠열 | $ R$: 원관의 반경 |
| $ J$: 좌표변환의 Jacobian | $ Ra$: Rayleigh 수 |
| | $ S, S'$: 방정식의 생성항 |
| | $ Ste$: Stefan 수 |
| | $ T, T_f, T_w$: 온도, 융점온도, 가열온도 |

* 서울대학교 대학원, 현재 한국과학기술원 기계공학부
** 정회원, 서울대학교 공과대학 기계공학과

- t : 시 간
- (u, v) : 유체속도 성분
- Vn : 상변화면의 이동속도
- (x, y) : 직교좌표축

회합문자

- α, β, γ : Metric 계수
- α_1 : 액체의 열확산 계수
- β_T : 액체의 열팽창 계수
- Γ_i : 영역의 경계
- θ : 무차원 온도
- ν : 동점성 계수
- (ξ, η) : 변환된 좌표축
- τ : 무차원 시간
- ϕ, χ : 격자배치와 관련된 함수
- ψ : 유동함수
- ω : 와 도

하첨자

x, y, ξ, η, τ : 편미분을 표시

1. 서 론

상변화 문제는 보통 고상 및 액상이 관련된 응해 및 응고과정에서 일어나는 열전달 특성을 지칭하며 구조, 축열, 온도조절, 식품가공, 용접, 극지개발등 공학 기술적인 분야 및 자연현상과 관련하여 활발히 연구되고 있다.

그러나 이 문제는 열전달의 진행에 따라 고체-액체의 경계면, 즉 상변화면이 이동하며 상변화면의 거동이 해의 일부로서 결정되어야 하는 이동 경계 문제 (moving boundary problem)로서 해석적인 해를 얻기는 대단히 어렵다. 더우기, 액상내의 주도적인 열전달 형태가 순수전도가 아닌 자연대류라는 사실이 실험적으로 입증^(1,2)됨으로써 자연대류가 상변화 과정해석에 포함되어야 하며 자연대류의 효과로 상변화면이 불규칙형상이 되므로 정량적인 해석을 위해서는 수치적인 방법에 의존하여야 한다. 좌표변환등을 이용한 여러가지 수치해석 방법⁽³⁾이 발표되고 있으나 적용범위가 제한적이거나 결과의 신뢰성이 결여되는 등 일반적인 방법은 아니다.

본 연구에서는 시간의존 Boundary-Fitted 좌표계의 좌표변환을 이용하여 자연대류를 고려한 임의 형상에서의 2차원 상변화 문제를 해석하는 안정성 있는

수치해석 방법을 제시하고자 한다.

2. 해석의 모델 및 지배방정식

해석의 방법을 제시하는 것이 목적이므로, 실험 및 수치해로서 결과가 비교적 잘 알려진 수평원판내의 2차원 응해과정을 해석의 모델로 취하였으며 임의 형상에 대한 확장은 경계조건 등을 수정함으로써 가능하다.

Fig. 1에 보인 것과 같이 초기에는 고체상태인 상변화물질이 용점온도 T_* 로 채워져 있으며 시간 $t=0$ 에서 외벽을 T_* 보다 높은 온도 T_w 로 유지, 가열하면 벽면주위에서부터 상변화가 일어나고 상변화의 진행에 따라 액상내의 온도구배에 의해 자연대류가 발달하게 된다. 고체는 용점온도로 유지되므로 고상내의 열전달은 고려하지 않으며 해석의 단순화를 위하여 다음의 가정을 도입하였다.

- 액체는 비압축성, Newton 유체로서 층류운동이다.
- 고체-액체 사이의 밀도변화는 없다.
- 점성소산은 무시하고 Boussinesq 근사가 성립한다.

직교좌표계 상에서 액상내의 자연대류를 고려한 열전달을 지배하는 방정식을

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = u, \quad -\frac{\partial \phi}{\partial x} = v \tag{1a, b}$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2}$$

와 같이 정의된 와도 ω , 유동함수 ϕ 의 향으로 표시하면

$$Ste \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial u \omega}{\partial x} + \frac{\partial v \omega}{\partial y} = Pr \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + Ra \cdot Pr \frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{3}$$

$$-\omega = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \tag{4}$$

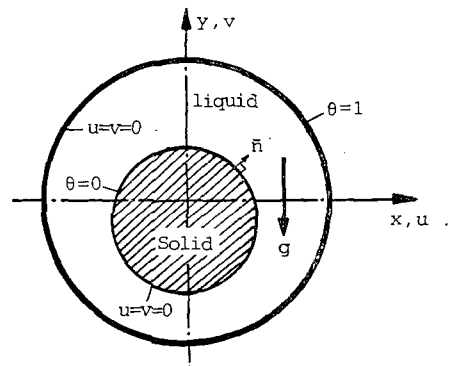


Fig. 1 Physical model

$$Ste \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial u \theta}{\partial x} + \frac{\partial v \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (5)$$

가 된다⁽⁴⁾. 식 (3)~(5)는 편미방 무차원화된 형태로 표시하였으며 무차원변수 및 파라미터들은 아래와 같이 정의된 것이다.

$$(x, y) = (x, y)^* / R, \tau = Ste \cdot Fo \quad (6a, b)$$

$$(u, v) = (u, v)^* R / \alpha_i, \theta = (T - T_f) / (T_w - T_f) \quad (6c, d)$$

$$\omega = \omega^* R^2 / \alpha_i, \phi = \phi^* / \alpha_i \quad (6e, f)$$

$$Pr = \nu / \alpha_i, Ra = \beta \tau g R^2 (T_w - T_f) / \alpha_i \nu$$

$$Ste = c(T_w - T_f) / h_f, Fo = at / R^2 \quad (6g, h, i, j)$$

여기서, 상첨자 *는 차원을 가진량을 표시한다.

경계를 Fig. 2와 같이 구분할 때 Γ_1, Γ_3 은 대칭면, Γ_2 는 상변화면, Γ_4 는 가열벽면이 되며 각각의 경계조건을 무차원 형태로 표시하면

$$\Gamma_1, \Gamma_3 : u=0, \frac{\partial v}{\partial n}=0, \frac{\partial \theta}{\partial n}=0 \quad (7a, b, c)$$

$$\Gamma_2 : u=v=0, \theta=0 \quad (8a, b, c)$$

$$\Gamma_4 : u=v=0, \theta=1 \quad (9a, b, c)$$

이며 속도 u, v 의 향으로 주어진 경계조건은 좌표변환 후 ω, ϕ 로 표시하는 것이 편리하다. 상변화면 Γ_2 의 이동속도는 에너지 균형식으로부터

$$V_n = -\frac{\partial \theta}{\partial n} \quad (10)$$

이며 여기서 n 은 Γ_2 의 법선방향을 표시한다.

3. 좌표 변환

3.1 Boundary-Fitted 좌표계

앞에서 기술한 상변화 문제는 경계의 이동, 경계형상의 불규칙성, 이동경계에서 경계조건 중요성 등으로 인하여 고정격자계 상에서 수치 해석을 수행할 경

우 실제경계와 격자점의 불일치로 복잡한 보간 및 근사가 필요하며 해의 정밀도, 안정성은 좋지 않다.

따라서, 이 문제는 이동격자계에서 해석하는 것이 유리하며 이동격자계는 시간의존 Boundary-Fitted 좌표계를 도입하여 생성한다.

Boundary-Fitted 좌표계는 영역의 모든 경계의 부분이 특정좌표선과 일치하는 곡선좌표계로서, 불규칙형상의 실제영역(physical domain)을 규칙적인 형상의 계산영역(computational domain)으로 사상(mapping)하는 것으로 정의되며 실제영역에서 유도된 방정식들은 Boundary-Fitted 좌표계로 변환되어 계산이 용이한 계산영역에서 해석된다. 실제영역이 시간에 따라 변화하는 경우는 매시간마다 좌표계를 다시 생성하며 이때 계산영역은 불변이 되도록 함으로써, 계산영역에서 실제영역의 시간변화의 영향은 Metric 계수의 변화로만 나타난다.

이 좌표계의 생성방법은 여러 종류⁽⁵⁾가 있으며 가장 일반적인 것은 편미분방정식의 해로써 생성하는 수치적인 사상방법이다. Fig. 2에 보인 것과 같은 계산영역의 격자점 (ξ, η) 에 대응하는 실제영역의 점 (x, y) 는 준선형편미분방정식

$$\alpha(x_{\xi\xi} + \phi x_{\xi}) - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma(x_{\eta\eta} + \chi x_{\eta}) = 0 \quad (11a)$$

$$\alpha(y_{\xi\xi} + \phi y_{\xi}) - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma(y_{\eta\eta} + \chi y_{\eta}) = 0 \quad (11b)$$

의 해로서 결정된다. 여기서

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2, \beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta},$$

$$\gamma = x_{\xi}^2 + x_{\eta}^2 \quad (12a, b, c)$$

이며 J 는 변환의 Jacobian 으로서,

$$J = x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi} \quad (13)$$

이다. ϕ, χ 는 격자배치간격과 관련된 함수로서 경계상에서의 격자배치를 통하여 영역내부에서도 필요한 격자배치를 할 수 있으며 식 (11a, b)의 경계조건은 실제영역의 경계상에 배치된 격자점의 (x, y) 좌표이다.

3.2 지배방정식의 변환

계산영역에서 구체적인 계산을 수행하기 위해서는 실제영역에서 유도된 지배방정식 (3)~(5)를 Boundary-Fitted 좌표계, 즉 (ξ, η) 좌표계로 변환하여야 하며 변환관계식의 자세한 유도는 Thames⁽⁶⁾를 참고하기로 한다. Boundary-Fitted 좌표계 뿐만 아니라 다른 종류의 좌표변환시 가장 중요한 것은 변환된 방정식이 물리적인 의미를 갖도록 하는 것이다. Rieger 등⁽⁷⁾의 연구에서 Rayleigh 수가 큰 경우 해의 거동이 불안정한 것은 좌표변환시 단순한 수학적 관계로만 유도함으로써 변환된 방정식의 각 항이 물리적인 의미를 상실하여 초

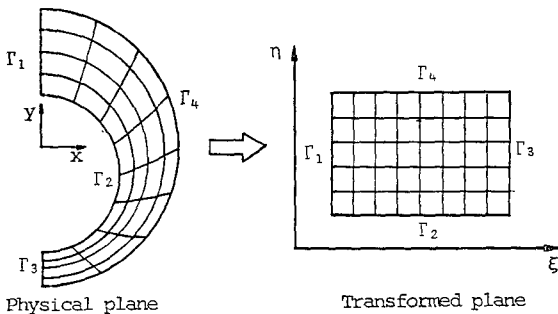


Fig. 2 Generation of boundary-fitted coordinate system

래된 것으로 생각된다. 본 연구에서는 변환된 방정식의 각 항이 물리적인 의미를 갖도록 변환하며 이에 부합되는 수치근사방법을 사용하여 수치해의 안정성을 도모하였다.

시간의존 Boundary-Fitted 좌표계를 사용할 때 실제 영역에서 시간에 따른 격자계의 변화를 수식으로 표시한 것을 형상보존식(geometric conservation law)⁽⁸⁾이라 하며

$$J_t = (y_n x_r - x_n y_r)_t + (x_t y_r - y_t x_r)_n \quad (14)$$

이다. 형상보존식을 이용하여 지배방정식 (3)~(5)를 기하학적 보존형태(geometrically conservative form)로 변환하면

$$\begin{aligned} Ste(J\omega)_r + (\bar{u}\omega)_t + (\bar{v}\omega)_n \\ = Pr \left[\left(\frac{\alpha}{J} \omega_t \right)_t - \left(\frac{\beta}{J} \omega_n \right)_n + \left(\frac{\gamma}{J} \omega_n \right)_n \right. \\ \left. - \left(\frac{\beta}{J} \omega_t \right)_n \right] + Ra \cdot Pr [(y_n \theta)_t - (y_t \theta)_n] \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -J\omega = \left(\frac{\alpha}{J} \phi_t \right)_t - \left(\frac{\beta}{J} \phi_n \right)_n + \left(\frac{\gamma}{J} \phi_n \right)_n \\ - \left(\frac{\beta}{J} \phi_t \right)_n \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ste(J\theta)_r + (\bar{u}\theta)_t + (\bar{v}\theta)_n = \left(\frac{\alpha}{J} \theta_t \right)_t \\ - \left(\frac{\beta}{J} \theta_n \right)_n + \left(\frac{\gamma}{J} \theta_n \right)_n - \left(\frac{\beta}{J} \theta_t \right)_n \quad (17) \end{aligned}$$

가 되며, 여기서

$$\bar{u} = y_n(u - Ste x_r) - x_n(v - Ste y_r) \quad (18a)$$

$$\bar{v} = x_t(v - Ste y_r) - y_t(u - Ste x_r) \quad (18b)$$

이다. 식 (15), (17)에서 속도항 (\bar{u}, \bar{v}) 는 경계의 이동속도에 대한 유체의 상대속도벡터 $(u - Ste x_r, v - Ste y_r)$ 의 (ξ, η) 방향 Contravariant 성분이며 식 (15)~(17)의 변환된 Laplacian 항, 즉 물리적으로 확산항도 대표 종속변수를 f 라 할 때 벡터 ∇f 의 Contravariant 성분을 취한 것으로서, $\left(\frac{\beta}{J} f_n \right)_t$ 및 $\left(\frac{\beta}{J} f_t \right)_n$ 항은 좌표계의 비직교성으로 인한 준확산항(pseudodiffusion)이 된다. 식 (18a, b)의 속도항에서 격자점의 이동속도 (x_r, y_r) 는 경계이동속도로부터 결정될 수 있으며

$$\bar{u} = y_n u - x_n v, \quad \bar{v} = x_t v - y_t u \quad (19a, b)$$

라 할 때 \bar{u}, \bar{v} 는 유동함수의 항으로

$$\bar{u} = y_n \psi_y + x_n \psi_x = \phi_n, \quad \bar{v} = -\phi_t \quad (20a, b)$$

와 같이 결정된다. 식 (15)~(17)의 각 항은 종속변수의 항 또는 경계조건항의 항으로 표시되므로 식 (11a, b)와 연결적으로 해석하여 해를 구할 수 있다.

계산영역에서의 경계조건은 와도 ω 의 정의 및 식 (7)~(9)로부터 다음과 같이 결정할 수 있다⁽⁴⁾. 즉,

$$\Gamma_1, \Gamma_3 : \omega = 0, \quad \phi = 0, \quad \theta_t = 0 \quad (21a, b, c)$$

$$\Gamma_2 : \omega = -\frac{\gamma}{J_2} \phi_n, \quad \phi = 0, \quad \theta = 0 \quad (22a, b, c)$$

$$\Gamma_4 : \omega = -\frac{\gamma}{J_2} \phi_n, \quad \phi = 0, \quad \theta = 1 \quad (23a, b, c)$$

이며 여기서 벽면에서의 와도 ω 는 식 (22a), (23a)이 외에도 여러가지 결정방법이 있다⁽⁹⁾. 상변화면의 이동속도는 상변화면에서 $\theta_t = 0$ 이므로 식 (10)으로부터

$$x_r = \frac{y_t}{J} \theta_n, \quad y_r = -\frac{x_t}{J} \theta_n \quad (24a, b)$$

가 된다.

4. 수치계산

4.1 지배방정식의 수치근사

대표종속변수를 f , 적절한 계수를 $c_i, i=1, \dots, 6$ 라 할 때 식 (15)~(17)를 재배열하여 다음과 같은 동일한 형태로 만들 수 있다.

$$\begin{aligned} (c_1 J f)_r + (c_2 \bar{u} f)_t + (c_3 \bar{v} f)_n \\ = (c_4 f_t)_t - (c_5 f_n)_n + (c_6 f_n)_n - (c_5 f_t)_n + S' \quad (25) \end{aligned}$$

여기서 S' 는 생성항이며, 단일 식 (25)의 우변의 준확산항을 생성항에 포함시켜 S 라 하면 식 (25)는

$$\begin{aligned} (c_1 J f)_r + (c_2 \bar{u} f - c_4 f_t)_t + (c_3 \bar{v} f - c_5 f_n)_n \\ = S \quad (26) \end{aligned}$$

로 바꾸어 쓸 수 있다. 식 (26)은 직교좌표계에서 대류 및 확산이 존재할 때 f 의 균형식과 같은 형태이며 계산영역이 균일격자로 구성되어 있으므로 직교좌표계에서 사용하는 방법을 확장, 적용하여 수치근사할 수 있다.

공간좌표에 대한 근사방법은 적분적 의미에서 유한한 체적에 대하여 물리량의 균형을 만족시키는 검사체적근사방법(control volume formulation)⁽¹⁰⁾을 적용하는 것이 방정식의 변환방법과 부합되며 시간에 대해서는 수치해의 안정성을 고려하여 Fully-Implicit 방법을 취한다.

유동이 수반된 문제의 수치해석시 대류항의 확산항에 대한 상대적 크기, 즉 Reynolds 수 또는 Peclet 수의 증가에 따른 수치해의 불안정성은 변환된 방정식의 각 항이 물리적인 의미를 지니고 있으므로 Power-Law 기법⁽¹⁰⁾을 비직교좌표계에 확장하여 효과적으로 억제할 수 있다. 좌표변환을 이용한 다른 해석들에서 중간차분(central differences)에만 의존한 결과 대조가 된다.

4.2 계산 과정

시간 $\tau=0$ 에서는 액상이 존재하지 않으므로 해석의 영역이 정의될 수 없다. 따라서, 계산은 대단히 짧은 시간동안 순수열전도에 의해 응해가 진행된 것으로 가정하여 반무한 1차원에 대한 해석적인 해를 적용, 초기영역 및 조건을 결정 한 후에 시작한다.

식 (24a, b)로 표시되는 이동경계의 위치가 해의 일 부로서 결정되어야 하므로 하나의 시간스텝에서 해를 구하기 위해서는 영역을 정의하는 식 (24a, b), 정의된 영역에 격자계를 생성하는 식 (11a, b) 및 지배방정식 (15~17)을 연립적으로 해석하여야 한다. 그러나 이 경우 계산에 소요되는 기억용량, 시간이 공학적인 측면에서 비현실적이므로 전 시간스텝의 정보로부터 경계의 위치를 결정하고 격자계를 생성한 후 격자점의 이동속도 (x_r, y_r)만을 고려하여 해를 구하기로 한다. 이 때, 지배방정식 (15)~(17)은 서로 비선형적으로 결합된 형태이지만 온도-와도-유선함수의 순서로 수렴할 때까지 반복계산하는 순차적과정에 의해 해를 구하는 것이 편리하다. 반복계산과정에서 식 (22a) 및 (23a)로 표시한 와도의 경계조건은 새로운 값을 적용한다. 일단 수렴하면 다음 시간스텝으로 진행하며 수렴조건은 수렴속도가 가장 느린 유동함수의 반복수에 따른 변화율이 일정한 값 이하일 때로 정하였다.

이동경계상의 격자점은 시간에 따라 이동하면서 경계의 곡률에 따라 집중, 분산되어 초기의 배치가 변화하므로 매시간 스텝마다 격자점을 재배치하여 계산을 수행하여야 한다.

5. 결과 및 검토

본 연구의 목적이 좌표변환을 이용하여 상변화문제를 효율적으로 해석하는 방법제시에 있으므로, 계산은

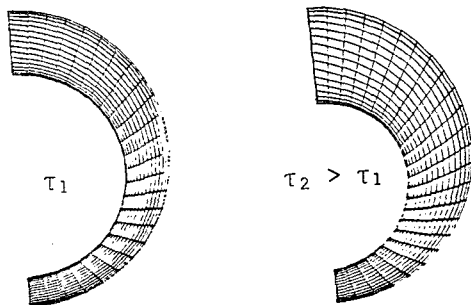


Fig. 3 Grid systems at different times

실험결과 또는 다른 방법에 의한 계산 결과와 비교할 수 있는 경우에 대하여 수행하였다.

계산에 사용한 격자계를 Fig. 3에 표시하였다. 영역의 변화에 따라 이동하는 이동격자계로서, 벽면근처에서 유동 및 열전달 특성을 정밀하게 해석하기 위하여 격자를 집중배치하였다.

5.1 타 연구와의 비교

동일한 경계조건 및 무차원 파라미터로 정의된 동일 문제를 다른 방법으로 해석한 결과를 비교함으로써 해석방법에 따라 큰 결과의 차이가 발생하는 문제성격을 잘 보여줄 수 있다. Fig. 4는 $Ra=2 \times 10^5, Pr=145, Ste=0.115$ 일 경우 비슷한 무차원시간에서의 유동형태 및 등온선으로서, 상면화면의 형태 및 자연대류특성을 표시한다. 본 연구 및 Rieger 등⁽⁷⁾의 연구 결과는 상면화면의 형태가 유선형으로서 거의 비슷하지만 Saitoh 등⁽¹¹⁾의 결과는 아랫부분에서 열적 불안정성과 같은 Vortex가 발생한 것을 고찰할 수 있으며 Pannu 등⁽¹²⁾의 결과는 등온선의 형태가 유동형태와 부합하지 않음을 볼 수 있다. 그러나 특정한 파라미터에 대한 계산의 결과만으로 해석방법의 정당성을 설명할 수는 없으며 실험의 결과와 비교하는 것이 합리적이다.

5.2 실험결과와의 비교

등온으로 가열되는 수평원관내의 용해과정에 대하여 발표된 실험결과는 소수의 제한된 경우이며 비교를 위

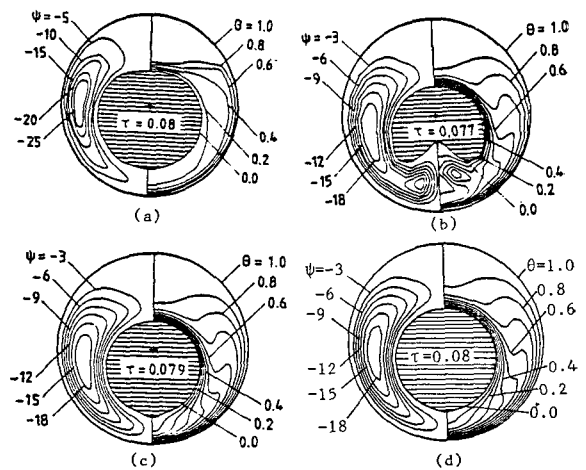


Fig. 4 Previous works in comparison for $Ra=2 \times 10^5, Pr=145, Ste=0.115$: (a) Pannu et al. (9); (b) Saitoh et al. (8); (c) Rieger et al. (5); (d) Present study

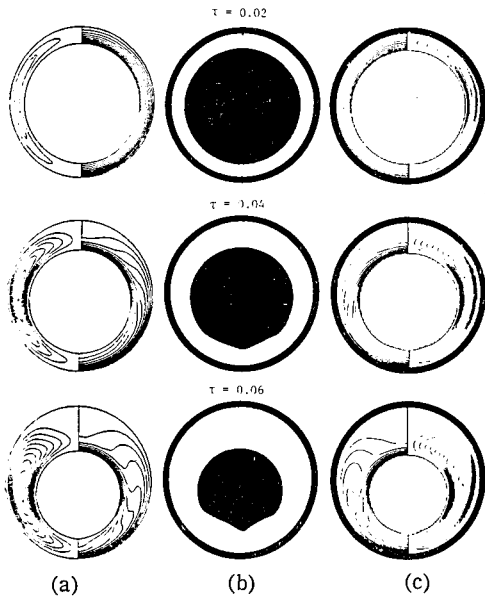


Fig. 5 Comparison of melt front contours with other works for $Ra=4 \times 10^5$, $Pr=50$, $Ste=0.04$ at different times, τ : (a) Present study; (b) Experimental and (c) Numerical results by Rieger et al. (The numerical contour maps are divided into isotherms and streamlines)

하여 무차원 파라미터를 실험과 일치시켜 계산을 수행하였다. Fig. 5는 $Ra=4 \times 10^5$, $Pr=50$, $Ste=0.04$ 일 경우에 대한 Reiger 등⁽⁷⁾의 실험에 의한 상변화면의 형태 및 그들의 계산결과와 본 해석의 결과를 비교한 것이다.

상변화면 아랫부분의 일부를 제외하면 좋은 일치를 보이고 있으며 용해과정에서 자연대류의 역할을 확인할 수 있다. 즉 용해초기에는 전도에 의해 열전달이 진행되므로 상변화면의 형태가 동심원형이지만, 액상의 영역이 증가함에 따라 자연대류가 발달하여 아랫부분의 가열벽에서 가열된 유체가 벽면을 따라 이동, 상변화면의 윗부분의 온도구배가 커지고 상변화를 촉진하게 되어 편심형태로 된다.

실험에서 상변화면 아랫부분의 오목한 형상은 Bénard 대류와 같은 열적 불안정성의 결과로 발생하는 3차원 Vortex에 의한 2차유동 때문⁽¹³⁾이므로 계산과의 불일치는 계산방법이나 계산과정에서 오류가 아니라, 3차원 Vortex를 지배방정식에 포함시켜 수식화하지 못함으로써 발생하는 것이다.

5.3 큰 Ra 수에서의 결과

Ra 수의 증가에 따라 확산항에 대한 자연대류항의 상대적크기가 증가하므로 수치해의 불안정성이 발생할 가능성이 커진다. 따라서 큰 Ra 수에서의 계산결과와 안정성이 해석방법의 타당성을 표시하는 척도중의 하나가 될 수 있다. Fig. 4 및 Fig. 5에서 Rieger 등⁽⁷⁾의 계산결과는 본 계산의 결과와 좋은 일치를 보여주었으나 Ra 수가 큰 경우는 판이한 결과이다. Fig. 6에 $Ra=10^6$, $Ste=0.1$, $Pr=50$ 인 경우에 대한 Rieger 등⁽⁷⁾의 실험 및 계산결과와 본 계산결과를 비교하였다. 그들은 계산에 나타나는 2차 유동을 Ra 수가 커짐에 따라 유동특성이 2차원 준정상상태유동에서 비정상상태로 천이하는 과도기적현상으로 설명하고 있으나 실험력이 없으며 오히려 수치해의 불안정성의 결과로 보는 것이 타당한 것으로 생각된다. 이유는 실험에서 $Ra=4 \times 10^5$, 10^6 두 경우 모두 비슷한 용해형태이며 열적불안정성에 의한 Vortex의 영향이 Ra 수 10^6 인 경우 특별히 크지 않고, 계산에 사용한 지배방정식

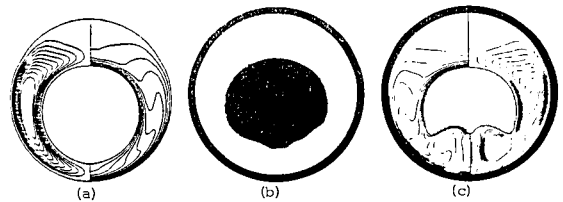


Fig. 6 Comparison of melt front contour with other works for $Ra=10^6$, $Pr=50$, $Ste=0.1$ at $\tau=0.05$: (a) Present study; (b) Experimental and (c) Numerical results by Rieger et al.

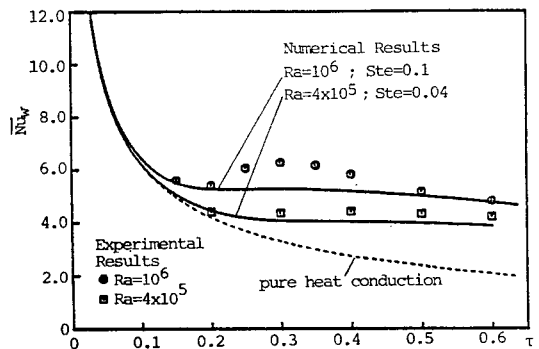


Fig. 7 Average Nusselt number at the tube wall Nu_w vs. dimensionless time, τ

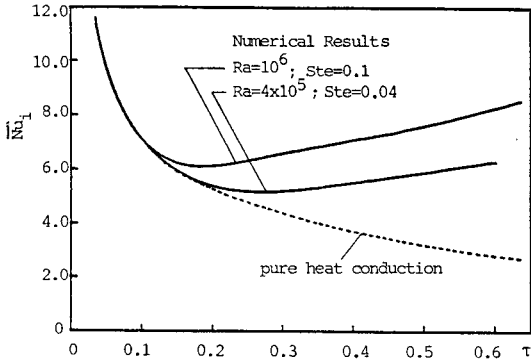


Fig. 8 Average Nusselt number at the interface, Nu_i vs. dimensionless time, τ

이 동일한 2차원층류 모델이며, 수치근사를 중간차분법에 의한 의존한 점이다. 이러한 점 및 본 계산과 실험의 좋은 일치로부터 본 해석방법이 큰 Ra 수에서도 안정된 수치해를 얻을 수 있음을 확인할 수 있다.

5.4 열전달 특성

가열벽면 및 상변화면에서 무차원 열전달계수, 즉 Nusselt 수의 시간에 대한 변화로부터 열전달 특성을 고찰할 수 있다. 벽면 및 상면화면에서의 평균 Nu 수를 각각 $\overline{Nu}_w, \overline{Nu}_i$ 라 하면

$$\overline{Nu}_w = -\frac{1}{2\pi} \int \gamma \theta_s d\eta \tag{28a}$$

$$\overline{Nu}_i = \int \gamma \theta_s d\eta / \int \sqrt{r} d\eta \tag{28b}$$

로 정의되며 $Ra=4 \times 10^5, 10^6$ 에 대한 $\overline{Nu}_w, \overline{Nu}_i$ 를 Fig. 7, Fig. 8에 나타내었다. \overline{Nu}_i 는 용해초기에 급격히 감소하다가 최저값에 도달한 후 단조증가하며 이러한 경향은 열전달의 형태가 초기에는 순수 열전도였으나 자연대류의 발생과 함께 자연대류가 주도적인 열전달 형태가 되는 것을 보여준다. 반면, \overline{Nu}_w 은 초기에 급격히 감소하여 최저값에 도달한 후 조금 증가하다가 완만하게 감소하는 형태이나, 순수열전도의 경우 단조감소하는 것과 비교할 때 역시 자연대류의 영향을 알 수 있다. $Ra=10^6$ 인 경우에 극한값 부근에서 실험치와 비교적 큰 오차를 보이는 것은 앞에서 언급한 열적 불안정성에 의한 vortex가 Ra 수가 클수록 강하게 발생하여 가열벽 아랫부분에서 열전달을 촉진하지만 수학적모델의 제약으로 계산에서는 고려될 수 없기 때문이며, 변화의 정량적인 수치에서 실험과 비교적 좋은 일치를 보인다.

5.5 용해 질량비

계산결과와 이용측면에서 가장 중요한 것이 용해 질량비, 즉 전체질량에 대한 용해된 질량의 비이며, 용해 질량비를 m 이라 할때 m 은 Boundary-Fitted 좌표계에서 편리하게 표시될 수 있다. 즉

$$m = \frac{1}{\pi} \iint J d\xi d\eta \tag{27}$$

이다. Fig. 9에 2가지 경우에 대한 용해질량비를 실험결과와 비교하였다. 비교적 좋은 일치를 보이며 실험과의 차이는 열전달 특성에서 언급한 Vortex 때문으로서 Fig. 5 및 Fig. 6에서 상변화면의 형상의 차이, Fig. 7에서 \overline{Nu}_w 값이 실험치와 차이를 보이는 것과 부합한다. 또한 모든 물질은 고체에서 액체로 상변화시 밀도의 변화를 수반하며 계산에서 이를 무시한 것의 영향도 배제할 수 없다.

6. 결 론

액상내의 자연대류를 고려한 2차원 상변화 과정을 Boundary-Fitted 좌표계로 좌표변환하여 수치해석하는 방법을 제시하고 실제 문제에 적용하여 결과를 고찰하였다.

좌표변환된 방정식의 형태가 물리적 의미를 가지도록 취함으로써 직교 좌표계에서 사용하던 수치해석과정을 비직교좌표계로 확장, 적용하여 안정한 수치해를

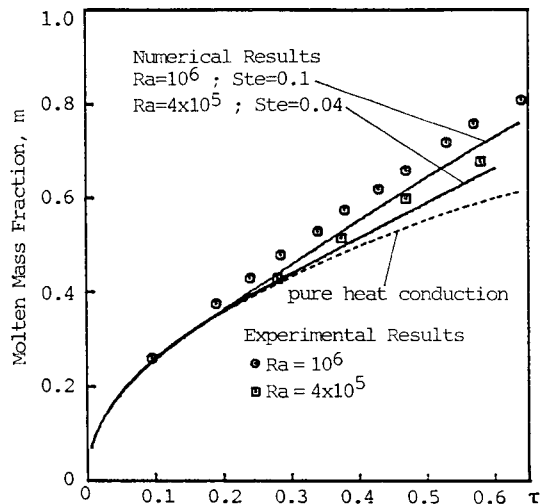


Fig. 9 Molten mass fraction as function of dimensionless time, τ

얻는 것이 가능하며 물리적으로 타당한 결과를 얻었다. 또한 좌표변환에 의해 기하학적 형상이 변화하여도 동일한 수치해석과정을 적용할 수 있으므로 본 연구에서 제시한 방법은 광범위한 2차원 상변화과정의 해석에 이용될 수 있다.

실제현상을 기술하는 수학적 모델의 제약 등으로 본 연구에서 계산을 수행한, 등으로 가열되는 수평원판 내의 용해과정에 대해서는 수치적으로 정확한 예측은 어렵지만 정성적인 경향은 보일 수 있었다.

3차원 문제에의 확장을 위해서는 종속변수를 속도 성분, 압력 및 온도로 취할때 좌표변환에 대한 연구가 요망된다.

후 기

본 연구는 1985년도 한국과학재단 연구비의 지원에 의하여 이루어진 것으로 이에 감사하는 바이다.

참 고 문 헌

- (1) E.M. Sparrow, R.R. Schmidt, and J.W. Ramsey, "Experiments on the Role of Natural Convection in the Melting of Solids", J. Heat Transfer, Vol. 100, pp. 11~16, 1978
- (2) A.G. Bathelt, R. Viskanta, and W. Leidenfrost, "An Experimental Investigation of Natural Convection in the Melted Region Around a Heated Horizontal Cylinder", J. Fluid Mech., Vol. 90, Part 2, pp. 227~239, 1979
- (3) T. Saitoh, "Numerical Method for Multi-Dimensional Freezing Problems in Arbitrary Domains", J. Heat Transfer, Vol. 100, pp. 294~299, 1978
- (4) A.D. Gosman, W.M. Pun, A.K. Runchal, D.B. Spalding, and M. Wolfshtein, Heat and Mass Transfer in Recirculating Flow, Academic Press, 1973
- (5) J.F. Thomson, Z.U.A. Warsi, and C.W. Mastin, "Boundary-Fitted Coordinate System for Numerical Solution of Partial Differential Equations-A Review", J. Comp. Phys., Vol. 47, pp. 1~108, 1982
- (6) F.C. Thames, "Numerical Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations About Arbitrary Two-Dimensional Bodies", Ph. D. thesis, Department of Aerophysics and Aerospace Engineering, Mississippi State University, 1975
- (7) H. Rieger, U. Projahn, M. Bareiss, and H. Beer "Heat Transfer During Melting Inside a Horizontal Tube", J. Heat Transfer, Vol. 105, pp. 226~234, 1983
- (8) P.D. Thomas, and C.K. Lombard, "Geometric Conservation Law and Its Application to Flow Computations on Moving Grids", AIAA J., Vol. 17, pp. 1030~1037, 1979
- (9) P.J. Roache, Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers, 1972
- (10) S.V. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere, 1980
- (11) T. Saitoh, and K. Hirose, "High-Rayleigh Number Solutions to the Problems of Latent Heat Thermal Energy Storage in a Horizontal Cylinder Capsule", J. Heat Transfer, Vol. 104, pp. 545~553, 1982
- (12) J. Pannu, G. Joglekar, and P.A. Rice, "Natural Convection to Cylinders of Phase Change Material used for Thermal Storage", AIChE Symposium Series, pp. 47~55, 1980
- (13) C.J. Ho, and R. Viskanta, "Heat Transfer During Inward Melting in a Horizontal Tube", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 27, pp. 705~716, 1984