有限要素解析과 研究方向

郭 柄 晩
<韓國科學技術院 機械工學科 教授>

1. 머리 말

유한요소법은 수치해석분야에서 가장 획기적인 발전의 하나로, 이론의 과학과 공학을 실제 생활에 응용되게한 중요한 방법이다. 현대적인 유한요소법의 역사는 50년대를 시작으로 하여 30년 밖에 되지 않았지만 이와 같은 발전과 산업에의 응용은 컴퓨터의 발전으로 가능해 졌다고 볼 수 있다.

본 글의 목적은 유한요소법에 대한 세부분야와 진행되고 있거나 앞으로 예상되는 연구활동과 발전방향을 재조명해 봄으로 유한요소에 관심을 둔 엔지니어나 연구 종사자로 하여금 전체를 돌아볼 기회를 만들고 이해의 폭을 넓히고자 하는 것이다.

유한요소에 대한 조사(survey) 또는 설명적 글은 유한요소전문 학술지는 물론 고체역학, 진동, 파괴, 유체역학등 거의 모든 응용분야 마다 잡지나 논문집등에서 가끔 찾아 볼 수 있다. 특히 미국 기계학회잡지(Mechanical Engineering)나 기계공학에서의 컴퓨터(Computers in Mechanical Engineering; CIME)등과 학회발간 참고서(State-of-the-Art Surveys on Finite Element Technology, ed., A.K. Noor and W.D. Pilkey, 1983, ASME)등은 좋은 전반적인 자료와 내용을 제공하고 있다. 본 글은 주로 이들을 많이 참조하였다.

2. 유한요소법의 발전

유한요소법의 발전은 행렬구조법의 사용과 이에 대한 이해로 부터 시작되어 일반적인 원리의 존재를 파악한 제1단계와 이 방법에 대한 수학적인 원리의 정립, 즉 변분법과 가중 잔여법 등의 관점에서 파악이 되어 이들 원리를 구조물외에도 여러 분야에로의 확산응용되는 제2단계, 그리고 컴퓨터의 도형처리 능력의 발달과 함께 사용자 편의의 주변시스템의 발전이 추가되는 단계로 크게 나누어 볼 수 있을 것 같다. 이 세번째단계에 속해있는 지금은 유한요소법과 비슷한 개념의 발전, 즉 경계요소법 또는 유한요소법과 경계요소법의 조합, 유한요소법과 Ritz법등 전통적 방법과의 조합등 새로운 방법들도 다양하게 나오고 있다. 단기적 안목으로 본 앞으로의 발전은 유한요소법과 설계기법과의 연계, CAD시스템과 연계된 유한요소법, 유한요소기계(finite element machine), 요소의 자동최적분할등에서 크게 있을것 같고, 장기적으로 보면 다음 세대 컴퓨터 즉 인공지능을 가진 컴퓨터의 발전과 함께 유한요소해석에 있어서도 인공지능의 응용과 보다 정밀한 대규모 해석등이 일반화될 것이 예상된다.

3. 유한요소해석

유한요소해석은 위에서 언급한 발전의 과정상 대상문제와의 연계역할을 하는 전처리 과정과 사용자나 평가자와의 연계역할을 하는 후처리과정의 주변시스템, 순수한 유한요소법 계산프로그램인 유한효소 핵심 계산과정으로 나눌수 있다. 그림 1은 이와 같은 유한요소 해석의 과정을 보이고 있으며 특히 유한요소 해석의 대상물체는 기하학적인 모양이나 영역을 다루게 되므

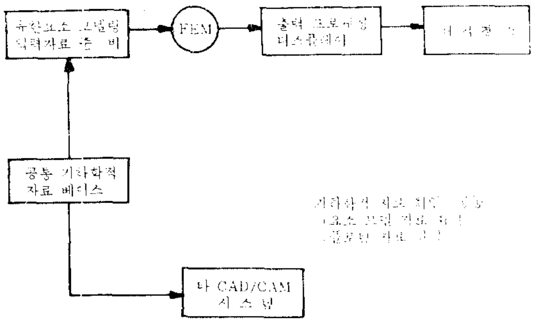

그림 1 유한요소해석

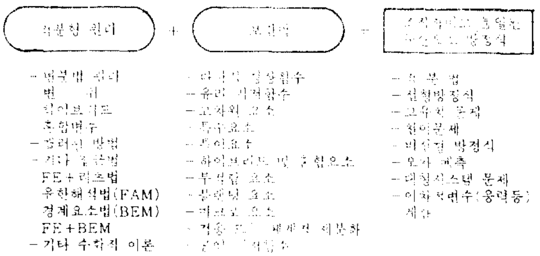

그림 2 유한요소법의 원리

로 이를 나타내는 공통기하학적 자료베이스도 함께 표시하였다.

3.1 유한요소 핵심 계산과정

이 과정은 원래 유한요소법으로 특정지어지는 과정으로 유한요소법을 그 원리를 요약해 보면, 최소에너지 정리, 변분법등과 같은 적분형 원리에 물리적으로 나누어진 영역위에 특정 성질의 보간함수(interpolation)를 이용한 근사화를 적용하여 유한차원 문제로 바꾸는 것으로, 그림 2에 이와 관련되어 이용되고 있는 원리들과 여러가지 방법들을 제시하였고, 나타나는 결과식과 관련된 사항도 포함하였다.

유한요소법의 이론적 연구는 크게 적분형 원리의 도출과 보간에 의한 근사화의 두 방향에 대한 연구가 주를 이루게 된다.

(1) 수학적 이론은 주로 해의 존재성, 유일성, 오차의 한계등에 관심이 있으며 가장 잘 연구된 것이 타원형 선형문제로서 이 경우는 소위 변분원리에 의한 정립(variational formulation)이 완전히 수학적으로 확립되어 있다. 그리고 선형문제에 대해서는 적분형 원리를 위한 접근방법에 어려움이 없다. 오차의 한계에 대해서도 매쉬 크기의 어떤 차수의 크기인지는 상당히 잘 알려져 있으나 엔지니어에 직접적 정보를 주는 각종 오차에 대한 연구는 더욱 계속되어야 할 것이다.

가장 잘 발전된 타원형 선형문제에 대해서 일반적인 이론을 보면 다음과 같다. 즉 V가 힐버트 공간이고 $a(u,v)$가 $V\times V$에 정의된 연속, 타원형의 이차선형이고 F가 V의 공액공간 V'의 요소로 주어질때 변분법의 문제는

$$F_{\text{ind}}\ u\in V,$$
$$a(u,v)=F(v),\quad V_v\in V \tag{1}$$

이러한 문제는 Lax Milgram 법칙에 따라 단일해가 존재함이 증명된다. 여기서 V는 주어진 구체적인 문제에 따라 정해질 것이며 예를들면,

$$F_{\text{ind}}u(x),$$
$$-\nabla\{A(x)\nabla u(x)\}+d(x)u(x)=f(x)\ \text{ in } D$$
$$u=0 \text{ on } \partial D \tag{2}$$

여기서 $A(x)$는 $n\times n$대칭 타원꼴 행렬이고 연속함수이며 $d(x)\geq 0$연속이고 $f(x)\in L^2(D)$이다. 위 문제의 경우 $V=H_0^1(D)$로 잡을 수 있으며, 따라서 위 문제는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F_{\text{ind}}\ u\in H_0^1(D),$$
$$a(u,v)=(f,v),\quad V_v\in H_0^1(D) \tag{3}$$

여기서

$$a(u,v)=\int_D\{\nabla u\cdot A(x)\cdot\nabla v+d(x)uv\}dx$$
$$(f,v)=\int_D f(x)v(x)dx$$

위에 제시된 문제(1)은 또한 다음과 같은 최소화문제로 표현될 수 있다. 즉,

$$F_{\text{ind}}\ u\in V,$$
$$J(u)\leq J(v),\quad V_v\in V \tag{4}$$

여기서

$$J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-(f,v)$$

문제(1)은 Galerkin 방법, 문제(4)는 Ritz 방법을 적용하기에 적절한 꼴로서 여기에 적절한 기저함수를 도입하면 근사해를 구할 수 있다. 그런데 유한요소법에서는 이 기저함수에 해당하는 근사함수로 독특한 성질을 가진것을 잡게 되는데 그것이 유한요소법과 다른 방법과의 특징이 되

는 부분이다. 유한요소법은 그러므로 특정한 성질을 가지는 기저함수로 이루어지고 이에 따라서 유한요소 부공간 V_h를 정의하므로 유한요소법은 다음과 같이 표현되어 질 수 있다. 즉,

$$F_{\text{ind}}\ u_h \in V_h,$$
$$a(u_h, v) = F(v), \quad V_v \in V_h \tag{5}$$

여기서 V_h는 V의 부공간으로 그 기저함수는 유한요소 분할과 유한요소내의 보간함수에 따라 달라지게 되며 여기서 h는 유한요소특성 크기를 표시한 것으로 유한요소 매쉬의 세분정도와 관련이 있고 이를 작게 나누어 보는 미세화는 h에 의한 미세화와(h-version refinement), 요소내에서 사용되는 보간함수 다항식의 차수를 p라 할 때 p를 증가시킴에 따라 얻어지는 미세화 즉 p에 의한 미세화(p-version refinement)이다.

유한요소법에서 근사에 의한 오차의 범위는 다음과 같이 일반적인 식을 구할 수 있다. 즉,

$$\|u-u_h\|_V \leq c\inf_{v\in V_h}\|u-v\|_V \leq ch^k\|u\|_{k+1} \tag{6}$$

여기서 u는 정해이고 u_h는 유한요소법에 의한 해이다. 그러므로 일반적으로는

$$\|u-u_h\|_V \leq ch^s\|u\|_s \tag{7}$$

이고, 여기서 s는 기저함수의 차수와 u의 연속성의 정도에 의하여 결정되는 어떤수이다. 위에 언급한 바와 같이 이러한 식들은 특정 근사화에 대한 정성적인 정보를 제공하고 있으나 엔지니어에게 직접적인 정보를 주고 있지는 못하므로 아직도 수많은 수치적 경험에 의존하고 있으며 정량적인 일반방법에 대한 연구는 아직 거의 없다.

(2) 특히 비선형문제에 있어서 수학적 정립의 문제는 큰 연구 분야이다. 비선형의 경우는 아직까지 일반적 이론이 정립되어 있지 못하다. 현재 특히 많이 연구되고 있는 특수한 경우로 변분부등식(variational inequality)문제이다. 이 부류의 문제는 자유경계 문제(free boundary problem), 보완성 문제(complementarity problem), 최적화 문제(optimization problem)등과 직접관련이 되어 있으며 접촉문제, 다공성 물질을 통한 액체침투문제, 윤활문제, 댐위를 흐르는 유동문제등이 기계공학과 관련된 주요분야의 예이다.

위에서 언급한 최적화 문제(4)에서는 V가 전체공간을 나타내지만 보다 일반적인 경우는 V가 전체 공간뿐만 아니라 어떤 부집합으로 되어 있을때이다. 이 부집합을 일반적으로 K로 나타내면 다음과 같은 최적화 문제가 된다. 즉,

(MP)

$$F_{\text{ind}}\ u \in K$$
$$J(u) \leq J(v), \quad V_v \in K \tag{8}$$

여기서 K는 통상 V의 볼록 부집합으로 닫혀있으며 (2)의 문제와 같은 경우를 보면 $K \equiv \{v | v \in H_0^1(D),\ v \geq \phi\ a.e.\ \text{in}\ D\}$의 꼴이 한예이다. 여기서 ϕ는 주어진 함수이다. 또

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - (f,u)$$

이 문제에 해당되는 변분부등식(variational inequality)문제는

(VIP)

$$F_{\text{ind}}\ u \in K$$
$$a(u, v-u) \geq (f, v-u), \quad V_v \in K \tag{9}$$

위에서 예로든 선형타원 문제의 경우, A를 $J(u)$에 해당하는 미분 연산자일 경우 윗문제(8)과 (9)에 동등한 소위 보완성 문제(complementarity problem)는 다음과 같이 된다.

(CP)

$$\left.\begin{array}{ll} Au-f \geq 0 & a.e.\ \text{in}\ D \\ u \geq \phi & a.e.\ \text{in}\ D \\ (Au-f)(u-\phi)=0 & a.e.\ \text{in}\ D \end{array}\right\} \tag{10}$$

이들 문제는 영역중 일부가 문제를 풀기전까지는 알려지지 않기 때문에 비선형 문제가 되며 대표적인 예가 접촉문제, 장애물(obstacle)문제, 자유경계문제(free boundary proflem)등이 있다.

이들 문제의 풀이는 위에 언급한 바와 같은 서로 동등하면서도 다른 수식화를 통하여 그 수식화에 해당되는 편리한 방법을 쓸 수 있을 것이다.

이들 분야의 연구는 과거 응용수학자 및 최적화 전문가, 또는 응용역학자들이 각각 독립적으로 다루어 오던 분야들이 지금은 그 관련성을 파악하고 일반화 또는 추상화를 통한 연구가 활발하다. 유한요소법과 관련하여 접촉응력해석 문제는 현재 여러나라에서 전문가 팀이 연구에

열을 올리고 있는 분야이다.

또 다른 유한요소법과 관련된 비선형 수학분야로는 단조연산자(monotone operator) 컴팩트 퍼터베이션(compact perturbations)등 많은 함수해석학을 필요로 하는 분야이다.

(3) 보간법 내지는 요소내의 근사화와 관련한 분야에서는 다항식의 형상 함수외에도 유리함수 이용과 각종 절차로 컴퓨터 그래픽스에서 쓰이는 바와 같은 표현법 즉 여러함수의 블랜딩에 의한 표현법, 조합요소, 부적합요소, 적응 또는 체계적인 세분화법과 특히 불연속한 미분 값에 대한 연속적 표현을 얻기 위한 쌍대기저(conjugate basis) 함수의 응용등 다양하다.

그리고 새로이 매우 활발하게 연구되고 있는 분야의 하나는 파괴역학등에서 특수 또는 특이요소(singular element)의 개발이다.

(4) 적분형 원리와 보간법이 서로 연계되어 있는 분야로 소위 다변수장의 유한요소 모델링으로 혼합(mixed) 및 잡종(hybrid) 유한요소 모델분야이다. 여기서는 각 절점에서 변수가 변위계열과 힘의 계열을 같이 지정하고 경계에서 연속조건을 만족하도록 하는 경우나 이러한 변수를 독립적으로 표현하고 경계에서의 적합조건을 따로 부과하고 라그란지 승수를 도입하여 처리하는 방법으로 앞으로 큰 발전이 있을 것으로 기대된다.

(5) 유한요소 핵심 과정중에서 대수방정식, 고유치문제, 비선형문제의 경우에 대한 각종 해법연구는 초기 유한요소 개발때 부터 중요한 연구분야이고 큰 발전이 있었다. 선형 방정식 해법의 경우 가우스 소거법, 띠형의 응용, 위이브 전진 방법(frontal technique), hypermatrix, 반복법, 또는 부구조법과의 연관 연구등이다. 또한 이들을 효율적으로 다룰수 있는 평행 또는 벡터 하드웨어의 개발등도 앞으로의 주요분야이다.

비선형분야는 크게 재료 비선형과 기하학적 비선형으로 나눌수 있으며 전자는 비선형 탄성, 탄소성등의 경우이고 후자는 다시 대변형(large strain) 대변위(large displacement)등에 의한 비선형 변형도 항과 물질 좌표의 추적등에 의한 처리가 필요한 경우이고, 특별한 기하학적 비선형의 한 경우는 기하학적 경계조건의 변화이다. 접촉문제같은 경우이다. 그외 소위 bifurcation 문제등이 중요하게 연구되고 있는 분야이다.

가장 간단한 탄성 접촉문제는 다음과 같이 나타낼 수 있다. 물론 여기서는 마찰이나 접착등은 고려하지 않은 경우이다. 즉,

$$\min_{u \in K} \pi(u)$$

여기서

$$K=\{u \mid \phi(u) \leq 0,\ u \in \hat{K}\}$$

$$\hat{K}=\text{가용변위장}$$

$$\phi(u)=u_n{}^1-u_n{}^2-\alpha$$

로 접촉면에서의 접촉면 1과 2의 수직방향 변위와 초기틈새의 양의 차이를 나타낸다. 그리고,

$$\pi(u)=\int_{\Omega^1}\frac{1}{2}\tau^1\varepsilon^1 d\Omega-\int_{\Omega^1}X^1u^1 d\Omega-\int_{\Gamma_p}u^1 t\, d\Gamma$$
$$+\int_{\Omega^2}\frac{1}{2}\tau^2\varepsilon^2 d\Omega-\int_{\Omega^2}X^2u^2 d\Omega$$

는 전시스템의 포텐셜에너지이고 기호설명은 그림 3에 나와 있다. 위와 같은 탄성 접촉문제는 유한요소법을 도입하여 유한차원문제로 바꾸고 이 문제를 최적화 방법 또는 변분 부등식 또는 보완성 문제등에서 다루는 방법으로 취급할 수 있다.

3.2 유한요소 주변 시스템에서의 연구분야

유한요소해석의 소프트웨어 개발과 관련하여 보면 앞으로 그 주변 시스템분야에서 매우 큰 발전이 있을것이 예상된다. 전처리 작업은 크게 기하학적 자료의 입력과정, 매쉬발생, 번호붙이기, 매쉬의 최적화 및 세분화, 컴퓨터 그래픽스 이용

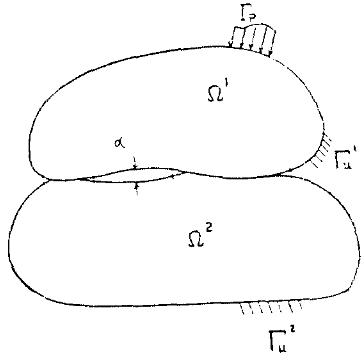

그림 3 접촉문제

및 자료확인, 일반적 CAD, 기하학적 자료 베이스와의 인터페이스(interface)로 나눌수 있다. 매쉬발생은 수동, 대화식 또는 자동식이 있겠으며, 매개변수를 통한 분활(parametric partition), 자연좌표(natural coordinate), 기타 변환(transformation)에 의한 방법등이 있다. 매쉬 최적화는 국부적인 근사화 오차에 대한 적절한 기준의 설정문제 그리고 좋은 적응적인 매쉬 세분화의 전략등이 아직 없는 실정으로 매쉬 발생작업과 함께 앞으로 인공지능방법의 이용등이 기대된다.

후처리작업은 크게 계산된 기본결과에서부터 하중에 따른 겹침(load superposition), 각종 표준이나 기준에 따른 요구변수계산, 조화해석(harmonic analysis), 설계평가를 위한 계산등의 수치결과의 처리과정과, 이들 결과를 그림으로 나타내거나 자료화하는 과정인 은선처리, 단면 나누기, 주밍(zooming), 걸어지나가기(walk-through), 등고선그리기, 색깔 또는 프린지넣기, 간섭조사, 진동 또는 변형역사의 활동화(animation), 자료베이스의 관리등이 포함된다.

전·후처리분야는 컴퓨터 그래픽스의 활용과 데이터베이스의 관리등이 중요연구 분야가 될 것이지만 특히 유한요소법과 관련하면 최적매쉬의 자동분할이 될 것이다. 이는 다른 CAD작업측, 도면화, NC프로그래밍, 공정설계등과 마찬가지로 대상 기하학에 대한 공동 기하학적 자료(common geometric data base)에서부터 매쉬가 나올 수 있도록 연구가 될 것이다. 현재는 전·후처리 프로그램개발이 종래의 유한요소 소프트웨어 회사, 터언 키 CAD회사 및 기하학적 모델링 소프트웨어 회사, 그리고 독자적 전·후처리 프로그램개발 회사등이 각기 전문분야(FEM 또는 GM)에서 출발하여 다른쪽 전문분야의 소프트웨어와 연계가 되도록 하기 위한 수 많은 프로그램이 개발되었고, 또 되고 있다. 이들 주변시스템 소프트웨어는 하드웨어, 대상 유한요소 프로그램, 공학의 대항분야에 따라 달라지게 되는 경향이있고 응용에 따라 효율적이기 위해서는 문제지향적으로 개발이 많이 될 것이 예상된다. 그외 주요 분야로는 기하학적 자료의 입력과정으로서 앞으로는 모형, 제도 도면, 실제 시스템등에서 자동적으로 좌표를 수치로 읽어 주어진 입력형식에 맞추어지도록 하는 하드웨어 및 소프트웨어 개발이 될 것이다. 매쉬 생성분야에는 최적매쉬의 정의 및 자동분할기법 연구와 최적 번호붙이기등의 좋은 기법이 나올 것이다.

3.3 유한요소법의 사용자 입장에서의 필요한 연구

유한요소법의 목적은 공학제품에 대한 설계의 건정성의 확립, 기존 시스템의 안정성 검토, 자연 현상등에 대한 정확한 해석에 있다. 그러므로 무엇보다 실제 대상시스템에 대한 정확성을 높이고, 해를 구하는데 드는 노력과 비용을 절약하고자 하는 것이 유한요소해석 소프트웨어가 가져야 할 이상적 목표라 하겠다. 이와 같은 해석에서 오차는 크게

(1) 수학적 모델링의 오차(mathematical modelling error)

(2) 이산화 과정의 오차 (discretization error)

(3) 절삭숫자에 의한 오차(round-off error)로 볼 수 있으며 이중에서 (1)의 오차는 선형화 과정, 균일화 가정등에 의한 수학적 지배방정식이 얼마나 실제시스템을 잘 표현 하느냐와 관련된 것으로 유한요소해석 이전의 문제이다. (3)의 오차는 컴퓨터가 유한개의 자리 숫자만을 다룰 수 있기 때문에 절삭되는 숫자로 말미암아 생기는 오차로 많은 자리 숫자를 다룰수 있는 큰 컴퓨터 일수록 이 오차를 줄일 수 있을 것이다. 그러므로 사용자의 입장에서 가장 중요한 오차의 근원은 (2)의 오차로 소위 모델링에 따른 오차이다. 즉, 매쉬 분할밀도, 배치, 요소의 종류, 요소의 각종성질, 기하학적 형상의 단순화등으로 이오차를 줄이고 신뢰도를 보장할 수 있는 모델을 세워야 할 것이며, 한편으로 그렇게 하기 위한 방법에 관한 연구가 계속 되어야 한다. 복잡한 구조물인 자동차, 비행기, 선박등의 모델링 연구등으로 정적 해석신뢰도는 물론 동적 해석의 실험과는 일치를 위한 연구는 필수적이고, 특히 해당기업등에서 이룩해 두어야 할 연구 분

야일 것이다. (1)번 오차와 관련 하여서도 사용자 입장에서 비선형을 고려할 것인가, 동적해석이 필요한가, 완전 3차원 해석을 해야 하는가 등 그 의사 결정이 매우 중요하다. 이 분야도 경계요소법등 새로운 수치 해석등의 연구와도 밀접한 관련을 가질 것이다.

3.4 주변 연관분야 및 소프트웨어 개발

응력해석은, 새로운 설계는 물론, 기존 설계에 대한 온전성(integrity)의 확립을 위해서도 필요하며, 특히 너무 안전측의 설계가 될 경우에도 유한요소해석이 필요하다. 유한요소해석 결과를 조사하고 직감적인 설계변경을 하는 경우도 있겠지만, 합리적이고 보다 조직적인 설계변경은 효율적인 설계 민감도 해석과 효율적인 최적화 방법을 도입하는 것이다. 한걸음 더 나아가서, 유한요소법과 최적화의 연계로 설계의 자동화와 소위 설계의 전문가 시스템(expert system)에 멀지않아 반드시 필요한 것으로 생각된다.

최적설계는 아직도 인식부족과 필요성의 미비등으로 일반 산업에서 운용이 적은 편이었으나 최근들어 비행기, 차량, 선박회사에서 최적설계와 유한요소법을 연계한 설계시스템 개발이 크게 응용될 정도에 와 있으며, 또 유한요소 소프트웨어 개발회사에서 최적설계와의 연계를 위한 민감도 해석등을 포함하여 일반 목적용의 상업화된 프로그램이 나올것이 예상된다. 지금까지는 설계의 특수성에 비추어 일반적 상업적 소프트웨어가 없었다. 최적설계와 마찬가지로 최근 활발한 분야의 하나가 재해적(reanalysis)기법의 연구 분야로 구조물 변경에 따른 고유진동수 예측, 실험과 일치시키기 위한 시스템 변수추정(system identification), 자유도를 추가 또는 삭제할 경우에의 동적 특성분석 또는 동특성을 아는 각각의 부분을 결합할 경우의 해석방법(modal synthesis)등이 크게 발전되고 기존 유한요소 프로그램과의 연계된 일반상업 프로그램이 나올 것이다.

유한 요소법은 그 프로그램이 있을때 실제응용이 가능하다. 문헌들에 의하면 전 세계적으로 600개내지는 수천개의 프로그램들이 나와 보급되고 있으나 실제 유한요소계산의 99% 이상은 약 30개 이내의 잘 알려진 프로그램으로 행해지고 이들은 거의 대부분 1970년도를 전후하여 개발된 것이다. 프로그램 기법의 발전과 함께 유한요소 프로그램 개발에도 적용이 시도되고 있으나 별로 상업적으로 성공적이지 못하고 기존의 방법에 의한 이미 자리잡은 프로그램만이 성공적임은 특기할만 하다. 이러한 프로그램의 개발은 적게는 50에서 많게는 수백 년인원(man-year)이 들어간 것으로 알려져 있었다. 그리고 각국은 계속해서 연간 수백만불씩 유한요소 관련 소프트웨어 개발 등에 투자하고 있으며, 연구소나 학계는 노력의 중복이 대부분이지만 비슷한 프로그램을 계속 작성하고 있다. 이는 새로운 방법이나 이론의 개발은 프로그램을 통하여 보여 주어야 하기 때문에 일어나는 것이다. 물론 이와 같을 중복을 피하기 위한 기구들이 특히 유럽등에서 형성되어 있으나 이들 조합으로는 상업용 소프트 개발은 목적이 상충되기 때문에 달성되기가 힘들다고 한다. 앞으로 수년간은 새로운 유한요소법의 대형 상업용 프로그램이 성공적으로 나올 가능성은 없는 대신 융통성 있는 특수목적용 프로그램이 계속 개발되고 상업화 되어 늘어난 전문가들에 의해 매우 유용하게 현장에 응용될 것이 기대된다.

4. 맺음 말

유한요소해석과 관련하여 그 분야와 과정을 소개하고 각각에 대하여 현재 연구의 중점방향과 예상되는 장래 집중연구 과제등을 기술하였다. 특히 공통적 기하학적 자료베이스에서 부터 해법자체와 나아가서 이들 결과의 설계응용의 자동화 또는 전문가 시스템화의 종합적인 방향이 장래 전문적인 제품설계의 방향으로 될 것을 주장하였다. 구분적인 연구는 사용자 편의의 전·후처리 프로그램, 대변형 비선형문제, 비선형 재료문제, 비선형 동적문제, 유한요소 모델링 기법, 설계와의 연계등에서 큰 진전이 있을 것으로 보고 이를 중심으로 기술하였다.