듀레이션과 債券포트폴리오의 이뮤니제이션

申　敏　植*

<目　次>

Ⅰ. 序　論

최근에 듀레이션(duration)[1]이라는 개념이 경제학, 재무관리, 보험론 등에서 자주 사용되고 있다. 특히 채권분석과 관련하여 듀레이션은 時間尺度로서 滿期(maturity)보다 정확한 개념이며 債券價格(bond price)과 債券收益率(bond yield)을 분석할 때 커다란 통찰력을 부여해 주는 것으로 알려져 있다. 듀레이션은 또한 利子率危險(interest rate risk)으로부터 이뮤니제이션(immunization)[2]될 수 있는 債券포트폴리오戰略(bond portfolio strategy)을 선택할 때도 유용한 분석도구로 사용될 수 있다.

듀레이션은 Macaulay[27]와 Hicks[20]에 의해 처음으로 사용되었다. 그러나 Macaulay와 Hicks는 각각 다른 목적에서 다른 방법으로 듀레이션을 도출하였다. 이후의 연구자들도 서로 다른 방법으로 듀레이션을 도출하였으며 이러한 방법상의 차이 때문에 개념상으로 많은 오해와 혼란을 불러 일으키기도 하고 잘못 사용되기도 하였다. 듀레이션은 資産으로부터 현금흐름이 발생하는 加重平均期間(weighted average of the time periods)으로 정의된다. 현금흐름이 발생하는 期間을 t라 하고 加重値를 w_t라 하면 듀레이션은 $\sum_{t=1}^{n} w_t \cdot t$로 표현된다. 가중치의 적절한 크기는 듀레이션이 사용되는 目的에 따라 달라지게 된다.

이 논문에서는 다양하게 정의되고 있는 듀레이션尺度를 문헌별로 정리해 보고, 특히 듀레이션이 利子率危險과 어떤 관계가 있으며 利子率危險으로부터 이뮤니제이션될 수

* 慶北大學校 經商大學 經營學科 專任講師

(1) duration을 平均償還期間으로 번역하는 학자도 있으나 여기서는 발음대로 듀레이션이라 부르기로 한다.

(2) immunization은 아직 일반적인 용어로 번역되지 않고 있으므로 이 글에서는 발음대로 이뮤니제이션이라고 부르기로 한다.

있는 채권포트폴리오戰略을 선택할 때 얼마나 유용한 분석도구로 사용될 수 있는지를 살펴 보고자 한다.

Ⅱ. 듀레이션과 滿期

Macaulay는 1938년에 발표된 利子率과 株價에 관한 기념비적인 연구에서, "단기이자율과 장기이자율간의 관계를 연구하기 위해서는, 적절한 길이(longness)尺度가 절실하다. 그래서 貸付를 할 때 時間要素를 나타내기 위해서 듀레이션이라는 용어를 사용하기로 했다. 滿期까지의 年數(number of years to maturity)는 적절한 듀레이션尺度인 것 같지 않다"〔27, p. 74〕라는 결론을 내렸다. 듀레이션을 정의하기 위해서, Macaulay는 "1회 이상 미래지급(future payment)이 발생하는 어떤 貸付의 듀레이션은 각 미래지급과 대응하는 개별貸付의 加重平均滿期(weighted average of the maturties)의 一種이 되어야 한다고 가정하는 것은 지극히 당연하다. 加重値로는 개별대부의 現在價値(present value)와 未來價値(future value), 두가지를 제안할 수 있다"〔27, p. 46〕라고 주장했다. 몇가지 가정적인 사례와 직관력을 근거로 하여, 그는 "未來價値로 加重하는 것은 분명히 부적절하고 現在價値로 加重하는 것이 더 적절한 것 같다"〔27, p. 47〕라고 결론을 내렸다. 또한 Macaulay은 계산상의 편의를 위해, 개별기간의 實質割引率(real rate of discount)을 계산하는 대신에 滿期收益率(yield to maturity)을 미래지급에 대한 割引率로 선택하였다. 따라서 Macaulay의 듀레이션은 다음과 같이 정의된다.

$$(1a)\quad D_1=\frac{\sum_{t=1}^{n}\frac{C_t\cdot t}{(1+r)^t}+\frac{A\cdot n}{(1+r)^n}}{\sum_{t=1}^{n}\frac{C_t}{(1+r)^t}+\frac{A}{(1+r)^n}}$$

단, D_1 : Macaulay의 듀레이션
C_t : t기의 쿠폰지급액
A : 만기지급액
r : 만기수익율
n : 만기

다시 t期의 현금흐름(쿠폰 및 원금)을 $s(t)$로 표현하면,

$$(1b)\quad D_1=\frac{\sum_{t=1}^{n}s(t)\cdot t\cdot(1+r)^{-t}}{\sum_{t=1}^{n}s(t)\cdot(1+r)^{-t}}$$

가 된다. 만약 r을 $s(t)$에 대하여 連續的으로 複利計算(continuously compounding)을 한다면,

$$(1c)\quad D_1=\frac{\sum_{t=1}^{n} s(t)\cdot t\cdot e^{-rt}}{\sum_{t=1}^{n} s(t)\cdot e^{-rt}}$$

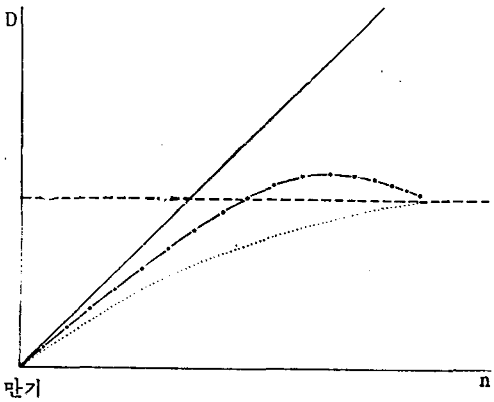
가 된다[22, p. 627].

(1)식으로 표시된 Macaulay의 듀레이션은 滿期보다 채권의 時間構造에 대해 더 완전한 情報를 제공해 준다. 滿期는 최종적인 滿期支給日字에 관한 정보만을 제공할 뿐, 그 이전에 발생하는 쿠폰지급일자에 관한 정보는 완전히 제공하지 못한다. 이에 대해 듀레이션은 채권에 발생하는 모든 현금흐름의 시기를 고려한다. 따라서 듀레이션은 만기지급만 발생하는 제로쿠폰債券(zero coupon bond)은 물론, 만기지급과 쿠폰지급이 동시에 발생하는 전통적인 논―제로쿠폰債券(non-zero coupon band)에 대해서도 적용된다.

제로쿠폰債券의 경우에는 최종적인 만기지급시에만 현금흐름이 발생하기 때문에 듀레이션이 만기와 일치하게 된다. 그러나 만기이전에 쿠폰지급이 발생하는 쿠폰債券의 경우에는 듀레이션이 반드시 만기보다 짧게 나타난다.

그러나 듀레이션과 만기의 관계는 〈圖 1〉에서 보는 바와 같이 단순한 線型的인 關係가 아니라 상당히 복잡하다. 額面價(par value) 또는 割增附(at a premium)로 판매되는 채권의 듀레이션은 만기가 길어짐에 따라 체감적인 비율(at a decresing rate)로 증가한다. 이때는 만기와 가격변동의 관계가 직접적으로 설명이 되고 Malkiel의 제 3 이론(3)

〈圖 1〉 채권의 만기와 듀레이션의 관계



단, n : 만기
D : Macaulay의 듀레이션
——— : 순수할인채권(pure discount bond)의 $n-D$ 관계
—·—·— : 할인채권(discount bond)의 $n-D$ 관계
·········· : 할증부채권(premium priced bond)의 $n-D$ 관계
– – – – : 영구채권(perpetual bond)의 듀레이션 한계
* 자료원 : Jack Clark Francis[17], op. cit., p. 205.

(3) Burton G. Malkiel은 채권가격과 만기수익율의 관계에 관한 5개의 일반이론을 도출하였다. 그중 제 3 이론은, "채권가격의 %변동은 만기가 길어질수록 체감하는 율로 증가한다"는 명제이다. 보다 자세한 내용은 Burton G. Malkiel[28]을 참조 바람.

〈表 1〉 시장수익율이 6%일 경우의 채권의 듀레이션

만기(년)	쿠폰이자율*			
	2%	4%	6%	8%
1	0.995	0.990	0.985	0.981
5	4.756	4.558	4.393	4.254
10	8.891	8.169	7.662	7.286
20	14.981	12.980	11.904	11.232
50	19.452	17.129	16.273	15.829
100	17.567	17.232	17.120	17.064
∞	17.167	17.167	17.167	17.167

* 쿠폰이자는 6개월마다 복리계산됨.
* 자료원 : L. Fisher and R.L. Weil[14], op. cit., p. 418.

도 타당하게 된다. 割引債券(discount bond)의 경우에는 듀레이션과 만기의 관계가 더욱 복잡해 진다. 할인채권의 듀레이션은 만기이전의 일정시점까지는 만기가 길어짐에 따라 체감적인 비율로 증가하다가 그 이후에는 다시 감소한다. 그리고 순수할인채권(pure discount bond)을 제외한 모든 채권의 경우에, 만기와 듀레이션의 差異는 만기가 길어질수록 커진다는 것도 〈圖 1〉에서 확인할 수 있다.

또한 Fisher와 Weil[14, p. 418]에 따르면, r을 만기수익율이라고 하고 N를 年間利子支給回數라고 할 때, 채권의 듀레이션限界는 $\frac{(r+N)}{r \cdot N}$에 의해 결정된다고 한다. 액면채권과 할증부채권의 경우에는 이 限界值가 곧 듀레이션의 최대치를 나타내 주지만, 할인채권의 경우에는 듀레이션의 최대치보다 적은 값이 된다. 市場收益率(market yield)과 쿠폰이자율이 주어질 경우에 만기와 듀레이션의 관계는 Fisher와 Weil에 의해 개발된 〈表 1〉에서 확인할 수 있다. 또한 듀레이션은 쿠폰이자율과 반대방향으로 변동한다는 것도 확인된다.

Ⅱ. 資本價値와 利子率

Macaulay보다 1년 뒤에, Hicks는 利子率의 變動이 資産價格에 미치는 영향을 검토하기 위해, 利子率에 대한 소득흐름의 資本價値의 彈力性(elasticity of the capital value)을 도출하였다. 이 彈力性은 時間次元을 가지고 있으므로 Hicks는 "average period"[20, p. 185]라고 불렀다. 물론 Hicks의 모형은 Macaulay의 듀레이션과 완전히 동일하지만, Hicks는 Macaulay가 동일한 척도를 이미 사용했다는 사실을 전혀 모르고 있었다. Hicks는 근본적으로 average period를 變動性尺度(volatility measure)로 사용했다.

Samuelson[30]은 이자율변동이 금융기관의 純價値의 現價(present value of net worth)에 미치는 영향을 검토하기 위해서, 平均利子率에 대한 流入과 流出의 1차 導函數를 계산해 냄으로써 결국 (1)식을 도출했다. Macaulay나 Hicks의 연구에 대해서는 전혀 모르고, Samuelson은 그의 척도를 "average time period"라고 부르고, 이자율변동에 대한 金融仲介機關의 敏感度를 분석하기 위해 이 개념을 사용하였다. 그는, "利

子率이 증가되면 平均償還期間이 平均受領期間보다 긴 금융중개기관에게 이득이 된다고 결론을 내렸다.

영국의 보험계리사 Redington〔29〕은 Samuelson의 논문을 전혀 모르고, 동일한 방법론을 사용하여 (1)식을 도출하였으며, 그의 척도를 "mean term"[4]이라고 불렀다. 그는, 企業資產의 現在價値의 1차도함수가 企業負債의 現在價値의 1차도함수와 같을 때는 이자율의 변동이 기업의 순가치에 영향을 미치지 않는다는 것을 발견하였다. 즉 Redington은, 자산의 "mean term"이 부채의 "mean term"과 같을 때 기업은 이자율변동으로부터 이뮤니제이션된다는 것을 처음으로 밝혔다.

Hicks, Samuelson, Redington은 그 어느 누구도 듀레이션을 소득흐름의 수명척도로 간주하지는 않았다. 더우기, 만약 Macaulay가 듀레이션을 정의할 때 직관적으로 現在價値대신에 未來價値를 선택했더라면, 이들이 도출한 척도들은 Macaulay의 듀레이션척도와 달라졌을지도 모른다.

Hopewell과 Kaufman〔21〕은 Hicks의 연구를 확대시켜, 이자율에 대한 채권가격의 함수는 Macaulay의 듀레이션과 비례한다는 사실을 (1)식의 듀레이션척도로부터 도출하였다. 즉 이자율이 소규모(Δr)로 변동할 경우 채권가격의 비율변화$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)$는 (2)식과 같이 듀레이션에 비례한다. Hopewell과 Kaufman은, 非割引債券(non discount bond)

$$(2)\quad \frac{dp}{p}=-D\cdot dr^{(5)}$$

단, p : 채권가격

D : duration

r : 이자율 또는 만기수익율

의 경우에는 채권가격의 이자율민감도(interest rate sensitivity)와 만기사이에 正(+)의 관계가 성립하지만, 할인채권의 경우에는 이러한 관계가 항상 성립하는 것이 아니라는 것을 설명하기 위해 (2)식를 사용하였다. 채권의 시간척도로서 만기대신에 듀레이션

(4) Redington은 "mean term"측도 뿐만 아니라, 특히 "immunization"이라는 용어를 처음으로 사용하였다는 점이 주목된다.

(5) 식 (2)의 도출과정은 다음과 같다.

먼저 쿠폰채권의 가격 (p)은 다음과 같이 표현된다.

$$p=\sum_{t=1}^{n}\frac{C_t}{(1+r)^t}+\frac{A}{(1+r)^n}$$

p를 r에 대하여 미분하면,

$$dp=\left\{\sum_{t=1}^{n}\frac{-C_t\cdot t}{(1+r)^{t+1}}+\frac{-A\cdot n}{(1+r)^{n+1}}\right\}\cdot dr=-\left\{\sum_{t=1}^{n}\frac{C_t\cdot t}{(1+r)^t}+\frac{A\cdot n}{(1+r)^n}\right\}\cdot\frac{dr}{(1+r)}$$

이 된다. 위의 두 式을 본문의 (1a)식에 대입한 다음 정리하면,

$$\frac{dp}{p}=-D\cdot\frac{dr}{1+r}$$

이 된다. 연속할인의 경우에는 r이 0에 수렴하므로,

$$\frac{dp}{p}=-D\cdot dr$$

이 된다.

을 사용하면 이러한 모순은 없어진다. 즉 액면가 또는 할증부로 판매되는 쿠폰채권의 경우, 듀레이션과 이자율위험은 만기가 길어짐에 따라 체감율로 증가한다. 할인쿠폰채권(discount coupon bond)의 경우에는 듀레이션과 이자율위험이 만기가 길어짐에 따라 체감율로 증가하다가 일정시점 이후에는 다시 감소한다.

또한 (1)식과 (2)식을 사용하면 채권가격에 대해서 널리 사용되고 있는 3가지 法則을 하나로 통합시킬 수 있다. 이들 법칙은, 利子率이 일정한 베이시스 포인트(basis point)[6]로 변동할 경우, (a) 쿠폰이자율이 낮을수록, (b) 시장수익율(market yield)이 낮을수록, 그리고 (c) 만기가 길수록, 債券價格의 상대적인 변동은 증가한다는 것을 말한다. 그런데 (1)식으로부터, 쿠폰이자율 및 시장수익율이 낮을수록 그리고 만기가 길수록, 채권의 듀레이션은 길어진다는 것을 알 수 있다. 또한 (2)식으로부터 쿠폰이자율이 높은 채권은 듀레이션이 짧아지기 때문에 이자율변동에 대한 價格變動性이 다른 채권보다 적다는 것을 알 수 있다. 물론 할인채권의 경우에는 채권가격의 상대적인 變動性이 최종만기 이전의 어떤 시점에서 최대가 될 수 있기 때문에 법칙(c)는 수정되어야 한다.

듀레이션이 채권의 이자율민감도척도로서 성공적으로 사용되자, Hopewell과 Kaufman은 다시, "만기보다는 듀레이션에 의해서 收益率曲線(yield curve)을 도출하는 것이 더 유용할지도 모른다"[21, p. 752]라고 제안하였다.[7] Carr, Halpern 및 McCallum[10]도 똑같은 생각을 약간 다른 방법으로 표현하였다. 그러나 Livingston과 Caks[26]는 수익율곡선을 듀레이션만의 함수로 나타내기 위해서는 先渡利子率(forward rate of interest)을 결정할 수 있어야 한다고 하였다. Haugen과 Wichern[19]은 금융자산의 利子率彈力性에 관한 보다 더 일반적인 연구에서 Hopewell과 Kaufman의 연구결과를 수학적으로 재확인하여 (3)식을 도출하였다.

$$(3)\quad (-1)\cdot el = D\cdot\frac{r}{1+r}$$

단, el : 채권의 이자율탄력성

즉 채권가격의 이자율탄력성은 듀레이션에 비례하며, 듀레이션이 길수록 이자율변동에 대한 채권가격의 변동성은 커진다는 것이다. 더우기 Boquist, Racette, 및 Schlarbaum[9]은 듀레이션개념을 채권과 주식의 體系的危險(systematic risk)개념과 통합시키고자 하였다.

그런데 (2)식을 해석할 때 유의해야 할 것은, 듀레이션 그 자체가 危險指數(Index of risk)라고 보는 것은 개념상으로 잘못이라는 것이다. 왜냐하면 危險尺度는 당연히 效用

(6) 채권분석을 할 경우 이자율, 채권수익율, 채권가격 등의 절대적 변동을 측정하기 위해 자주 사용된다. 예를 들어 채권수익율의 경우 절대치로 1%만큼의 변동이 생겼다면 100 basis point 변동되었다고 한다. 채권수익율이 12%에서 12.25%로 올랐다면 25 basis point 오른 것이다.
(7) 이러한 제안은 이미 Macaulay에 의해서 제기된 것이기도 하다. F.R. Macaulay[27], op. cit., pp. 44, 50~51, 51~62.

函數(utility function)를 가정하고 있기 때문이다. 더우기, 平均—分散構造(mean-variance framework)내에서도, 이자율변동이 모든 채권에 대해서 동일하지 않는한 듀레이션은 위험지수가 될 수 없다. 문헌상으로 듀레이션에 대한 또 다른 개념적 오해는, 利子率의 期間構造가 평면적(flat)이고 모든 이자율변동이 동일한 크기로 변동하지 않는 한, 듀레이션은 채권가격변동을 설명하는데 별다른 의미가 없다고 하는 점이다[11]. 이러한 主張은, 만기수익율이 동일한 쿠폰채권의 경우에도 수익율의 기간구조가 다르면 이자율의 변동이 채권가격에 미치는 영향도 달라진다는 점에 근거를 두고 있으며, 또한 (1)식으로 주어진 듀레이션尺度는 이자율의 기간구조가 평면적이고 加算的으로 변동할 때에만 채권 또는 債券포트폴리오를 이뮤니제이션시켜 준다고 하는 사실에 근거를 두고 있다. 그러나 이러한 사실과는 별도로 (2)식은 의미를 가지고 있으며, 채권의 이뮤니제이션條件(conditions for immunization)에 의해서 영향을 받지 않는다. (2)식의 듀레이션은 이뮤니제이션節次(immunization procedure)로부터 도출된 것이 아니다. 이뮤니제이션이 달성되든 안되든 듀레이션은 존재하게 된다.

Ⅳ. 利子率危險과 債券포트폴리오의 이뮤니제이션

듀레이션은 利子率危險으로부터 이뮤니제이션되는 債券 또는 債券포트폴리오를 선택할 때 가장 흥미로운 기준으로 사용된다. 이뮤니제이션(immunization)이란 투자자의 計劃期間(investor's planning period)동안 實現된 收益率(realized yield)이 최소한 約束된 滿期收益率(promised yield to maturity)과 동일해지는 것을 의미한다. 따라서 이뮤니제이션으로 危險資產을 어떤 계획기간 동안에 확실한 收益率이 보장되는 無危險資產으로 전환시킬 수 있다.

만약 어떤 投資者가 채권을 구입한 뒤에 이자율이 변동한다면 다음과 같은 두가지의 상반된 위험에 직면하게 된다. 즉, (1) 구입시점의 채권가격과 다른 가격으로 채권을 판매하게 될 가능성으로부터 생기는 價格危險(price risk)과, (2) 구입시점에서의 채권의 만기수익율과 다른 利子率로 쿠폰을 再投資하는 경우 생기는 쿠폰再投資危險(coupon reinvestment risk)이 동시에 발생하게 된다. 이자율이 상승하면 채권의 市場價値는 감소되지만 쿠폰의 再投資收益은 증대된다. 반대로 이자율이 하락하면 채권의 시장가치는 증가될 것이고 쿠폰의 재투자수익은 감소할 것이다. 따라서 이자율변동으로부터 채권을 이뮤니제이션시키기 위해서는 價格危險과 쿠폰再投資危險을 서로 相殺시켜야 한다. 그런데 흥미로운 것은 듀레이션이 바로 채권 또는 채권포트폴리오의 가격위험과 쿠폰재투자위험을 완전히 상쇄시켜 주는 期間과 같다는 것이다. 말하자면 투자자가 계획하는 채

권보유기간이 채권 또는 채권포트폴리오의 듀레이션과 동일하게 되면 투자자는 이자율위험을 완전히 면할 수 있는 것이다.

쿠폰채권의 경우에 보유기간동안 實現된 收益率이 채권구입시점의 滿期收益率과 다르게 나타났다면, 채권이 만기 이전에 판매되었거나, 쿠폰이 채권구입시점에 약속된 수익율과 동일한 수익율로 만기까지 충분히 재투자되지 않았기 때문이다. 만약 약속된 수익율이 실현되지 않으면 約束된 終價(promised terminal value)도 또한 실현되지 않는다. 쿠폰채권의 경우에 듀레이션은 항상 滿期보다 짧다. 그래서 듀레이션戰略은 만기 이전에 채권을 매각한다는 의미를 내포하고 있는 것이다[4, p. 365].

문헌상으로 보면 Samuelson[30], Redington[29], Grove[18]등은, 企業이 資產의 加重듀레이션을 負債의 加重듀레이션과 一致시켜줌으로써 利子率危險으로부터 이뮤니제이션시킬 수 있는 方法을 제시해 왔다. Fisher와 Weil은 債務不履行危險(default risk)과 稅金을 고려하지 않을 경우에, 투자자는 쿠폰채권포트폴리오의 듀레이션이 계획기간과 일치할 수 있도록 포트폴리오를 선택함으로써 이자율위험을 면할 수 있다고 하였다. 즉 이자율의 기간구조가 평면적이고 豫想하지 못한 利子率變動은 加算的 統計過程(additive stochastic process)을 따르며 連續型複利計算方法을 사용한다고 하는 制限的인 假定下에서는, 그가 도출한 채권포트폴리오의 듀레이션이 (1)식으로 표현된 Macaulay의 듀레이션과 동일하다고 보았다. 그러나 이자율의 기간구조는 평면적이지 않지만, 예상하지 못한 이자율변동은 여전히 加算的 統計過程을 따르고 있다면, 그의 듀레이션 척도는 달리 표현되어야 할 것이다. 加重値는 만기수익율보다 오히려 個別的인 單一期間割引率(individual one-period discount rate)의 함수관계로 보아야 할 것이다. Fisher와 Weil은, 비록 (1)식의 듀레이션척도와 다르긴해도 이러한 척도를 또한 듀레이션이라고 불렀다. 본 연구에서는 Macaulay의 듀레이션과 구별하기 위해서 Fisher와 Weil의 척도를 D_2라고 부르기로 한다. Fisher와 Weil의 D_2는 다음과 같이 정의된다.

$$(4)\quad D_2=\frac{\sum_{t=1}^{n}\frac{C_t\cdot t}{\prod_{t=1}^{n}(1+r_t)}+\frac{A\cdot n}{\prod_{t=1}^{n}(1+r_t)}}{\sum_{t=1}^{n}\frac{C_t}{\prod_{t=1}^{n}(1+r_t)}+\frac{A}{\prod_{t=1}^{n}(1+r_t)}}$$

단, r_t : t기에 있어서 單一期間割引率 또는 先渡利子率(forward rate)[8]

그런데 Fisher와 Weil은 D_2를 근거로해서 이뮤니제이션이 될 수 있는 債券포트폴리오를 구성하기 위해서 다음과 같은 充分條件(sufficient conditions)을 가정하고 있다.

1. 豫想하지 못한 利子率變動은 加算的 統計過程으로 발생하고,

(8) 만약 선도이자율(forward rate)이 모든 기간동안 동일하고 수익율곡선이 평면적인 구조를 이루고 있을 경우에는 D_1과 D_2는 동일하게 될 것이다.

2. 利子率의 期間構造上에서 利子率變動은 計劃期間동안 단지 1回만 발생할 수 있으며,
3. 計劃期間의 길이는 확실하게 固定되어 있다.

利子率쇼크(interest rate shock)는 加算的으로 발생하기 때문에 수익율곡선은 동일한 크기로 상향이동하거나 하향이동하게 된다. t기의 수익율곡선상의 이자율을 $r(t)$라 하고 이자율쇼크를 λ로 표시하고 λ는 t와 독립적으로 발생한다고 할때, $\lambda \geqq 0$의 이자율쇼크가 발생하면 수익율곡선은 (5)식과 같이 이동한다. 즉 Fisher와 Weil은 計劃期

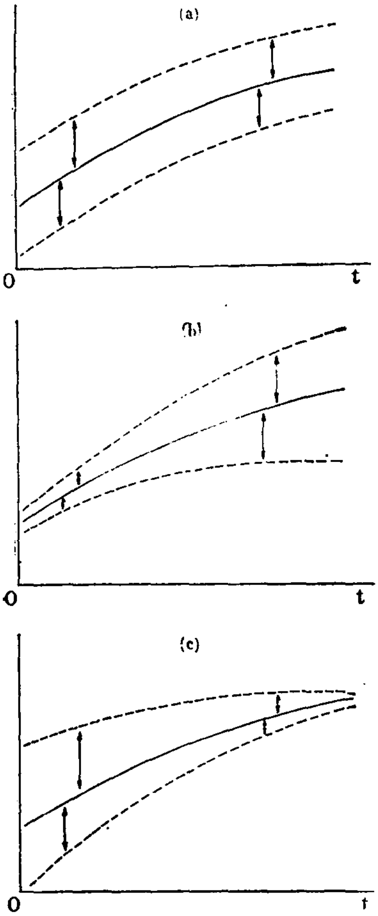
$$(5)\quad r^*(s) = r(t) + \lambda$$

間동안 利子率쇼크는 1回만 발생하고 그에따라 수익율곡선은 加算的으로 이동한다고 가정하였다.

Fisher와 Weil은 처음으로 실제적인 債券資料를 사용해서, 計劃期間의 길이와 동일한 滿期를 갖는 債券들을 단순하게 購入·保有하며 그 債券들의 쿠폰收益은 計劃期間의 殘餘期間과 동일한 滿期를 갖는 다른 債券들에 再投資하는 滿期戰略(maturity strategy)과 比較해서 그들의 듀레이션戰略이 얼마나 효율적으로 이뮤니제이션되는지를 실증적으로 연구하였다. 그들은 1925~1963년의 듀란利子率資料(Durand interest rate data)를 사용하였다. 計劃期間初의 기간구조를 기준으로 하여 듀레이션戰略을 효율적으로 수립하고, 每年마다 計劃期間의 殘餘期間과 동일한 듀레이션을 계속 유지하기 위해서 채권포트폴리오를 再構成하였다. 計劃期間의 길이를 다양하게 변화시켜 본 결과 그중 약 75%정도는 듀레이션戰略이 滿期戰略을 능가하는 것으로 나타났다. 그리고 實現된 收益率과 約束된 收益率간의 差異에 대한 標準偏差도 滿期戰略이나 20년짜리 채권을 每年 롤링오버(rolling over)하는 '純眞한' 戰略('naive' strategy)보다 계속 낮게 나타났다. 듀레이션戰略은 검토된 기간동안 완전하지는 않지만, 채권포트폴리오의 危險을 실질적으로 감소시켜 줄 수 있었다. 그래서 그들은, "적절하게 선택된 長期債券포트폴리오는 실질적으로 無危險하다"〔14, p. 423〕라고 결론을 내렸다. 그들은 또한 "計劃期間의 길이를 q라 하고 채권의 듀레션이션을 D라고 할 때, $D_J \leqq q \leqq D_K$의 조건을 만족시켜 주는 두개의 債券이 存在하기만 하면 이뮤니제이션될 수 있는 投資가 가능하다"〔14, p. 429〕는 것을 증명하였다. 현실적으로는 이자율쇼크가 假定과 같이 加算的인 통계과정을 따르지 않을 수도 있고 債券포트폴리오를 再構成할 때 시간이 경과됨에 따라 입수된 새로운 情報를 고려하지 않는다는 사실에 비추어 볼 때, 이와같은 연구결과는 대단히 놀라운 것이다. Fisher와 Weil의 논문이 발표된 1971년 이후에, 많은 새로운 논문들이 Macaulay의 듀레이션과는 다른 듀레이션척도를 사용해서 채권포트폴리오를 이뮤니제이션시키는 문제를 취급하고 있다.

債券 또는 債券포트폴리오를 이뮤니제이션시켜 주는 듀레이션尺度는 利子率쇼크가 발

〈圖 2〉 이자율쇼크와 수익율곡선의 이동



생하는 統計的 過程을 어떻게 假定하느냐에 따라 달라진다. 앞에서 언급한 바와같이 Fisher와 Weil은 利子率쇼크에 따라 收益率曲線이 加算的으로 移動한다고 假定하고 채권포트폴리오를 이뮤니제이션시킬 수 있는 듀레이션척도(D_2)를 도출하였다.

Bierwag와 Kaufman에 의하면, 利子率쇼크의 統計的 過程에 대한 假定을 다르게 할 경우 Fisher와 Weil의 D_2는 채권포트폴리오를 이자율위험으로부터 적절하게 이뮤니제이션시켜 주지 못한다고 한다. 말하자면 利子率쇼크의 통계적과정이 Fisher와 Weil이 假定한 바와 같이 (5)식과 같이 加算的인 경우도 있지만 (6)식과 같이 乘數的인 경우도 있다. 도표로 나타내면, 連續的 複利計算方法을 사

$$(6)\ r^*(t)=r(t)(1+\lambda)$$

용할 경우 利子率의 加算的인 λ쇼크(additive λ-shock)가 발생하면 收益率曲線은 〈圖 2a〉에서 보는 바와 같이 固定的인 λ크기만큼 加算的으로 移動하게 되지만, 이자율이 乘數的인 λ쇼크(multiplicative λ-shock)로 발생하면 收益率曲線은 〈圖 2b〉에서 보는 바와 같이 주어진 λ%만큼 수직적으로 移動하게 된다.

Bierwag는 그의 다른 논문 〔3〕에서 利子率쇼크가 加算的으로 발생하기도 하고 乘數的으로 발생하기도 하는 복잡한 경우에는 收益率曲線이 (7)식과 같이 이동한다고 하였다.

$$(7)\ r^*(t)=r(t)(1+\lambda_1)+\lambda_2$$

단, λ_1 : 승수적인 이자율쇼크

λ_2 : 가산적인 이자율쇼크

다. Bierwag와 Kaufman은 이전의 연구들을 일반화시켜 收益率曲線은 加算的이라기보다는 乘數的으로 移動한다고 보고, 듀레이션척도를 D_2와는 약간 다르게 (8)식과 같이

$$(8)\ r(D_3)=\frac{\sum_{t=1}^{n} s(t)\cdot(t/q)\cdot r(t)\cdot\{1+r(t)\}^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} s(t)\cdot\{1+r(t)\}^{-t}}$$

단, q : 투자자의 計劃期間의 길이

정의하였다. 이들이 정의한 듀레이션척도를 D_3라고 할 때, 이자율의 기간구조가 平面的

이지 않는한 D_2와 다르다. 그러나 만기가 20년 미만인 쿠폰채권의 경우에는 D_1 또는 D_2와 별다른 差異가 없다.

그런데 미국의 경우 2차대전후에 利子率의 실계적인 움직임은 Malkiel[28], Yawitz, Hempel, 및 Marshall[36]등의 연구에 따르면, 〈圖 2c〉에서 보는 바와같이 短期利子率이 長期利子率보다 더 變動이 심하고 收益率曲線은 右上向하는 형태로 밝혀졌다. 따라서 加算的인 利子率쇼크 또는 乘數的인 利子率쇼크 어느 쪽도 이러한 實證的인 事實과 合致되지 않으며, 그렇게 되면 그러한 假定下에서 도출된 듀레이션척도도 또한 現實世界에서 채권포트폴리오를 이자율위험으로부터 효과적으로 이뮤니제이션시켜 줄 수 없게 된다. Khang[24]은 短期債券의 收益率이 長期債券의 收益率보다 더 크게 변동하는 특수한 경우에는 收益率曲線이 (9)식의 형태로 이동한다고 가정하였다.

$$(9)\quad r^*(t)=r(t)+\frac{\lambda}{1+\alpha t}$$

여기서 α는 長期利子率의 變動에 대한 短期利子率의 變動의 比率을 나타내는 媒介變數이다. 따라서 收益率曲線은 利子率쇼크에 따라 加算的으로 移動하지만 α變數의 크기와反比例한다. Khang은 短期利子率이 長期利子率보다 더 크게 변동하는 특수한 경우에 채권포트폴리오를 이뮤니제이션시킬 수 있는 듀레이션尺度(D_4)를 (10)식과 같이 정의하였다.

$$(10)\quad \ln(1+\alpha D_4)=\frac{\sum_{t=1}^{n} s(t)\ln(1+\alpha t)\{1+r(t)\}^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} s(t)\{1+r(t)\}^{-t}}$$

이상에서 살펴본 바와 같이 利子率쇼크에 따라 收益率曲線이 변동하는 통계적 과정을 어떻게 假定하느냐에 따라서 利子率危險으로부터 債券포트폴리오를 이뮤니제이션시킬 수 있는 듀레이션尺度는 다양하게 정의될 수 있다. 그러나 Bierwag에 따르면, 利子率쇼크가 발생하는 統計的 過程 如何에 따라서는 채권포트폴리오의 이뮤니제이션戰略(immunization strategy)을 수립할 수 없는 경우도 있다. 만약 利子率쇼크가 投資計劃期間동안에 한번이상 발생한다면 듀레이션戰略은 部分的인 이뮤니제이션效果 밖에는 달성할 수 없게 된다. 즉 利子率의 期間構造에 대한 利子率쇼크가 計劃期間중에 간헐적으로 발생한다면 債券投資의 終價(terminal value)는 계획기간중에 발생하는 모든 이자율쇼크와 함수관계로 표현되어야 한다.

한편 Cox, Ingersoll, 및 Ross[12]는 전혀 새로운 접근방법을 시도하여 소위 stochastic duration 척도를 제안하였다. 그들은 기간구조가 고정적인 패턴으로 변동한다고 볼 수 없다고 주장하였다. 만약 기간구조가 고정적인 패턴으로 변동하리라는 것을 예측할 수 있다면 裁定去來機會(arbitrage opportunity)가 발생하게 되고, 높은 쿠폰채권은 낮은 쿠폰채권을 지배하게 될 것이다. 그래서 그들은 단기이자율이 Gauss-Markov 過

程을 따라 변동한다는 가정하에 期間構造의 一般均衡模型을 개발하고, 이로부터 채권 또는 채권포트폴리오의 이뮤니제이션에 적용시킬 수 있는 stochastic duration 尺度를 도출하였다. 나아가 Bierwag, Kaufman, 및 Toevs[6]는 이자율의 기간구조에 관한 一般均衡模型의 구조내에서 single-factor CAPM과 유사한 형태로 single-factor duration 模型을 도출하였다.

V. 債券포트폴리오戰略的 含蓄

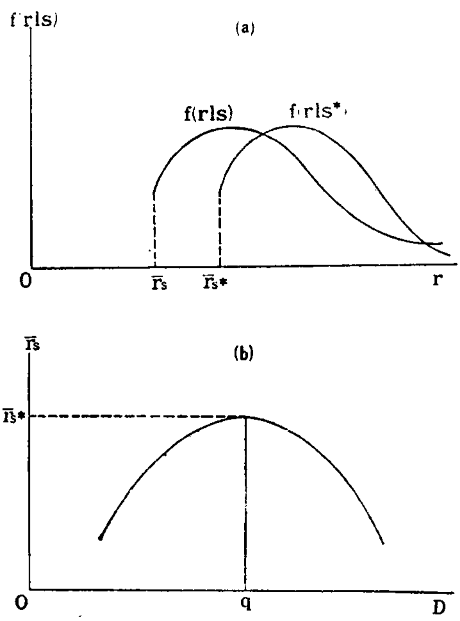
債券포트폴리오의 듀레이션尺度는 포트폴리오를 구성하는 개별채권의 듀레이션을 加重平均함으로써 간단히 계산할 수 있다. 채권포트폴리오를 구성하는 j번째 채권에 투자된 포트폴리오가치의 比重을 w_j라 하고 j번째 채권의 듀레이션을 D_j라고 하면, 債券포트폴리오의 듀레이션尺度는 (11)식과 같이 정의된다. 그런데 투자자가 채권포트폴리

$$(11)\quad D=\sum_{j=1}^{n} w_j D_j$$

오의 構成을 아주 다양하게 선택할 경우에도, 채권포트폴리오의 듀레이션이 동일한 크기로 나타날 수 있다. 예를 들면, 만기가 짧은 채권과 만기가 긴 채권을 집중적으로 선택하는 '아령型' 포트폴리오(barbell portfolio)는 만기의 길이에 따라 채권을 분산시키는 '사다리型' 포트폴리오(laddered portfolio)와 동일한 듀레이션을 가질 수 있다. 어쨌든, (11)식으로 계산된 채권포트폴리오의 듀레이션이 투자자의 計劃期間과 일치하게 되면, 채권포트폴리오의 듀레이션은 채권포트폴리오의 이뮤니제이션을 위한 最適分散戰略(optimal diversification strategy)으로 사용될 수 있다.

Bierwag와 Khang[5, 7]에 의하면 채권포트폴리오의 이뮤니제이션은 곧 투자자가 最小可能收益率(minimum possible return)을 最大化시킬 수 있는 最適 minimax 戰略이 될 수 있다고 한다. 말하자면, 투자자가 Fisher와 Weil의 假定下에서 그의 투자계획기간동안에 최소가능수익율을 최대화시키고자 할 때, 채권포트폴리오의 이뮤니제이션戰略이 바로 最適戰略이 된다는 것이다. 만약 이자율쇼크가 발생할 확율이 $p(\lambda<0)>0$이고 $p(\lambda>0)>0$이며 이자율쇼크후에 이자율의 기간구조를 나타내는 收益率曲線이 (5)식과 같이 이동한다면, 모든 債券포트폴리오戰略과 대응되는 最小收益率(minimum rate of return)이 존재할 것이다. 즉 각 채권포트폴리오전략은 確率이 $p(r_s \geq \bar{r}_s)=1$이 되는 그러한 收益率 r_s를 가지게 될 것이다. $\bar{r}_{s^*}=\max_s(\bar{r}_s)$를 달성시켜 주는 戰略 s^*가 바로 이뮤니제이션戰略이 된다. 이와같은 minimax 戰略을 例로 들기 위해서, 〈圖 3a〉의 $f(r|s)$를 戰略 s와 대응하는 수익율 r의 밀도함수(density function)라고 하자. $f(r|s)$의 특징의 하나는 $\bar{r}_s$點에서 切斷되어 있다는 점이다. 이뮤니제이션戰略 s^*는 $f(r|s^*)$의 밀

〈圖 3〉



도함수를 가지고 있고 $\bar{r}_{s*} \geq \bar{r}_s$인 $\bar{r}_{s*}$點에서 切斷된다. 지금 $\bar{r}_s$를 戰略 s를 위한 最小可能收益率이라고 하자. 그렇게되면, $\bar{r}_{s*} \geq \bar{r}_s$이기 때문에 이뮤니제이션戰略은 最小收益率을 最大化시켜 주는 전략이 된다. 또한 戰略 s는 $D(s)$라는 특별한 듀레이션값을 가진다는 것도 확인할 수 있다. 〈圖 3b〉에서는, 이뮤니제이션전략의 듀레이션 $D(s^*)$가 투자자의 계획기간 q와 일치한다는 것을 알 수 있다. 즉 $D(s^*)=q$일 때 이뮤니제이션전략이 달성될 수 있다. 이뮤니제이션전략의 수익율 $\bar{r}_{s*}$는 분명히 각 전략의 듀레이션 $D(s)$와 대응하는 최소수익율 $\bar{r}_s$중에서 최대치를 나타내 준다.

또한 戰略 s에 대한 危險尺度는 $\gamma>0$이라고 할 때 (12)식과 같이 정의할 수 있다. (12)식의 危險尺度는 確率的 支配(stochastic

$$(12)\quad H(\gamma : s)=\int_0^{\bar{r}_{s*}}(r-\bar{r}_{s*})^{\gamma}df(r|s)$$

dominance)의 개념과 일맥상통하는 Fishburn[3]의 위험척도이다. 전략 s의 기대수익율을 $E(r|s)$라고 표현하면, 투자자는 $\{E(r|s),\ H(\gamma : s)\}$에 따라 주관적으로 전략의 우선순위를 결정할 수 있을 것이다. 이때, $(H(\gamma : s^*)$인 전략은 無危險戰略(riskless strategy)으로서 다른 전략과 비교할 때 기준으로 사용될 수 있다. 채권포트폴리오전략의 우선순위를 채권포트폴리오의 기대수익율과 Fishburn의 위험척도라는 두개의 母數(two parameters)를 사용해서 결정한다는 것은, 기대수익율이 최대로 나타나고 채무불이행위험이 없는 채권포트폴리오를 선택해야 한다는 의미를 내포하고 있다.

한편 채권포트폴리오의 듀레이션尺度는 채권포트폴리오를 이뮤니제이션시키는데 유용하게 사용될 수 있는 데도 불구하고 債券포트폴리오戰略을 다루고 있는 수많은 實證的 硏究에서는 오히려 듀레이션을 度外視하였다. 債券포트폴리오戰略은 주로 金融機關에서 사용할 수 있도록 設計되었으며, 전형적으로 '아령型' 또는 '사다리型'滿期構造를 갖는 債券포트폴리오로 구성되었다. 그런데 이들 연구결과는 다양하게 나타나고 있다. 예를 들면, Watson[33]은 "채권포트폴리오를 만기가 짧은 채권과 만기가 긴 채권그룹으로 分割할 때, 즉 '아령型'포트폴리오를 구성할 때 가장 效率的이다"라고 결론을 내렸다. Wolf[35]와 Bradley 및 Crane[8]도 비슷한 연구결과를 제시하였다. 반면에, Fogler, Groves, 및 Richardson[15]은 "아령型포트폴리오戰略은 이전의 연구분석에서 제시된 만큼 效率的이지 못하다"라고 결론을 내렸다.

이와같은 시뮬레이션硏究에서 나타난 相反된 結果는 채권포트폴리오전략에 관한 최근의 發展된 理論의 觀點에서 보면 별로 놀라운 것이 아니다.(9) 이들 硏究에서는 채권포트폴리오전략을 수립할 때 듀레이션尺度를 사용하지 않고 있기 때문에 특별한 아령型포트폴리오가 사다리型포트폴리오나 다른 어떤 채권포트폴리오보다 유리하다고 명백하게 결론을 내리기가 어렵다. 또한 相異한 기간동안의 연구결과를 비교한다는 것은 더구나 투자자의 '眞'計劃期間('true' planning period)에 관한 지식이 없이는 똑같이 애매한 문제가 발생한다.

어떠한 債券포트폴리오라도 듀레이션尺度로 설명할 수 있다. 포트폴리오를 구성하는 個別債券의 滿期構造가 아무리 다르드라도 각 債券포트폴리오는 어떤 특정한 듀레이션을 가진다. 아령型 및 사다리型 포트폴리오도 각각의 듀레이션으로 요약될 수 있다. 앞에서 언급한 硏究들은 듀레이션이 서로 다른 포트폴리오를 사용하였고 투자자의 계획기간도 서로 다르게 가정하고 있기 때문에 相異한 結論에 이르는 것은 당연하다. 더우기 硏究에 사용된 포트폴리오의 듀레이션과 동일한 듀레이션을 갖는 다른 포트폴리오도 얼마든지 있을 수 있기 때문에 이러한 연구의 결론은 연구에 사용된 특정한 포트폴리오에만 적용될 수 없고 동일한 듀레이션을 갖는 모든 포트폴리오에도 적용될 수 있다. 예컨데, Fogler, Groves, 및 Richardson이 연구에 사용한 사다리型포트폴리오는 다른 많은 사다리型포트폴리오와 동일한 듀레이션을 가지고 있으며, 심지어는 다른 아령型포트폴리오와도 동일한 듀레이션을 가지고 있었다.

듀레이션分析은 앞에서 언급한 시뮬레이션연구의 相反된 結果를 설명해 준다. 동일한 채권포트폴리오일지라도 듀레이션과 計劃期間의 길이가 변동함에따라 포트폴리오의 危險—收益關係가 달라질 수 있다. 그래서 채권포트폴리오의 危險—收益프론티어(risk-return frontiers)를 확정하기 위해서는 먼저 計劃期間을 고정시켜야 한다. 포트폴리오의 듀레이션과 투자자의 計劃期間이 一致하는 點의 兩側에서는 實現된 收益率이 約束된 收益率보다 낮게 나타날 確率이 零이상이 된다. 따라서 平均—分散構造(mean-variance framework)내에서 포트폴리오의 危險—收益프론티어는 계획기간의 길이와 포트폴리오의 듀레이션간의 關係에 따라 달라진다.(10) 포트폴리오의 듀레이션이 투자자의 계획기간을 초과할수록 危險은 증가한다. 따라서 듀레이션이 가장 짧은 포트폴리오전략이 危險도 가장 적다.

(9) 물론 부분적으로는 실현된 수익율의 척도가 달랐거나 목적함수의 차이에서 기인하는 경우도 있다.
(10) Fisher와 Weil은, "투자자가 합리적으로 계획기간을 설정하지 않고 있다면, 채권에 투자해서는 안된다"라고 주장할 정도로 계획기간의 중요성을 강조하고 있다. L. Fisher and Roman L. Weil[14], op. cit., p. 424.

Bradley와 Crane은 計劃期間의 效果를 처음으로 그들의 시뮬레이션연구에 도입하였다. 그들은 "듀레이션개념은 시뮬레이션硏究結果를 설명하는데 도움이 된다"라고 결론을 내렸다. 아령型 및 사다리型포트폴리오의 듀레이션이 計劃期間의 길이에 접근할수록 포트폴리오의 危險은 감소되었다.

듀레이션構造는 또한 시뮬레이션연구에서 사용된 것보다 더 우수한 危險尺度를 제시해 준다. 시뮬레이션연구에서는 주로 계획기간중에 實現된 收益率의 分散을 危險尺度로 사용하였다. 실현된 수익율의 分散이 낮을수록 危險도 낮아진다고 보았다. 이 위험척도는 미래의 현금흐름이 불확실한 채권에 대해서는 적절할지 몰라도 채무이행위험이 없는 債券(default-free bond)에 대해서는 적절하지 못하다. 이런 채권은 쿠폰과 원금의 지급이 약속되어 있다. 約束된 收益率을 실현하는데 있어서 유일한 不確實性은 채권을 구입한 후에 豫想하지 못한 利子率變動으로부터 발생한다. 이러한 變動은 채권의 終價나 쿠폰의 再投資收益에 영향을 줄 수 있다. 約束된 收益率보다 적은 收益率이 실현되는 不確實性은 채권의 듀레이션이 투자자의 計劃期間과 一致할 수 있도록 채권을 선택함으로써 제거된다. 그렇게 함으로써 구입시에 약속된 收益率은 최소한 실현되고 채권의 危險은 효율적으로 감소된다.(11) 채권투자자가 주로 관심을 가지는 것은 특정한 計劃期間동안에 約束된 收益率과 實現된 收益率간에 差異가 얼마만큼 발생하느냐하는 것이다. 그래서 채권의 危險을 말할 때는 計劃期間의 길이와 約束된 收益率에 관한 사항을 반드시 포함시켜야 한다.

말하자면, 債券不履行危險이 없는 債券포트폴리오(default-free bond portfolio)의 경우에는 투자자의 計劃期間과 約束된 收益率을 명확히 고려하지 않고 危險—收益프론티어를 도출하거나 債券포트폴리오戰略을 수립하는 것은 無意味한 것이다. 危險—收益프론티어는 포트폴리오의 듀레이션과 투자자의 計劃期間간의 差異와 관련되어 있다. 兩者가 一致하는 點에서 투자자는 최소한 약속된 수익율을 실현하며 포트폴리오의 危險은 효율적으로 감소된다. 이 點의 兩側에서는 약속된 수익율을 실현할 危險이 오히려 증가한다. 그래서 똑같은 채권포트폴리오일지라도 計劃期間이 달라짐에 따라 어떤 투자자에게는 無危險하고 다른 투자자에게는 危險한 것으로 간주될 수 있다. 특정한 計劃期間동안에는 이뮤니제이션이 되는 포트폴리오전략이라도 투자자에 따라 計劃期間이 더 길어지거나 짧아지게 되면 이뮤니제이션이 되지 않을 수 있다.

따라서 資本資産價格決定模型(CAPM)의 관점에서 보면 어떤 채권에 대한 특정한 β

(11) 채권포트폴리오의 듀레이션이 계획기간과 일치할 경우에는 약속된 수익율이 보장되지만, 쿠폰채권의 경우에는 약속된 수익율보다 더 높은 수익율이 실현되는 수가 있다. 따라서 실현된 수익율의 분산으로 위험을 측정하게 되면 쿠폰채권의 포트폴리오를 위험한 것으로 보게 된다. 보다 정확한 위험측도는 약속된 수익율과 관련되는 準分散(semi-variance)의 형태가 될것이다. Peter C. Fishburn[13], op. cit., pp. 116~126.

係數는 투자자에따라 달리 해석될 수 있다. Kaufman에 의하면, β係數는 자산의 듀레이션, 시장포트폴리오의 듀레이션 및 收益率測定期間(differencing intervals)[12]과 함수관계가 있다. 만약 收益率測定期間이 計劃期間과 정확하게 일치한다면, 다시 포트폴리오의 듀레이션이 이들 期間과 일치할 수 있도록 선택해야만 포트폴리오의 危險이 효율적으로 분산되어 $\beta=0$이 된다. 만약 수익율측정기간이 더 길거나 짧게 되면 $\beta\neq 0$이 된다. β의 값은 計劃期間이 수익율측정기간과 일치하는 投資者에게만 意味가 있다. 즉 投資者들은 수익율측정기간이 그의 계획기간과 일치하도록 선정되었을 때 비로소 채권 또는 채권포트폴리오의 β에 관심을 가진다는 것이다.

한편 Babcock[1]는 內部收益率(internal rate of return)로부터 듀레이션개념을 논리적으로 도출하였다. 특히 그에 따르면, 일정한 투자계획기간동안($q>0$)에 어떤 자산 또는 자산포트폴리오에 투자함으로써 實現된 收益率(r)은, (13a)식과 같이 자산 또는 자산포트폴리오의 內部收益率(i)과 투자자가 가정하는 再投資收益率(k)의 加重平均值로 표현될 수 있다. 이때, 加重值 w는 투자자의 계획기간에 대한 듀레이션의 비율, 즉 D/q와 정확하게 일치하고, 또한 k는 재투자기간동안 i와 일치할 뿐만 아니라 D/q와도 거의 일치하게 될 때, 채권포트폴리오를 포함하여 어떤 자산에 대한 實現된 收益率은 (13b)식과 같이 표현될 수 있다. (13b)식에 의하면, 투자자가 $D=q$인 채권 또는 채권포트폴리오를 선택할 경우, 實現된 收益率은 再投資危險으로부터 이뮤니제이션된다는 것을 명백히 알 수 있다. $D=q$일 때 r은 i와 일치하게 된다.

$$(13a)\quad r=w\cdot i+(1-w)\cdot k$$

$$(13b)\quad r\equiv(D/q)\cdot i+(1-D/q)\cdot k$$
$$\equiv i+(1-D/q)(k-i)$$

단, r : 자산 또는 자산포트폴리오의 실현된 수익율
i : 〃 내부수익율
k : 〃 재투자수익율
D : 〃 듀레이션
b : 〃 투자계획기간
w : 가중치

또한 포트폴리오理論은 平均—分散分析으로부터 도출되는 경우가 많기 때문에 債券포트폴리오戰略을 平均—分散分析과 관련시켜 보는 것도 흥미롭다. 이뮤니제이션을 달성시켜 주는 채권포트폴리오전략은 (14)식과 같이 표현되는 平均自乘誤差(mean squared error)를 最小化시켜 준다.

$$(14)\quad m^2(s)=E\{(r-\bar{r}_{s^*})^2|s\}=Var(r|s)+\{E(r|s)-\bar{r}_{s^*}\}^2$$

(12) 실증적인 연구에서는 실현된 수익율을 측정하기 위해서 측정기간의 시간적인 간격을 임의로 설정하였다.

만약 $m^2(s)$가 적절한 危險尺度로 사용될 수 있다면, 이뮤니제이션戰略은 $m^2(s)$가 최소로 되기 때문에 無危險하다고 할 수 있다. 그러나 傳統的인 포트폴리오理論에따라 平均—分散基準, 즉 $\{E(r|s), Var(r|s)\}$에 의해 포트폴리오전략의 우선순위를 결정한다면, 이뮤니제이션戰略 s^*보다 오히려 선호되는 논이뮤니제이션戰略(nonimmunization strategy)이 존재할 수 있다. 즉, $E(r|s)>E(r|s^*)$와 $Var(r|s)<Var(r|s^*)$의 조건을 만족시키는 논이뮤니제이션 전략이 존재할 수 있다. 平均—分散基準에 따르면, 이뮤니제이션되는 채권포트폴리오가 오히려 非效率的인 채권포트폴리오로 판단될 수 있고, 기대수익율이 더 높고 분산이 더 낮은 다른 채권포트폴리오가 존재할 가능성이 있게 된다. 그러나 평균—분산기준에 의해 효율적인 것으로 보이는 채권포트폴리오는 더 낮은 기대수익율과 Fishburn의 '下向的'危險('down side' risk)을 내포하고 있을 수 있다. 즉 그러한 채권포트폴리오의 수익율 $\tilde{r}_s$는 이뮤니제이션戰略이 보장하는 최소수익율 $\tilde{r}_{s^*}$보다 감소할 위험이 있다. Kaufman[23]은 $m^2(s)$ 또는 다른 위험척도를 사용해서 측정한 채권포트폴리오의 危險이 투자자의 계획기간과 채권포트폴리오의 듀레이션에 따라 어떻게 변동하는지를 검토하고 있다.

다른 한편 Fong과 Vasicek[16]는 채권포트폴리오의 이뮤니제이션戰略에 관하여 색다른 접근을 시도하고 있다. 그들의 주장에 의하면, 이자율변동에 대한 채권포트폴리오의 危險露出程度는 이자율변동과 함수관계가 있을 뿐만 아니라 채권포트폴리오의 構造에 의해서도 달라진다는 것이다. 특히 채권포트폴리오의 구조에 의해 결정되는 위험을 이뮤니제이션危險(immunization risk)이라고 부르고, 이 위험척도를 최소화시킴으로써 이자율변동에 대한 채권포트폴리오의 위험노출을 최소화시킬 수 있는 最適이뮤니제이션戰略이 달성될 수 있다고 하였다.

Ⅵ. 結　論

지금까지 문헌상으로 각각 다르게 전개되어온 듀레이션척도들을 정리해 보았다. 또한 듀레이션개념은 채권 또는 채권포트폴리오분석에 유용한 도구로 사용될 수 있다는 것을 살펴보았다.

듀레이션척도는 단 한개만의 척도로 정의되는 것이 아니라 듀레이션을 어떠한 목적에 사용하느냐에따라 다양하게 정의되고 있다. Macaulay는 현금흐름의 時間尺度로서 듀레이션을 사용하였고, Hicks, Samuelson, Redington 등은 이자율에 대한 자본가치의 彈力性尺度로서 듀레이션을 도출하였으며, Fisher와 Weil 이후의 많은 학자들은 利子率危險에 대한 채권포트폴리오의 이뮤니제이션戰略과 관련하여 듀레이션을 다양하게 정의하였다. 지금까지 듀레이션을 둘러싸고 많은 오해와 혼란이 빚어졌던 것은 듀레이션

이 목적에 따라 다양하게 정의될 수 있다는 사실을 이해하지 못한데서 비롯되었다고 볼 수 있다.

Fisher와 Weil에 따르면, 세금과 거래비용을 무시하고 수익율곡선은 이자율쇼크에 따라 加算的으로 이동한다고 가정하며 채무불이행위험이 없는 채권 또는 채권포트폴리오를 투자대상으로 선택할 경우, 채권 또는 채권포트폴리오의 듀레이션이 투자자의 계획기간과 일치하게 되면 約束된 收益率을 최소한 實現할 수 있기 때문에 결국 채권 또는 채권포트폴리오는 利子率危險으로부터 이뮤니제이션된다는 것이다. 그후 Bierwag, Kaufman, Khang 등은 Fisher와 Weil의 듀레이션모형을 더욱 확대시켰다. 그들은 이자율쇼크에 따라 수익율곡선이 이동하는 과정을 어떻게 가정하느냐에따라 듀레이션척도는 다양하게 정의될 수 있다고 하였다. 또한 이자율쇼크가 단순히 加算的으로 발생할 뿐만 아니라 보다 복잡하게 乘數的으로 발생하는 경우에도 채권 또는 채권포트폴리오의 이뮤니제이션이 달성될 수 있다고 하였다. 나아가, 이자율은 Gauss-Markov 과정을 따라 변동한다는 가정하에 확율적인 듀레이션척도가 개발되기도 하였고, single factor CAPM과 유사한 형태로 single factor 듀레이션模型이 모색되기도 하였다.

지금까지의 논의를 확대시키면, 듀레이션은 채권포트폴리오전략에 관하여 몇가지 중요한 의미를 내포하고 있다. 듀레이션을 이용한 채권포트폴리오 이뮤니제이션戰略은 minimax 전략으로 이해할 수 있다. 또한 CAPM의 관점에서 보면 채권포트폴리오의 β 계수는 채권포트폴리오의 듀레이션, 시장포트폴리오의 듀레이션, 수익율측정기간 등과 함수관계가 있는 것으로 알려져 있으며, 이를 무시하고 있는 기존의 시뮬레이션 연구는 비판을 받아 마땅하다. 그리고 전통적인 포트폴리오이론에따라, 소위 平均—分散基準에 의해 선택된 채권포트폴리오전략은 Fishburn의 危險을 내포하고 있을 가능성이 있기 때문에 듀레이션을 이용한 채권포트폴리오전략보다 非效率的일 수도 있다. Babcock는 內部收益率로부터 듀레이션개념을 논리적으로 도출해냄으로써 듀레이션을 적용할 수 있는 또하나의 영역을 개척하였다.

앞으로도 듀레이션개념이 유용한 분석도구로 사용될 수 있는 분야는 여전히 남아 있으리라 생각된다. 특히 듀레이션은 채권포트폴리오의 危險을 이해하는데 커다란 통찰력을 부여하게 될 것이다. 듀레이션개념은 채무불이행위험이 없는 채권 또는 채권포트폴리오는 물론, 채무불이행위험이 있는 채권 또는 채권포트폴리오, 나아가 株式에 대해서도 적용될 수 있을 것이다. 현재의 單一計劃期間 듀레이션모형은 多數計劃期間 듀레이션模型(multi-planning Period duration model)으로 발전될 수도 있을 것이고 CAPM과 통합될 가능성도 전혀 배제할 수는 없다. 또한 듀레이션개념이 재무분석가들에 의해 실무적으로 유용하게 사용되기 위해서는 경험적 연구도 계속 병행되어야할 것으로 본다.

참 고 문 헌

1. Babcock, G.C., "Duration and Bond Portfolio Analysis; Comment," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, November 1978, pp. 683~685.
2. Bierwag, G.O., "Immunization, Duration and the Term Structure of Interest Rates." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, December 1977, pp. 725~741.
3. ______. "Measures of Duration." *Economic Inquiry*, 1978, pp. 497~507.
4. Bierwag, G.O., and George Kaufman, "Coping with the Risk of Interest Rate Fluctuations: A Note." *Journal of Business*, July 1977, pp. 364~370.
5. ______________________, "Bond portfolio strategy simulations: A critique," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Sptember 1978, pp. 519~526.
6. Bierwag, G.O., George G. Kaufman, and Alden L. Toevs, "Single Factor Duration Models in a Discrete General Equilibrium Framework," *Journal of Finance*, May 1982, pp. 325~338.
7. Bierwag, G.O., George G. Kaufman, and Chulsoon Khang, "Duration and Bond Portfolio Analysis; An Overview," *Journal of Fnancial and Quantitative Analysis*, November 1978, pp. 675~677.
8. Bradley, Stephen P., and Dwight B. Crane, Management of Bank Portfolio, New York, Wiley and Sons, 1975.
9. Boquist, J.A., G.A. Racette, and Schlarbaum. "Duration and Risk Assessment for Bonds and Common Stocks," *Journal of Finance*, 1975.
10. Carr, J.L., P.J. Halpern, and J.S. McCallum. "Correcting the Yield Curve: A Reinterpretation of the Duration Problem." *Journal of Finance*, 1974.
11. Cooper, Ian A., "Asset values, Interest-rate Changes, and Duration," *Journal of Financal and Quantitative Analysis*, December 1977, pp. 701~24.
12. Cox, John C., Ingersoll, Jonathan E., and Ross, Stephen A., "Duration and the Measurement of Basis Risk," *Journal of Business*, January 1979, pp. 51~62.
13. Fishburn, Peter C. "Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns," *American Economic Review*, March 1967, pp. 116~126.
14. Fisher, Lawrence, and Roman L. Weil. "Coping with the Risk of Interest Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naive and Optimal Strategies," *Journal of Business*, October 1971, pp. 408~431.
15. Fogler, Russel H., William A. Groves, and James C. Richardson, "Bond Portfolio Strategies, Returns and Skewness; A Note," *Journal of Financial and Quantitatioc Analysis*, March 1977, pp. 127~140.
16. Fong, H. Gifford, and Oldřich A. Vasicek, "A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization," *Journal of Finance*, December 1984, pp. 1541~1546.
17. Francis, Jack Clark, Investments; Analysis and Management, McGraw-Hill, Inc., 1980.
18. Grove, Myron A. "On Duration and the Optimal Maturity Stucture of the Balance Sheet," *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Autumn 1975, pp. 696~709.

19. Haugen, Robert A., and Dean W. Wichern, "The Elasticity of Financial Assets." *Journal of Finance*, September 1974, pp. 1229~1240.
20. Hicks, J.R. *Value and Capital*. Oxford: Clarendon Press, 1939.
21. Hopewell, Michael, and Kaufman, George G., "Bond Price Volatility and Term to Maturity: A Generalized Respecification," *American Economic Review*, September 1973, pp. 749~753.
22. Ingersoll, Jonathan, Skelton, Jeffrey, and Weil, Roman L., "Duration Forty Years Later," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, November 1978, pp. 627~650.
23. Kaufman, G.G., "Measuring Risk and Return for Bonds: A New Approach." *Journal of Bank Research*, Summer 1978, pp. 82~90.
24. Khang, Chulsoon, "Bond Immunization when Short-term Rates Fluctuate more than Long-term Rates," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, November 1979, pp. 1085~1090.
25. Lanstein, Ronald, and Sharpe, William F., "Duration and Security Risk," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1978, pp. 653~668.
26. Livingston, Miles, and John Caks, "A Duration Fallacy." *Journal of Finance*, March 1977, pp. 185~187.
27. Macaulay, F.R., *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the U.S. since 1856*. New York: National Bureau of Economic Research, 1938.
28. Malkiel, Burton G., "Expectations, Bond prices, and the Term Structure of Interest Rates," *Quarterly Journal of Economics*, May 1962, pp. 197~218.
29. Redington, F.M., "Review of the Principles of Life-Office Valuations," *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 18, 1952, pp. 286~340.
30. Samuelson, Paul A., "The Effects of Increases on the Banking System," *American Economic Review*, March 1945, pp. 16~27.
31. Sharpe, William F., *Investments*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1978.
32. Van Horne, James C., Financial Market Rates and Flows, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1984.
33. Watson, Ronald D., "Tests of Maturity Structures of Commercial Bank Goverment Securities Portfolios; A Simulation Approach," *Journal of Bank Research*, Spring 1972, pp. 34~46.
34. Weil, Roman L., "Macaulay's Duration: An Appreciation," *Journal of Business*, October 1973, pp. 589~592.
35. Wolf, Charles R., "A Model for Selecting Commercial Bank Government Securities Portolios," *Review of Economics and Statisticss*, February 1969, pp. 40~52.
36. Yawitz, J.B., G.H. Hempel, and W.J. Marshall, "A Risk-Return Approach to the Selection of Optimal Government Bond Portfolios," *Financial Management*, Autumn 1976, pp. 35~45.