

減次積分과 非適合變位形을 혼합사용한 平板要素의 開發

Development of the Plate Element Using Combination
of Reduced Integration and Nonconforming Modes

方	明	錫*
Bang,	Myung	Suk
崔	暢	根**
Choi,	Chang	Kuen

Abstract

By the combined use of reduced integration and addition of nonconforming displacement modes, a highly effective new plate element has been established. The displacement field of this element was formed by adding nonconforming modes only to transverse displacement component of Ahmad-Irons' element and the element matrices are computed by the numerical integrations with modified orders.

Comparing with other elements, the superiority of the both NC 8-4.1 and NC 8-5.1 elements over the elements previously studied has been observed. The solutions with these elements converge to the true solutions very rapidly as the mesh is refined. These elements are also shown to be applicable to the wide range of thick and very thin plate problems.

要 旨

減次積分과 非適合變位形을 혼합사용함으로써 고도로 효율적인 새로운 평판요소가 개발되었다. 이 요소의 변위영역은 Ahmad-Irons 요소의 횡방향성분에만 非適合變位形을 추가하였고, 요소강성행렬은 수정된 次數의 수치적분에 의하여 계산된다.

다른 요소들과 비교하여 NC 8-4.1과 NC 8-5.1 요소들의 월등함이 발견되었다. 이 요소들에 의한 해는 mesh가 세분됨에 따라 정확한 해에 급속히 수렴함을 알 수 있다. 또한 이 요소들은 두꺼운 평판문제에서 부터 매우 얇은 평판문제까지 넓은 범위에 적용할 수 있음을 보여 준다.

1. 序 論

等媒介變數要素(Isoparametric Element)는 그 본

래 형태에서나 혹은 수정된 형태에서나 構造解析문제에서 가장 유용하고 넓게 사용되는 요소 중에 하나이다. 그러나 等媒介變數族들은 하나 의 큰 결함을 갖고 있다. 즉, 요소가 주로 전단

*正會員·韓國科學技術院 土木工學科 博士過程

**正會員·韓國科學技術院 教授, 土木工學科

변형에 의해서 휨에 적응한다는 사실 때문에 발생하는 과도하게 큰 강성이 그것이다. 이러한 결점을 보정해 주기 위하여 두가지 가능한 방법이 사용될 수 있다. 첫째는, 수치적분을 할 때에 次數를 감소시킴으로써 강성을 줄이는 방법이고, 둘째는 비적합변위형을 추가함으로써 실질적인 휨 변형을 회복시키는 방법이다. 이 방법들은 각각 독자적으로 과거에 다양한 구조해석문제에서 성공리에 사용되었다^(6,9,14,15).

본 연구에서는 더 개선된 평판요소를 유도하기 위하여, 이 두가지 방법의 결합사용 즉, 비적합변위형에 減次積分을 추가하는 방법이 제안되었다. 減次積分방법과 비적합변위형의 추가방법의 기본 개념에 대한 간략한 설명이 본 연구에서 개발된 요소의 이해에 필수적이다. 또한 일련의 수치해석 예들이 새로운 요소의 다양한 사용성을 평가하기 위하여 병행되었다.

2. 減次積分方法(Reduced Integration Method)

일반적으로 積分次數의 감소는 정상적인 적분시의 요소강성을 감소시키는 효과를 갖는다. 어떤 요소의 강성을 감소시키는 것은 그 요소가 실제보다 너무 강성이 클 경우에 바람직한 효과를 주며, 그 요소의 사용성을 개선시킨다^(10,15). 이와 같이 減次積分으로부터는 계산비용의 절감과 구해진 해의 정확성 개선이라는 이중의 효과를 얻게 된다.

減次積分의 성공에 대한 이유는 전단관련행렬의 singularity 나 혹은 正常積分에 의한 과도한 강성의 해소에 의해서 설명될 수 있다. 그러나 불행하게도 減次積分의 사용은 patch test의 실패나^(6,7) 바람직하지 못한 spurious zero energy 변위형으로 이끌 가능성 때문에 위험스럽다고 생각되기도 한다. 이러한 문제성에 대한 해결책으로 선택적으로 減次積分하는 방법이 제안되었다^(3,9).

3. 非適合變位形의 추가(Addition of Nonconforming Displacement Modes)

비적합변위형의 추가에 의하여 두계방향의 변위에 대한 구속을 제거하려는 새로운 시도는 W-

ilson 등⁽¹⁴⁾에 의해서 시작되었고, Cook^(4,5)에 의해서 더욱 진보되었다. 최창근과 Schnobrich⁽⁶⁾는 얇은 平板과 셀요소를 개선하기 위하여 이 개념을 사용하였다.

2次要素(8절점)에 추가되는 비적합 변위형은 다음과 같은 變位函數에 의하여 정의된다.

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= \xi(1-\xi^2) & \bar{N}_2 &= \eta(1-\eta^2) & \bar{N}_3 &= \xi\eta(1-\xi^2) \\ \bar{N}_4 &= \eta\xi(1-\eta^2) & \bar{N}_5 &= (1-\xi^2)(1-\eta^2) \end{aligned} \quad (1)$$

처음 두 變位函數는 두계방향의 변위에 대한 구속을 제거하기 위한 것이고, 세번째와 네번째 變位函數는 비틀림에 대한 구속을 제거하기 위한 것이다. 다섯번째 함수는 요소에 볼록한(凸) 變位形을 주기 위한 것이다.

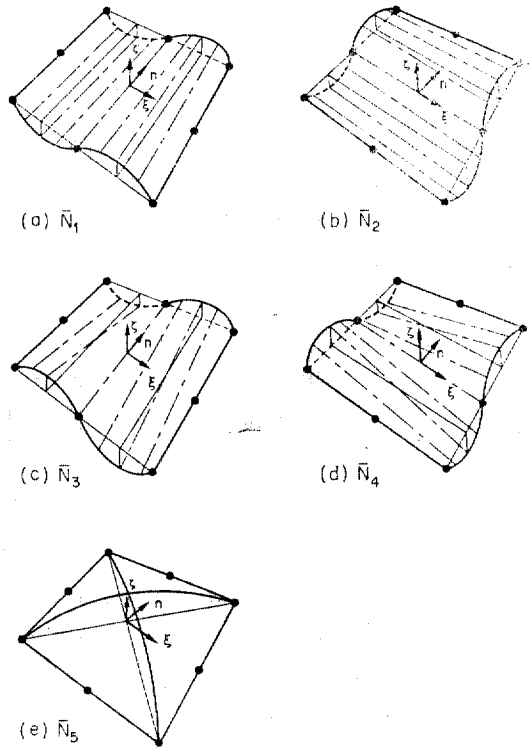


그림 1. 식(1)의 비적합변위형

4. 非適合變位要素의 單純化

(Simplification of Nonconforming Element)

2次 非適合變位要素는 다소 덜 중요한 非適合變位形을 빼면서도 원래 요소의 정확성을 감소시키지 않아 단순화시킬 수 있다⁽¹⁶⁾. 非適合

變位形($\bar{N}_1 \sim \bar{N}_6$)들을 두계 방향의 變位成分에만 그대로 유지하고, 평면내의 變位成分들에는 추가하지 않았다. 이 때의 변위영역은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \sum N_i \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix} + \sum N_i \frac{t_i}{2} \zeta \phi_i \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} + \sum \bar{N}_i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{W}_i \end{bmatrix} \quad (2)$$

이 식은 다시 약식으로 $\{U\} = \sum N_i U_i + \sum \bar{N}_i \bar{U}$ 로 나타낼 수 있다. 변형성분들은 두 가지의 변환에 의해서 국부좌표계에서 표현된다. 그 변형 벡터는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\{\varepsilon'\} = \sum B_i \theta^T \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix} + \sum \frac{t_i}{2} C_i \theta^T \phi_i \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} + \sum \bar{B}_i \theta^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{W}_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

약식으로는 $\{\varepsilon\} = [B, \bar{B}] \begin{bmatrix} U \\ \bar{U} \end{bmatrix}$ 로 나타낼 수 있다.

최종적인 요소강성행렬은 최소화 과정의 직접적인 적용에 의하여 계산된다. 非適合變位形에 의하여 확대된 요소강성 행렬은 다음과 같이 분할될 수 있다.

$$K' = \begin{bmatrix} K_{CC} & K_{CN} \\ K_{NC} & K_{NN} \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기에서 $K_{CC} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D B |J| d\xi d\eta d\zeta$

$$K_{CN} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D \bar{B} |J| d\xi d\eta d\zeta$$

$$K_{NN} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{B}^T D \bar{B} |J| d\xi d\eta d\zeta$$

이 된다. 행렬 K' 는 전체행렬로 조합되기 전에 보통 평판요소와 같은 차수로 응집될 수 있다. 수정된 식은 $K'U=R$ 로 나타낼 수 있으며, 여기서 K' 는

$K' = K_{CC} - K_{CN} K_{NN}^{-1} K_{CN}^T$ 로 나타낼 수 있다. 식(2)에서 非適合變位形들의 다양한 결합이 가능하나 그 중에서도 NC8-4.1과 NC8-5.1이 특히 주목된다. 이 기호들은 Reference I에 나타

나 있다.

5. 減次積分과 非適合變位形의 결합

(Combination of Reduced Integration and Nonconforming Modes)

앞절에서 나타난 바와 같이 減次積分과 非適合變位形의 추가는 等媒介變數要素의 사용성을 개선시킨다. 이 연구의 목적은 두가지 방법의 상호보완적인 결합에 의해서 보다 더 개선된 새로운 平板要素를 개발하는 것이다. 기존의 연구와^(8,10) 위에서 언급된 내용에 근거를 두고 8-node serendipity 요소들 본 연구의 기본으로 고려한다. 이 요소는 평판응력 상태에서 spurious zero energy 변위형 문제를 갖지 않으며, 평판 휨 거동에서의 체눈이 정밀해짐에 따라서 정확한 해에 수렴해 감이 증명되었다. 요소강성행렬은 식(4)에서 수정된 차수로 수치적분된다. 適合部分(첨자 C)에 관한 행렬은 감소된 次數를 가지고 적분되는 반면에, 非適合部分(첨자 N)에 관한 행렬은 singularity와 ill-conditioning을 피하기 위하여 正常次數로 적분되어야 한다. 즉 K_{NN} 을 減次積分하는 경우에 singularity를 갖는다는 것을 주의해야 한다. 한편 K_{CN} 의 正常積分은 ill-conditioning의 원인이 된다. 이 점을 피하기 위하여 이 식은 減次積分되어야 한다. 위의 積分次數들의 최적조합이 표 1에 요약된다.

표 1. 최적 적분 차수

Sub Matrix	Integration Rule
K_{CC}	2×2
K_{CN}, K_{NC}	2×2
K_{NN}	3×3

이 요소들은 수치적으로 확인되고, 그 사용성이 증명되었다. 이 요소들에 의하여 얻어진 결과들은 다음 절에서 다른 요소들의 결과들과 비교된다.

6. 수치해석예 (Numerical Examples)

6-1. 평판응력문제 (Plane Stress Problem)

이 연구에서 개발된 요소의 평면내의 거동을 조

사하기 위하여 그림 2에 보이는 것과 같이 서로 다른 체눈형태를 갖는 캔틸레버보가 두개의 서로 다른 하중조건에서 실험되고 그 결과들은 표 2에 기록되었다.

과거연구로⁽⁶⁾부터의 결과 (2×10)와 본 연구 결과(1×5)를 비교할 때, 체눈형이 직사각형일 때는 본 연구에 의한 결과와 과거연구에 의한 결과가 약간 밖에 차이가 없지만 임의의 체눈형을 가질 때는 전 결과보다 월등한 결과를 보임을 알 수 있다. 직사각형의 요소형태와 임의의

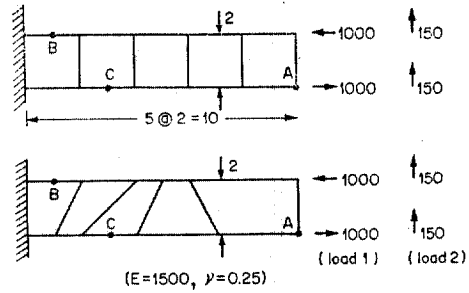


그림 2. 직 4 사각형과 임의의 4 사각형요소를 갖는 캔틸레버보

표 2. 캔틸레버 보의 결과

Element		Square ()				General ()			
Designation	Quadrature rule	Vertical deflection at A	Stress ox at A	Stress ox at B	Stress ox at C	Vertical deflection at A	Stress ox at A	Stress ox at B	Stress ox at C
C5ML*		100.0	-3000	3000	0	67.90	-2727	2112	503
Q4*		68.2	-2184	2184	545	45.70	-1761	946	698
C8	(2x2)	99.40	-3000	3000	73.6	99.71	-3016	3016	81.8
C8	(3x3)	99.30	-3000	3000	70.1	99.40	-3008	3000	84.2
NCB-2.3	(3x3)	99.41	-3000	3000	73.6	99.72	-3016	3016	81.8
NCB-2.3	(2x2)+(3x3)	99.45	-3000	3000	73.6	99.72	-3020	3020	80.5
Theory		100.0	-3000	3000	0	100.0	-3000	3000	0

사각형요소형태 사이에 A점에서의 수직변위는 거의 같음을 알 수 있고, B점과 C점에서의 응력은 약간 차이가 남을 알 수 있다. 그러나 이 연구에서의 차이는 참고문헌 (5)에서 만큼 크지 않다. 또한 適合要素와 非適合要素에 의해서 얻어지는 결과 사이에는 거의 차이가 없다는 것에 주의해야 한다. 이것은 非適合變位形을 추가함으로써 계산량이 증가함에도 불구하고 2次平板要素에서 평판내의 거동에는 극히 제한된 개선 효과만을 가질 뿐이라는 것을 보여 준다. 따라

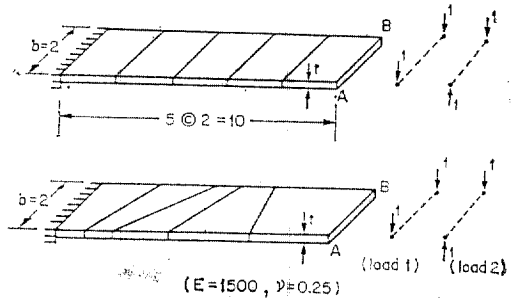


그림 3. 직 4 사각형과 임의의 4 사각형 요소를 갖는 환 평판

표 3. 비틀림 하중에 의한 결과

Element		Square ()				General ()			
Designation	Quadrature rule	t/b				t/b			
		1/2	1/4	1/10	1/20	1/2	1/4	1/10	1/20
C8	(2x2)	6.66x10 ⁻²	4.30x10 ⁻¹	6.087	4.86x10	6.90x10 ⁻²	4.32x10 ⁻¹	6.101	4.96x10
C8	(3x3)	6.45x "	4.06x "	6.011	4.45x "	6.60x "	4.10x "	6.017	4.54x "
NCB-4.1	(3x3)	6.90x "	4.31x "	6.091	4.95x "	7.02x "	4.33x "	6.132	5.01x "
NCB-4.1	(2x2)+(3x3)	7.50x "	4.40x "	6.179	5.05x "	7.52x "	4.41x "	6.191	5.06x "
NCB-5.1	(3x3)	7.61x "	4.50x "	6.201	5.12x "	7.64x "	4.52x "	6.223	5.12x "
NCB-5.1	(2x2)+(3x3)	8.13x "	4.55x "	6.401	5.45x "	8.17x "	4.56x "	6.411	5.46x "
Theory		7.57x10 ⁻²	4.46x10 ⁻¹	6.912	6.14x10	7.54x10 ⁻²	4.46x10 ⁻¹	6.912	6.17x10

서 식 (2)에서 평면내 變位成分에 추가된 非適合 變位形을 제거하는 것이 正當함을 알 수 있다.

6-2. 평판 휨 문제 (Plate Bending Problem)

그림 3의 평판은 평면하중 대신에 수직하중과 비틀림모멘트가 동시에 작용한다는 점을 제외하고는 그림 2에 보인 평판과 같다. 요소 C8, NC8-4.1, NC8-5.1을 사용하여 얻은 결과는 표 3과 같다.

다른 체순형태를 가지고 구한 캔틸레버 끝단에서의 수직변위는 단순 휨 문제에 있어서는 거의 정확하다. 그러나 비틀림 문제에 있어서는 단면의 형태에 따라서 해의 정확도는 매우 민감하다. $t/b=0.1\sim 0.25$ 에서 가장 좋은 결과를 보인다. 그리고 요소의 형태에 관계없이 같은 결과를 준다는 것이 증명된다. 즉 직사각형 요소와 임의의 형태의 요소가 같은 결과를 준다는 것이다. 그리고 단순 휨문제와는 달리 볼록한(凸)變位形(N_6)을 포함한 NC8-5.1이 비틀림문제에서 가장 좋은 정확도를 나타냄을 알 수 있다.

6-3. 정사각형 평판문제 (Square Plate Problem)

그림 4에 보이는 것처럼 두 서로 다른 경계

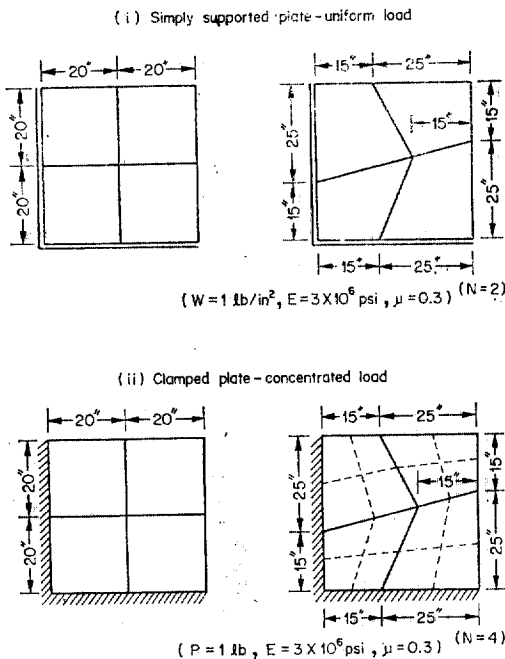


그림 4. 4각형과 임의의 체순을 갖는 4각형 평판

표 4. 정 4각형과 평판의 결과

(i) Simply supported plate in uniform load ($\times 10^{-3}$)

Element	General ()	Square ()				
		N = 2	N = 4	N = 2	N = 3	N = 4
C8	(2x2)	3.791	4.111	3.780	4.030	4.110
C8	(3x3)	3.821	4.100	3.557	3.984	4.090
NC8-4.1	(3x3)	3.750	4.111	3.780	4.030	4.110
NC8-4.1	(2x2)+(3x3)	3.800	4.200	3.786	4.101	4.190
NC8-5.1	(3x3)	3.810	4.200	3.800	4.102	4.200
NC8-5.1	(2x2)+(3x3)	4.011	4.200	4.000	4.110	4.200
Theory		4.200				

(ii) Clamped plate in concentrated load ($\times 10^{-5}$)

Element	General ()	Square ()				
		N = 2	N = 4	N = 2	N = 3	N = 4
C8	(2x2)	9.71	13.00	9.49	12.71	12.99
C8	(3x3)	4.62	11.50	4.41	10.63	11.32
NC8-4.1	(3x3)	9.70	13.00	9.49	12.70	12.99
NC8-4.1	(2x2)+(3x3)	9.78	13.07	9.60	12.73	13.00
NC8-5.1	(3x3)	11.60	13.10	11.60	12.90	13.00
NC8-5.1	(2x2)+(3x3)	11.63	13.10	11.62	12.96	13.10
Theory		13.10				

요소—단순지지와 고정지지—를 갖는 정사각형 평판을 고려한다.

직사각형요소형태를 가지고 중앙에 집중하중을 받는 경우와 등분포하중을 받는 경우에 대한 결과들이 표 4에 있다.

適合要素(C8)와 非適合要素(NC8-4.1, NC8-5.1)가 모두 좋은 수렴결과를 주지만 전자에 대한 후자의 우월성을 분명히 알 수 있다. 상대적으로 성긴 체순을(4x4) 가지고 정확한(NC8-4.1) 혹은 거의 정확한(NC8-5.1) 해를 집중하중의 경우나 등분포하중의 경우에 모두 얻을 수 있다. NC8-4.1과 NC8-5.1의 휨 거동에 대한 효과는 기대했던 이상으로 매우 뛰어나다. 그들의 사용성도 비교된 다른 것들보다 훨씬 뛰어나음을 알 수 있다. 그리고 임의의 체순 형태를 가지고 실험한 결과들도 정확성에 거의 손실이 없다는 것을 보여주고 있다.

6-4. 매우 얇은 평판문제

(Extremely Thin Plate Problem)

마지막으로 이 요소가 두꺼운 평판에서부터 얇은 평판에 걸쳐서의 거동을 실험한다. 넓은 두께범위에 걸쳐서 집중 하중을 받는 직사각형 평판이 수렴하는 결과를 그림 5에 나타냈다.

이 연구에서 非適合變位形을 사용한 요소(NC

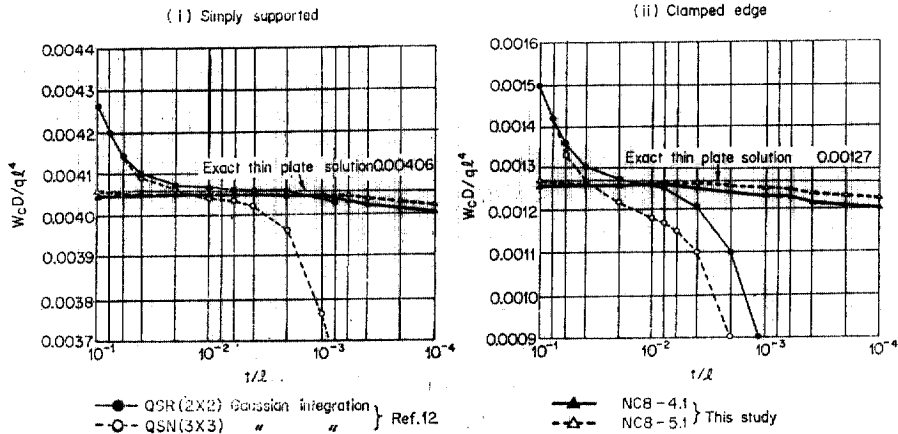


그림 5. 두께의 변화에 따른 평판의 거동

8-4.1, NC 8-5.1)들의 결과가 참고문헌 (10)에서 이 연구의 減次積分된 C8 요소와 동일한 QSR 요소를 가지고 얻은 결과들과 비교된다. 일반적으로 非適合要素가 더 좋은 결과를 보임을 알 수 있으며, 그림 5는 매우 얇은 평판문제에서도 놀랄만한 결과를 얻을 수 있음을 보여 준다. 두께와 길이의 비가 10^{-4} 만큼 낮은 경우에도 이 연구의 예제가 singularity 나 ill-conditioning 을 발생시키지 않았다.

7. 결 론

減次積分과 非適合變位形의 추가를 결합사용함으로써 고도로 효율적인 새로운 평판요소가 개발되었다. 4 개의 非適合變位形($\bar{N}_1 \sim \bar{N}_4$)을 갖는 NC 8-4.1 과 5 개의 非適合變位形($\bar{N}_1 \sim \bar{N}_5$)을 갖는 NC 8-5.1 이 만족스러운 결과를 준다. NC 8-5.1 의 계산비용이 약간 더 들면서 좋은 결과를 주고 있으나 양자의 차이는 거의 무시할만하다. 따라서 NC 8-4.1 과 NC 8-5.1 사이의 선택은 사용자의 희망에 따른다고 하겠다. 다른 요소들과 비교해서 NC 8-4.1 과 NC 8-5.1 의 우월성은 분명하다. 이 요소들에 의한 해는 정확한 해에 매우 빨리 수렴함을 알 수 있다. 또한 이 요소들은 두꺼운 평판에서 부터 매우 얇은 평판에 이르기까지 매우 넓은 범위에서 사용이 가능하다. 이 요소들의 쉘 문제에 대한 적용은 이 연구의 범위를 벗어나지만 평판문제에서와 마찬가지로

매우 효율적인 것이라는 것이 분명하다.

참 고 문 헌

1. Ahmad, S., Irons, B.M., and Zienkiewicz, O.C., "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2, 1970, pp. 419~451.
2. Batoz, J.L., and Tahar, M.B., "Evaluation of A New Quadrilateral Thin Plate Bending Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, 1982, pp. 1655~1677.
3. Bicanic, N., and Hinton, E., "Spurious Modes in Two Dimensional Isoparametric Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, 1979, pp. 1545~1557.
4. Cook, R.D., "Improved Two-Dimensional Finite Element," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 100, ST9, Sept., 1974.
5. Cook, R.D., "Avoidance of Parasitic Shear in Plane Element," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 101, No. ST6, June, 1975.
6. Choi, C.K., and Schnobrich, W.C., "Use of Nonconforming Modes in Finite Element Analysis of Plates and Shells," *Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 401*, University of Illinois, Urbana, Illinois, Sept., 1973.

7. Choi, C.K., "A Conoidal Shell Analysis by Modified Isoparametric Element," *Computers & Structures*, Vol. 18, No. 5, 1984, pp. 921~924.
8. Irons, B.M., and Razzaque, A., "Introduction of Shear Deformation," *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 11, No. 10, Oct., 1973.
9. Parisch, H., "A Critical Survey of the Nine Node Degenerated Shell Element with Special Emphasis on the Thin Shell Applications and Reduced Integration," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* Vol. 20, 1979, pp. 323~350.
10. Pawsey, S.F., "The Analysis of Moderately Thick to Thin Shells by the Finite Element Method," *SESM Report 70-12*, Structural Engineering Laboratory, University of California, Berkeley, California, 1970.
11. Pugh, E.D.L., Hinton, E. and Zienkiewicz, O.C., "A Study of Quadrilateral Plate Bending Elements with 'Reduced' Integration," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, 1978, pp. 1059~1079.
12. Talna, M.A., "A Theoretically Improved and Easily Implemented Version of the Ahmad Thick Shell Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, 1979, pp. 125~142.
13. Taylor, R.L., Beresford, P.J., and Wilson, E. L., "A Nonconforming Element for Stress Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, 1976, pp. 1211~1219.
14. Timoshenko, S., and Woinowsky-Krieger, S., "Theory of Plates and Shells," 2nd Edition, McGraw-Hill, 1959.
15. Wilson, E.L., Taylor, R.L., Doherty, W.P., and Ghaboussi, J., "Incompatible Displacement Models," *International Symposium on Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, University of Illinois, Urbana, September 1971.
16. Zienkiewica, O.C., Taylor, R.L., and Too, J.M., "Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells" *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, 1971, pp. 275~290.

APPENDIX I : 기호

- t, t_i : shell thickness, thickness at node i
- $u_\alpha = |u, v, w|$: components of displacement in x, y, z directions
- $u_\alpha = |u, v, w|$: components of amplitudes of nonconforming displacement modes
- V_1, V_2, V_3 : unit direction vectors in the x^1, y^1, z^1 directions, respectively
- $x_\alpha = |x, y, z|$: global coordinates
- $x_\alpha^1 = |x^1, y^1, z^1|$: local coordinates
- α, β : rotations about x^1, y^1 axes
- $\xi_\beta = |\xi, \eta, \zeta|$: curvilinear coordinates
- $\phi_i = |V_2, -V_1|$
- NC 8-4.1
- NC : nonconforming
- 8 : number of modes
- 4 : number of added nonconforming modes
- 1 : number of components of amplitudes of nonconforming displacement

(接受 : 1985. 2. 13)