數學教育學會誌<數學教育>
12, Vol. XXIV, No. 1.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1985, Vol. XXIV, No. 1.

한 수열의 합의 공식의 확장

박 현 숙

1. 서 론

-에는 여러 가지 이름이 있다.

-리말의 수사 중 「다섯」과 「열」의 기원을 살 -자. 손가락을 하나, 둘 씩 꼽아가며 손가락 -해 보면 「다섯」은 닫힘을 말하고, 「열」은 열 ㅏ는 의미를 알 수 있다.

ㅣ렇듯 갖가지 이름이 깃들여진 아름다운 수 가지고 고등학교에서 수열의 합을 구하는 것 배운다. 이를 테면

$+2+3+\cdots+n$ 의 값은?

$^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 의 값은 얼마인가?

ㅓ 등차수열의 합이나 등비수열의 합, 그밖 무한수열의 합을 구하는 것을 배운다.

ㅣ 논문에서는

$S_n^{(1)}=1+1+1+\cdots+1=n$ ………………(1)

$S_n^{(2)}=1+2+3+\cdots+n=?$ …………………(2)

$S_n^{(3)}=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)$ ……(3)

$S_n^{(4)}=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)$ ……………………………………………(4)

ㅏ 놓고, (1)의 결과를 이용해서 (2)의 합을 하고 (2)의 합을 이용해서 (3)의 합을 구한다. 리고 (3)의 합을 이용해서 (4)의 합을 구한다. 리하여 (1), (2), (3), (4)의 합의 공식에서 $S_n^{(K)}=1\cdot2\cdot3\cdots(k-1)+2\cdot3\cdot4\cdots\cdots k+n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-2)$의 합의 공식을 예측하고 이 식을 수학적 귀납법으로 증명하고자 한다.

§2. $S_n^{(2)}$, $S_n^{(3)}$, $S_n^{(4)}$ 의 값

예 1) $S_n^{(1)}=\overbrace{1+1+1+\cdots+1}^{n\text{ 개}}=n\left(=\frac{n}{1}\right)$

증명) 명백하다.

예 2) $S_n^{(2)}=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

증명)
$$
\begin{aligned}
S_n^{(2)}&=1+2+3+\cdots+n\\
&=S_1^{(1)}+S_2^{(1)}+\cdots+S_n^{(1)}\\
&=1+(1+1)+\cdots+(1+1+\cdots+1)\\
&=n\times1+(n-1)\times1+(n-2)\times1\\
&\quad+\cdots+(n-(n-1))\times1\\
&=n(1+1+\cdots+1)\\
&\quad-(1+2+\cdots+(n-1)+n)+n\\
&=nS_n^{(1)}-S_n^{(2)}+n
\end{aligned}
$$

이항해서 정리하면 $2S_n^{(2)}=n\cdot n+n$ ($S_n^{(1)}=n$ 이므로) 그러므로 $S_n^{(2)}=\frac{n(n+1)}{2}$

예 3) $S_n^{(3)}=1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

증명)
$$
\begin{aligned}
S_n^{(3)}&=1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1)\\
&=2\left(\frac{1\cdot2}{2}+\frac{2\cdot3}{2}+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&=2(S_1^{(2)}+S_2^{(2)}+\cdots S_n^{(2)})\\
&=2[(1)+(1+2)+\cdots+(1+2\\
&\qquad+\cdots+n)]\\
&=2[n\times1+(n-1)\times2+\cdots\\
&\qquad+(n-(n-1))\times n]\\
&=2[n\times(1+2+\cdots+n)-(1\cdot2\\
&\quad+2\cdot3+\cdots+(n-1)n+n(n+1))\\
&\qquad+n(n+1)]\\
&=2\cdot n\cdot S_n^{(2)}-2\cdot S_n^{(3)}+2\cdot n(n+1)
\end{aligned}
$$

이항하여 정리하면 $S_n^{(2)}=\frac{n(n+1)}{2}$ 이므로

$3S_n^{(3)}=2\cdot n\cdot\frac{n(n+1)}{2}+2n(n+1)$

그러므로 $S_n^{(3)}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

예 4) $S_n^{(4)}=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

증명) $S_n^{(4)}=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots$

$$+n(n+1)(n+2)$$
$$=3\left(\frac{1\cdot2\cdot3}{3}+\frac{2\cdot3\cdot4}{3}+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)$$
$$=3(S_1^{(3)}+S_2^{(3)}+\cdots+S_n^{(3)})$$
$$=3[(1\cdot2)+(1\cdot2+2\cdot3)+\cdots+(1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1))]$$
$$=3[n\times(1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1))-(1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+(n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2))+n(n+1)(n+2)]$$
$$=3(n\cdot S_n^{(3)}-S_n^{(4)}+n(n+1)(n+2))$$
$$\therefore\ S_n^{(4)}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

§3. 정 리

앞 절의 예에서 다음 정리를 예측할 수 있다.

정리 : $S_n^{(k)}=1\cdot2\cdot3\cdots(k-1)+2\cdot3\cdot4\cdots k+\cdots$

$$+n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-2)$$
$$=\frac{1}{k}\prod_{i=0}^{k-1}(n+i)$$

(단, n과 $k(\geqq2)$는 양의 정수)

증명) $k=2$일 때

$$S_n^{(2)}=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\prod_{i=0}^{1}(n+i)$$

$k=3$일 때

$$S_n^{(3)}=1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1)$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}=\frac{1}{3}\prod_{i=0}^{2}(n+i)$$

또한 $k=4$일 때

$$S_n^{(4)}=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}=\frac{1}{4}\prod_{i=0}^{3}(n+i)$$

따라서, $k=m$ 일 때

$$S_n^{(m)}=1\cdot2\cdot3\cdots(m-1)+2\cdot3\cdots m+\cdots$$
$$+n(n+1)\cdots(n+m-2)=\frac{1}{m}\prod_{i=0}^{m-1}(n+i)$$

이 성립한다고 가정하고, (단, $m\geqq2$인 양의 정수) $k=m+1$일 때

$S_n^{(m+1)}=\frac{1}{m+1}\prod_{i=0}^{m}(n+i)$임을 보이면 된다.

$$S_n^{(m+1)}=1\cdot2\cdot3\cdots m+2\cdot3\cdot4\cdots(m+1)+\cdots$$
$$+n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)$$
$$=m\left(\frac{1\cdot2\cdots m}{m}+\frac{2\cdot3\cdot4\cdots(m+1)}{m}+\cdots+\frac{n(n+1)\cdots(n+m-1)}{m}\right)$$
$$=m(S_1^{(m)}+S_2^{(m)}+\cdots+S_n^{(m)})$$
$$=m[(1\cdot2\cdot3\cdots(m-1))+(1\cdot2\cdot3\cdots(m-1)+2\cdot3\cdots m)+\cdots+(1\cdot2\cdot3\cdots(m-1)+2\cdot3\cdots m+\cdots+n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-2))]$$
$$=m[n(1\cdot2\cdot3\cdots(m-1))+(n-1)(2\cdot3\cdot4\cdots m)+\cdots+(n-(n-1))\times(n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-2))]$$
$$=m[n\times(1\cdot2\cdot3\cdots(m-1)+2\cdot3\cdots m+\cdots+n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-2))-(1\cdot2\cdot3\cdots(m+1)+2\cdot3\cdot4\cdots(m+2)+\cdots+(n-1)n(n+1)\cdots(n+m-2)+n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1))+n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)]$$
$$=m(n\times S_n^{(m)}-S_n^{(m+1)}+n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1))$$

이항해서 정리하면

$$(m+1)S_n^{(m+1)}=m\cdot n\frac{1}{m}\prod_{i=0}^{m-1}(n+i)+m\prod_{i=0}^{m-1}(n+i)$$
$$=\prod_{i=0}^{m-1}(n+i)\times(n+m)$$
$$=\prod_{i=0}^{m}(n+i)$$
$$\therefore\ S_n^{(m+1)}=\frac{1}{m+1}\prod_{i=0}^{m}(n+i)$$

그러므로 $S_n^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}i(i+1)\cdots(i+k-2)$

$$=\frac{1}{k}\prod_{i=0}^{k-1}(n+i)$$

참 고 문 헌

Rodney T. Hansen, "*Extensions of the Sum of Integers Formula*", 수학교육, Vol. 21, No. 2. pp. 17~18, 한국수학교육학회지 (1983)

(韓國敎員大學校 學生)