Topology의 형성과 해석학의 추상화

김 용 국

(木浦大學校數學科)

(1) Euler의 多面體定理

Euler의 지표 또는 $\chi(P)=\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=2$의 형식으로 된 多面體定理는 P가 구면과 위상동형일 때 성립한다. 여기서 α_0, α_1, α_2는 각각 정점, 변, 면의 갯수이다. 위 식은 일반적으로 Euler의 정리로 알려져 있으나, 수학사적으로는 'Descarte-Euler의 정리'로 해야 옳다.

처음 Descartes(1596-1650)는 이당시 Topology가 정립되어 있지 않은 상황에서 1620년경에 발견했다.[1] 이 사실이 곧 Topology의 실질적인 시초이기도 했다. Euler는 그보다 백여년후 1752-1753년 사이에 독립적으로 이 정리의 상세한 증명에 성공하였다.[2][3] 그 내용은 P개의 변을 갖는 多面體의 면의수 N_p와 q개의 변을 갖는 多面體의 정점의 수 M_p로서 多面體를 유별하는 것이다. 그러나 Euler의 결과가 나온 이후에도 이 내용이 일반적인 수학의 대상이 되기에는 상당한 시기가 필요했다. 당시 수학계의 상황은 이 결과를 가지고 위상적인 문제를 통찰할만큼 성숙하지 않았기 때문이었다.

근세수학의 일반적인 관심이 해석학에 있었던 상황에서 多面體에 관한 단편적 지식이 수학계의 촛점일 수는 없었다. 그러나 19세기에 들어서면서 단편적으로나마

註1) Descartes, R., De solidorum elementis, Oeuvres de Descartes, Vol 10 Publ. by C Adam and P. Tannery, Paris, 1908, 256-276.

2) Euler, L., Elementa doctrinae solidorum, Novi Comm. Acad. Sci. Petrop. 4(1752-1753), 109-140, Publ, 1758.

3) ________, Demostratio ronnullarum insignium proprietctum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita, Novi Comm. Acad. Sci. Petrop. 4.

A. M. Legendre (1752-1833)[4]가 효시가 되어 연이어 연구결과가 나왔다. 여기에는 당시의 지도적인 수학자인 A. L. Cauchy(1789-1857) 등도 참여했다.[5][6][7] 이들 성과에서 차츰 Euler의 다면체의 분류방법이 그 이상 진척될 가능성이 없음을 인식하게 되었다. Euler의 천재성이 시대적 사조와는 독립적으로 하나의 문제를 포착하는데 불과한 것으로 여겼던 것이다.

실지 Euler의 것과는 다른 방법이 본격적으로 등장한 것은 19세기의 중엽을 넘어야 했다. 이 작업은 Kirkman, Cayley, Möbius의 업적을 통해 성취된 것이다.[8][9][10] 그러나 한편 Euler의 정리의 적용범위는 단순한 凸다면체에서 벗어나 보다 일반적인 곡면에 적용된 것이다. 이 시기에는 Euler의 정리는 多面體를 단순한 기하학적인 대상으로 보지않고 해석학과 관련해서 고찰하기 때문이다. 그 내용은 L. Poinset (1777-1859)[11]가 고안한 星形多面體에서 볼 수 있으며 L'Huilier의 논문에서는 중요한 결과가 있다. 그것은 곡면에 구멍을 뚫어 놓은 공간이며 凸多面體를 일반화한 것이다. Euler의 결과를 보다 일반적인 이 곡면에 적용토록 한 것이다. 이 문제의 일반화 즉, 임의 방향이 있는 곡면에 관한 문제는

註 4) Legendre, A. M. Élements de Géométrie, Paris, 1808.

5) Cauchy, A, L., Recherches sur les polyédres, J. Éc. polyt. 16.

6) L' Huilier, S., Memoires sur les solides regulaires, Gergonnes Ann. de Math. 3(1812).

7) Steiner, J., Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphére et dans l'espaces en général, J. Math 24 (1842).

8) Kirkman, T. P., The K-partitions of N. Manchester Phil. Soc. Mem, 2(12) (1855).

9) Cayley, A., Chapters in the analytical geometry of n dimensions, Cambridge Math. J., 4 (1845).

10) Möbius, A. F., Theorie der elementaren Verwandtschaft Königl. Sächs, Ges, der Wiss, Leipzig 15 (1863).

11) Poinset, L., Memoire sur les polygones et les polyédres, J. Éc polyt, 10 (1809).

Möbius에 의해 해결된다.[12] Euler 등이 추구한 多面體의 분류문제와 관계없이 방향이 있는 곡면의 분류문제는 복소함수의 문제와 관련하여 B. Riemann (1826-1866)에 의해서 해결되었다.[13] 실지 Riemann의 업적은 이 위상적 지식이 해석적인 문제해결의 도구로서 각광을 받았으며 이 일을 계기로 하여 Topology의 한 분야로서 독립시킬 계기가 되었다.

(2) 위상동형과 일반공간론

한편 위상동형(Homeomorphism)의 개념도 19세기 중반에 와서야 중요시되었다. Möbius의 논문[10]에서 'Elementar Verwandshaft'의 개념이 도입되었고, 그것이 Homeomorphism의 선행적 역할을 한다. 여기서는 one to one, onto이면 가까운 점 사이의 관계가 그대로 유지되는 것으로 되어있다. 즉 연속성에 관한 성질이다. 그러나 연속에 관한 정확한 개념이 도입된 것은 그보다 약간 뒤의 일이다. 19세기말 해석학의 발전과 더불어 점집합론의 이론이 크게 주목되었고, 이 두가지 분야의 문제가 R^n에서의 위상적인 성질로서 파악되었다.

처음 G. Cantor (1845-1918)는 Fourier 급수의 문제에서 자극받아 점집합론을 창시하였다. G. Cantor는 부정방정식에 관한 논문에서 학위를 획득하였다. 이때의 보조제목은 다음과 같은 내용을 가졌다.

1. 해석적 방법에 대한 수론적 방법의 우월성
2. 시간・공간의 절대적 실재성에 대한 고찰
3. 수학에서의 문제제기의 중요성

여기에는 이미 집합론의 배경적인 역할을 하는 자연철학적 경향을 엿볼 수 있다

註 12) Möbius, A. F., Theorie der elementaren Verwandtschaft, Königl. Sächs, Ges, der Wiss, Leipzig 15(1863).

13) Riemann, B., Theorie der Abel' schen Funktionen, J. für Math. 54(1857), 115-155.

Cantor가 직접 집합론을 창출한 계기는 삼각급수에 관한 Riemann의 연구이다. 특히 Cantor는,

『두개의 삼각급수

$\frac{1}{2}b_0+\Sigma(a_n \sin nx+b_n \cos nx)$ ……………………………………………①

$\frac{1}{2}b'_0+\Sigma(a'_n \sin nx+b'_n \cos nx)$ ……………………………………………②

가 어느 구간에서 같이 수렴하고, 일치할 때에는 ①과 ②의 서로 대응하는 계수 a_n, a'_n, b_n, b'_n가 각각 일치한다.』

의 내용의 정리를 증명하였다. 즉 표현의 유일성에 관한 정리이며 1870년의 일이다. 그 후 이 가설의 의미를 약간 일반화하여 두급수의 수렴성, 또는 일반성이 무너지는 예외점이 어느정도 존재한 때에도 이 사실이 그대로 성립한 것을 증명하였다. 처음에는 이들 예외적인 점이 유한집합에 관해서였으나 마침내 그는 이 집합이 특수한 무한집합의 경우에도 성립됨을 밝혔다. 이 사실을 체계적으로 처리하기 위해서 집적점, 도집합의 개념이 도입되어 드디어 집합론의 길이 열렸다.

그리하여 집적점(limit) 및 閉苞(closure)의 개념을 도입하였다. 실질적으로 limit의 문제는 general Topology의 기본문제이며, M. Fréchet(1878-1974)와 F. Riesz(1880-1956)에 의해서 일반화되었다. 그때는 이미 20세기의 초반이다.[14)][15)] 이어서 F. Hausdorff(1868-1942)의 고전적인 책이 출간되어 general Topology가 탄생한다.[16)] 여기서 점집합론은 실수공간을 떠나서 추상공간이론이 되었다. 이때의 중심개념은 '가까움'과 '폐집합'이다. 추상공간론이 개척됨으로서 실수, 또는 복소수공간에 내재하는 번거로운 문제가 배제될 수 있었고, 공간이 체계적으로 정리되

註 14) Fréchet, M., Sur quelque points du calcul fonctionnel, Rend. Palermo 22(1906).

15) Riesz, F., Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre, Atti del Ⅳ congresso Inter, dei Matem., Vol. 2, 1908.

16) Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig (Veit), 1914.

어 본질적인 성격이 부각되었다.

(3) 複體(Complex)

추상적인 위상공간이론의 문제는 이미 Riemann에 의해 통찰되어 있었다. 복체의 개념은 평면상의 다각형 그리고 3차원 타면체의 연구를 추상화하는 과정에서 형성되었다. 현재 일반적으로 사용되고 있는 정의는 다음과 같다.

'單體的複體(Simplicial Complex) K는 R^n 상의 單體의 유한집합이며 다음 조건을 만족한다.

1. α가 K의 단체이면 α의 모든 면은 K에 속한다.

2. α, β가 K의 단체이면 $\alpha \cap \beta = \phi$ 또는 $\alpha \cap \beta$는 α와 β의 공통의 면이다.'

이것은 Alexander에 의해서 처음으로 채택되었다.[17] 한편 삼각분할(Triangulation)은 H. Weyl (1885-1955)이 도입했다. 추상적복체의 체계적인 연구는 W. Mayer[19], A. W. Tucker[20] 그리고 Lefschetz (1884-1972)[21]에 이어진다.

(4) 곡면(Surface)

Riemann곡면은 방향이 붙는 곡면에 대한 함수론적인 명칭이다. 그는 이 곡면을 일반적으로 고찰하기 위해서 위상동형(homeomorphism)을 생각한 것이다. 이때 그는 복소평면상에서의 다가함수의 영역을 적절히 확대함으로서 단가함수가 됨을 발견했다. 이 사실은 곡면이 함수의 적절한 영역이 될 수 있음을 나타내는 것

註 17) Alexander, J. W., Combinatorial analysis situs, Trans. A.M.S, 28(1926)

18) Weyl, H., Die Idee der Riemannschen Fläche Leipzig, 1923.

19) Mayer, J., Uber abstrakte Topologie, Monatsh. Math. Phys. 36 (1929).

20) Tucker, A. W., An abstract Approach to manifold, Ann. of Math. 34 (1933).

21) Lefschetz, S., Abstract Complexes, Lectures in Topology, Univ. of Michigan, Ann Arbor, Mich. (1941).

이며 해석함수의 기하학적인 성질을 위상학을 통해서 파악할 수 있음을 시사한 것이다. 그의 대수함수와 적분이론의 연구에서 사용된 위상적인 방법은 새로이 형성된 Topology의 중요성을 인식케 한다.

Riemann은 경계상의 두점을 연결하는 cut의 방법과[22] 매장된 원에 다른 cut[23]의 방법을 고안한 것이다. 특히 후자의 논문에서는 곡면상의 종수(Genus)를 다음과 같이 정의한다.

'곡면을 분리시키지 않고 서로 교차하지 않는 원들의 최대의 갯수'

현재 일반적으로 채택되어 있는 곡면의 정의는 다음과 같다.

'곡면 F는 위상다면체이며, ($\overline{K}$, f)로 표시될 때

(i) $\overline{K}$는 2차원 준다양체이며,

(ii) K의 경계상에 없는 각 꼭지점 a는 B^2과 동위상인 근방을 갖는다.

여기서 ($\overline{K}$, f)는 다면체 P와 동위상인 X이며 K는 기하적복체이고,

P=$\overline{K}$, 그리고 f는 위상사상이다.'

곡면의 개념은 이미 1865년에 나타난 Möbius의 논문에서 이미 볼 수 있었다.[24] 한편 정규형식으로 곡면을 나타내는 방법은 1861년에 Listing에 의해서 발표되었다.[25] Möbius는 Listing의 생각을 답습하여 분류문제 해결에 나섰다.[26] 그러나 이것과는 독립적으로 Gauss가 60년이나 앞서 토러스의 문제를 같은 수법으로 다

註 22) Riemann, B., Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer Veranderlichen Complexen Grosse, Dis Gött, 1851, Nr. 6.

23) ________, Theorie der Abel'schen Funktionen, J. für Math. 54(1857).

24) Möbius, A. F., Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders, Königl. Sächus. Ges.Wiss, Leipzig 17(1865).

25) Listing, J. B., Der Gensus räumlicher Komplexe, Abh. Ges. Wiss. Göttingen 10(1861).

26) (12)와 같음.

루고 있었다.[27] 수학사적으로 본다면 Gauss의 이 분야에 관한 연구는 Euler의 의 多面體定理와 같은 성격이었음은 그후의 연구가 이어지지 않은 것이다.

구면에 구멍과 把手를 놓고 곡면을 분류하는 것은 19세기말 Cifford[28]와 Klein[29]의 성과에서 구체화되었다.

(5) 사영평면

사영평면 P^2은 다음과 같이 정의된다.

'S^2의 각 점 x가 $-x$와 동일시되어 얻은 공간'의 개념이 처음 나타난 것은 위상학에서가 아니라 사영기하학에서였다. 사영에 대한 사고의 뿌리는 멀리 희랍시대로 거슬러 간다. 즉 기원전 3세기로 알려져있는 알렉산드리아 Pappus는 그 시기에 이미 사영의 개념을 충분히 감지하고 있었다. 사영은 투사로서도 알려져 있으며 르네상스의 건축, 미술에 활발하게 채택되었다. 즉 원근법이다. 역사적으로 본다면 사영평면 P^2은 처음에 직선의 평행과 교차하는 경우를 동일시하는데서 비롯되었다. 즉 사영기하학의 기본개념이다. 처음 P^2을 정의한 것은 J.V.Poncelet(1788-1867)이었고, 그것은 사영기하학이 수학적 대상으로 확립될 때의 일이다.[30] 그러나 오늘날 이 개념은 확대되어 이를테면 RP^n, CP^n, HP^n 등, 즉,실 n차, 복소n차, 그리고 4원수 n차 사영과 같이 되어 대수적 위상학의 중요한 대상이 되어 있다.

註 27) Gauss, C. F., Werke 8, 271-286.

28) Clifford, W. K., On the canonical form and dissection of a Riemann surface, Proc. London Math. Soc. 8(1877).

29) Klein, F., Über Riemann Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale, eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen, B.G., Tewoner 1882.

30) Poncelet, J. V., Traite des propriétés Projectives des Figures, Paris 1822.

n차 다양체의 개념은 국소적으로 R^n과 동위상임을 말하는데 Riemann이 처음 해석적인 입장에서 생각한 것은 1854년의 일이다.[31] 그러나 다양체의 개념은 그보다 앞서 몇몇 기하학자가 생각하고 있었다. 특히 고차원 다양체는 1843년과 1844년에 Cayley[32]와 Grassmann[33]에 의해 각각 발표되었다. 그리하여 1852년에 Euler의 정리는 n차 凸多面體에 확장된다.

(6) Combinatorial Topology

곡면이론이 수학의 주요문제로 등장한 것은 19세기 말이다. Betti가 n차 다면체에 관해 기본적인 개념을 확립한 것은 1871년이다.[34] 그러나 이들 작업은 모두 Topology의 형성을 의식한 것은 아니었다. 결국 Combinatorial Topology의 형성은 Poincare을 기다려야 했다. 그 업적만으로도 그는 20세기의 수학을 개척한 위대한 수학자이지만 그보다는 19세기의 수학을 정리하여 응용과 순수의 거의 모든 수학의 분야에 현대적 수학의 기틀을 마련한 점이 중요하다. Topology는 19세기의 해석학의 내용에서 새로운 분야로 독립된 것이다. 특히 그에게 있어서는 위상학의 성과는 대수적 함수의 영점의 문제를 규명함으로서 이루어진 것이다. 이 결과로 Riemann곡면의 문제와 고차원 다양체의 특이성의 문제가 체계적으로 정리되었다. 1895년에 시작된 그의 일련의 성과에서 n차원 공간의 문제가 정비된 것이다.[35]

註 31) Riemann, B., Über die Hypothesen, Welche der Geometric Zur Grunde liegen, Habilitationschript, Göttingen, 1854.

32) Cayley, A., Chapters in analytical geometry of n dimensiens, Cambridge Math, J. 4(1845).

33) Grassmann, H., Die Lineale Ausdehnungslehere, Leipzig, 1844.

34) Betti, E., Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni, Ann. Math. Pura Appl. 2(K) (1871).

35) Poincare, H., Analysis situs, J. Éc. polyt(2) 1.(1895).

그 논문에서는 아직도 다양체를 대수적 함수로 생각하고 있으며 해석적인 성격을 지니고 있다. 그는 Betti 수를 정의하여 Euler의 정리를 일반화했고 드디어 1899년에 이르러 Poincare는 해석적 수법을 포기하고 manifold의 多面體적인 정의를 채택하여 보다 많은 결과를 얻게 되었다.[36] 이때 그는 Torsion의 개념을 도입하였다. 그는 多面體의 연구를 전제로 하고 單體대신 curved cell를 이용했으나 그 내용은 근본적으로는 單體的複體와 같은 것이었고 이때 combinatorial Topology를 확립하게 된 것이다. 이어서 그는 Torsion계수와 Betti 수의 계산방법을 복체와 자연스럽게 관련되는 행렬을 이용하여 고안했다.[37] 이 matrix의 수법은 Homology군의 계산을 단순한 기계적인 문제로 귀착시킨 것이다.

현재처럼 Homology이론을 군론적인 방법으로 다루는 것은 E. Nother (1882-1935) 때문이다. Homology군이 정식으로 표준수법으로 등장케 된 것은 1930년대의 일이다.[38] 참고로 말한다면 Homology군은 처음에는 Betti group으로 불렀다. Poincare의 성과 가운데 특히 중요한 것은 1895년의 논문이다. 그는 여기에서 多樣體에 관한 雙對의 理論을 확립한 것이다. 즉,

'M가 경계없는 n차의 compact인 방향을 갖는 多樣體라 하면 M의 k차와 (n-k)차의 Betti 수는 일치한다.'

Betti는 Poincare에 앞서 이 사실을 감지하고 있었고 1871년의 논문에는 3차의 多樣體의 경우에 대해서는 그 내용을 증명하고 있었다.[39] 그러나 Betti 자

註 36) Poincare, H., Complément a l'analysis situs, Rend. Circ. Mat. Palermo 13(1899).

37) ___________, Second Complément a l'analysis situs, Proc. London Math. Soc. 32(1900).

38) Alexandroff, P. S., and Hopf, H., Topologie, springerverlay, Berlin 1935.

39) (34)의 논문.

신이 내린 Betti 수의 정의는 Poincare의 것과는 약간의 차이점이 있었고, 그것으로는 雙對理論이 성립시킬 수도 없고 Euler 정리마저 일반화 할 수 없는 것이다. 오늘날의 多樣體理論에 雙對理論이 갖는 의의를 생각한다면 Poincare가 가한 Betti 수에 관한 약간의 수정은 매우 큰 의미를 지닌다.

Poincare의 또하나의 중요한 업적은 기본군의 개념이며 1895년에 발표되어 있다.[40] 즉 $\pi_1(X, *)$, X의 $*$에 있어서의 기본군으로 알려져 있으며 카테고리적인 표현으로는 다음과 같은 형태로 알려져 있다.

'π_1은 C^*에서 $\mathcal{J}$에의 함수(functor)이다.'

여기서 C^*는 기점 $*$를 갖는 위상공간과 연속함수의 카테고리이며, $\mathcal{J}$는 군과 준동형 사상으로 이루어진 카테고리이다. 특히 X상의 모든 폐곡선이 한점으로 수축될 때, 즉 X가 단연결일 때 X는 자명한 기본군을 갖는다.

즉, $\pi_1(X,*) = \{0\}$.

K의 Homology 군을 $H_q(K)$로 표시하면,

$$H_q(K) = Z_q(K)/B_q(K)$$

이다. 단, $Z_q(K)$는 K의 輪體이며, $B_q(K)$는 경계輪體이다.

X가 자명한 기본군을 갖는다는 사실은 $H_1(X) = 0$보다 강한 조건을 뜻한다. Poincare의 예상으로 알려져 있는 명제가 발표된 것은 1904년의 일이다.[41]

(Poincare의 예상) : Compact인 3차원 多樣體 X로서 단연결인 것은 3차원 구면 S^3와 동위상이다.

$H_1(K) = H_2(K) = \{0\}$이고 S^3와 동위상이 아닌 X의 보기는 Poincare 자신이

註 40) (35)의 논문.

41) Poincare, H., Cinquiéme complément á l'analysis situs, Rend. Circ. Mat Palermo 18(1904).

발표하였다.[42] 이 예상은 차원이 높은 것에 대해서는 해결되어 있는데도 지금까지 증명되지 않고 있다. 이 문제가 제기된 동기는 Homology군과 기본군으로서 多樣體를 규정하는데서 비롯된 것이다.

Poincare의 Homology理論은 공간에서의 포체분할을 관련시키는 것이었으므로 위상적 불변성이 제기되었다. 주어진 포체분할의 부분분할이 위상적 불변성을 갖는다는 사실을 유도하자 Poincare는 곧이어서 두번째의 중요한 예상을 세웠다.

'하나의 多面體에 주어진 두개의 포체분할은 동형인 부분분할을 갖는다.'

이 예상은 Hauptvermutung의 이름으로 알려져 있다. 이 예상은 곧 차원이 1과 2의 경우에 대해서는 증명이 되었으나 차원이 5를 넘을 경우에는 성립할 수 없음이 Milnor에 의해 1961년 증명되었다.[43]

이 문제에 관해서 보다 세련된 결과는 최근에 이루어진 Kirby와 Siebemann에 의해 해결되었다. 이들 두사람은 1969년의 논문에서 차원이 4이상인 多樣體로서 Hauptvermutung가 성립하지 않은 것이 존재함을 제시한 것이다.[44]

위상학은 처음 그것을 낳게한 모양을 잊은 채 독립된 분야에서 스스로의 과제를 안고 계속 새로운 문제를 제기하고 있다.

註 42) (41)과 같음.

43) J. Milnor : Two complexs which are homeomorphic but combinatorially distinct, Ann. of Math. 74(1961).

44) Kirby, R. C., and Siebenmann, L. C., On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung, Bull, A.M.S. 75(1969).