

FEM에 의한 3 邊測量的 解析에 關한 研究

A Study on the Analysis of Trilateration Adjustment by Finite Element Method (FEM)

李 啓 鶴*

Lee Kye - Hak

鄭 璡 鉉***

Jeong Ki-Hyun

張 智 元**

Jang Ji - Won

金 旭 南****

Kim Uk - Nam

要 旨

本 研究는 FEM에 의한 3 邊測量的 調整을 解析하는데 그 目的이 있으며, FEM은 對象物의 變位 및 變動의 問題를 解析하는 數值解析이다.

本 研究에서는 平面 3 角網과 平面構造物과의 形象과 解析이 비슷하기 때문에 FEM의 技法을 3 邊測量調整에 利用하였다.

따라서 本 研究에서는 3 邊測量調整에 FEM과 條件方程式方法을 適用하여 그들의 精密度와 特性을 考察하였다.

ABSTRACT

The object of this study is to analyze the trilateration adjustment by FEM. FEM is a numerical method for analysis dealing with problems of displacement and variation about the object.

Since a plane trilateration net can be likend to a plan structural frame work in stress analysis, the technic of FEM can be used for trilateration adjustment

Thus, this study applied FEM and Condition Equation Method to a trilateration adjustment, and investigated precision and characteristics of them.

I. 序 論

FEM은 對象物의 變位 및 變動의 問題를 解析하는 數值解法의 一種으로서 오늘날 科學技術 全般에 널리 適用되고 있는 數值解析 또는 Simulation 技法이다.

* 全南大學校 工科大學 教授

** 木浦大學 專任講師

*** 全南大學校 工科大學院

**** 延世大學校 産業大學院

이는 모든 物体가 有限數의 작은 成分 또는 要素 (Component or Element)로 構成되었고 이 要素들은 有限數의 測點 또는 節點 (station or nodal point)으로 連結되었다고 假定한다.^{1), 2), 3)}

3 邊測量에 있어서 3 角網의 調整法에 대해서는 이미 여러가지 技法이 研究開發되어 왔으나 특히 우리나라에서는 3 邊測量에 FEM을 利用한 뚜렷한 研究가 開發되지 않고 있는 實情이다. 따라서 本 研究에서는 平面강뼈대 構造物의 形象과 3 角網의 形象이 비슷하고 강뼈대 構造物의 應力解析이 3 角網의 解析과 비슷한 點을 着

案하여 이 技法을 3 邊測量에 適用함으로써 正確度 높은 3 角網의 調整을 期하며 特히 本 研究에서는 3 邊測量으로 求한 4 邊網에 FEM의 技法을 活用하는데 있어서 實際適用 되는 Program 開發과 이를 條件方程式에 依한 調整값과도 比較檢討하고자 한다.

II. 理論展開

本 研究를 遂行함에 있어서 Surveying과 Structure와의 相互對應關係를 表示하는 Equivalent Expressions는 Table-1과 같다.^{2),3)}

Table 1 Equivalent Expressions

Surveying (1)	Structure (2)
Net	Framework
Plane trilateration	Plane truss
Point	Node
Distance	Member, rod element
Misclosure	Misfit, distortion
Weight, P	Stiffness, k
Easting, E	X coordinate
Northing, N	Y coordinate
Distance, L	Modulus of Elasticity, E
Weight, P	Cross-section area, A

1. FEM에 依한 3 邊測量解析

1) Stiffness Matrix

Fig. 1의 節點(nodal Point) 1, 2에 各各의 힘 f_1, f_2 가 作用하여 軸方向變位 U_1, U_2 가 發生할 때 이들에 對한 關係式은 다음식(1)과 같이 matrix form으로 表示된다.^{2),3)}

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \dots (1)$$

式(1)을 一般 Compact matrix form으로 表示하면

$$\{ f \} = [K] \{ U \} \dots (2)$$

2) Stres Matrix

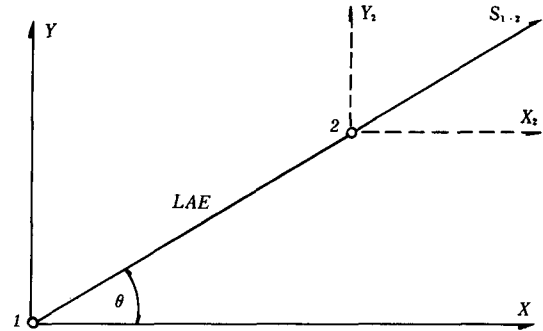


FIG. 2. Equivalent nodal forces (X_1^e, Y_1^e) and corresponding internal force (S_{1-2}) for truss member.

Fig. 2는 어느 構造物의 Truss部材에서 Equivalent nodal forces (X_1^e, Y_1^e)와 이에 對應하는 内力(S_{1-2})를 圖示한 것으로 여기서 (X_1^e, Y_1^e)는

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_1^e &= \frac{AE}{L} [(U_1 - U_2)\lambda^2 + (V_1 - V_2)\lambda\mu] \\ \bar{Y}_1^e &= \frac{AE}{L} [(U_1 - U_2)\lambda\mu + (V_1 - V_2)\mu^2] \\ \bar{X}_2^e &= \frac{AE}{L} [(U_2 - U_1)\mu^2 + (V_2 - V_1)\lambda\mu] \\ \bar{Y}_2^e &= \frac{AE}{L} [(U_2 - U_1)\lambda\mu + (V_2 - V_1)\mu^2] \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

이 되며 위의 式(3)을 Matrix form으로 表示하면

$$\begin{Bmatrix} X_1^e \\ Y_1^e \\ X_2^e \\ Y_2^e \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu - \lambda^2 - \lambda\mu \\ \lambda & \mu^2 - \lambda\mu - \mu^2 \\ -\lambda^2 - \lambda\mu & \lambda^2 & \lambda\mu \\ -\lambda\mu & -\mu & \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} \dots (4)$$

이 되고 또한 이를 Compact Matrix form 으로
表示하면”

$$\therefore \{ X^e \} = [IK] \{ U \} \dots\dots\dots(5)$$

이 된다. 또한 member internal force S_{1-2} 는

$$\begin{aligned} S_{1-2} &= X_2^e \cos \theta + Y_2^e \sin \theta \\ &= X_2^e \lambda + Y_2^e \mu \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

이 되며 윗式(3)을式(6)에 代入하여 이를
Convenient matrix form으로 表示하면

$$\begin{aligned} S_{1-2} &= \frac{AE}{L} [(U_2 - U_1)\lambda + (V_2 - V_1)\mu] \\ \therefore S_{1-2} &= \frac{AE}{L} [\lambda, \mu] \begin{Bmatrix} U_2 - U_1 \\ V_2 - V_1 \end{Bmatrix} \dots\dots(7) \end{aligned}$$

이 된다. 따라서 任意의 member (nodes i and
 j)에 대한 internal force ($S_{i,j}$)는 다음 式으로
表示한다.

$$S_{ij} = \left(\frac{AE}{L} \right)_{ij} [\lambda, \mu]_{ij} \begin{Bmatrix} U_j - U_i \\ V_j - V_i \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(8)$$

3) Redundant Number

任意點의 位置가 決定되는데 必要한 測線의
數는 Truss가 安定하는데 必要한 部材의 數와
같다. 여기서 任意의 3角網을 考慮하면 Red-
ndant의 數 R 은 다음 式으로 求할 수 있다.⁹⁾

$$R = j - 2I + 3 \dots\dots\dots(9)$$

여기서 j : 測定辺數, I : 測點數

4) Initial Coordinate의 計算과 Redundant 送扱

여기서 Initial Coordinate (基準點)와 基準線
의 方位角이 주어지거나 假定되면 나머지 點은
基準點으로부터 求할 수 있다. 이와 같이 하여
모든 座標가 決定되면 다음에 Redundant를 送扱
하여야 한다.

예컨데 Fig. 3과 같이 任意의 4邊形에서 基
準點을 P_1 이라 하고 P_1 에서 P_2 의 方位角을 90°
로 잡고 (X 軸), Redundant의 數(R)을 計算하면
 $R = 6 - 2 \times 4 + 3 = 1$ 개가 된다. 本 研究에서는
 $\overline{P_3 P_4}$ 를 Redundant로 送扱한다. 여기서 Redund-
ant의 適切한 送扱은 計算의 量과 時間의 節減

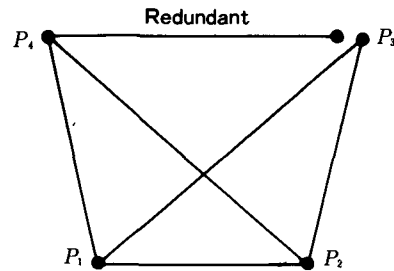


Fig. 3. Quadrangle

을 가져온다.

5) Misclosure

Redundant의 部材는 觀測에 依해 求해지는
量과 計算에 依해 求해진 量으로 나타내며 이 두
量의 差를 Misclosure 또는 Misfit라 한다. 위의
4邊網에서는 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 와 $\Delta P_1 P_2 P_4$ 에서 얻어진
 P_3 點, P_4 點의 座標로 부터 $\overline{P_3 P_4}$ 距離를 求하고
이것과 觀測에서 얻어진 量과의 差를 가지고
Misclosure로 定한다.

6) Weight (輕重率)

測量과 構造와의 相關關係에서 Weight를 表
示하면 다음과 같다.^{3), 4)}

$$P = K = \frac{AE}{L} \dots\dots\dots(10)$$

$$V = \Delta L = \frac{fL}{AE} \dots\dots\dots(11)$$

여기서, P : Weight, ΔL : Change in length
of member, K : Stiffness, V : Correction of
distances 그리고 위의 式(10)에서 $L = E$ (Ta-
ble - 1 參照)가 되므로 $P = A$ 가 된다.

7) Constraint, Loading

모든 뼈대 構造物은 最小 2點 以上 支持되어
야 安定하고 自由 3邊網에서는 한 基準點과 한
方向이 固定됨으로써 3邊網은 構造적으로 安定
하게 된다.³⁾

따라서 ① Initial nodal point i 가 固定되면 X

Y의 Component는 Zero가 되며 ② X軸에 따라 初基點이 移動할때 X의 變位成分 V는 Zero가 된다.

③ Initial nodal point가 Fig. 5와 같이 直線上을 移動할때

$$y = \frac{1}{\tan(P_1 P_2)} X \dots\dots\dots (12)$$

이 되고.

④ 뼈대 構造物에서는 荷重이 힘이나 變位로 나타나나 3 邊網에서는 element axis에 따라 distortion으로 나타난다.

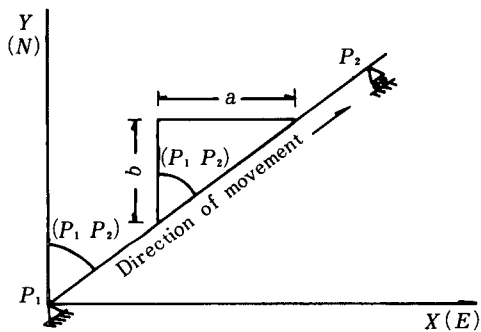


FIG. 4. Geometrical Representation of Directional Constraint on Displacements

8) Out Put Information

① 最終調整座標 \bar{N} 및 \bar{E} 는 다음 式으로 表示된다.

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_i &= N_i + \delta N_i = Y_i + V_i \\ \bar{E}_i &= E_i + \delta E_i = X_i + U_i \end{aligned} \right\} \dots\dots (13)$$

여기서, $\delta N_i, \delta E_i$ 는 各各 Y 및 X軸의 補正量이다.

② Element force (axial forces)

各 element 即 距觀 j의 補正量 V_j 는

$$V_j = \frac{f_j}{\frac{A_j \times E_j}{L_j}} = \frac{f_j}{P_j} \dots\dots\dots (14)$$

이 된다. 따라서 길이의 補正은 힘(force)에 依해 얻어지며 이는 各 部材의 Weight에 反比

例한다.

③ 其他 變位, 距觀, 精密度 그리고 收斂 등에 대하여 考慮한다.

9) 4 邊網에 適用

上述한 FEM의 技法을 實際적으로 4 邊網에 適用하는 順序를 列擧하면 다음과 같다.

① 各 部材에서의 λ 및 μ 값을 求하고 各 部材의 Stiffness Matrix를 求한다.

② 各 部材의 Stiffness Matrix로 부터 全体 Stiffness Matrix를 求한 다음

③ 各 部材의 internal force를 求하여 最終적으로 補正量을 算出한다.

(1) 各 部材의 Stiffness Matrix의 計算

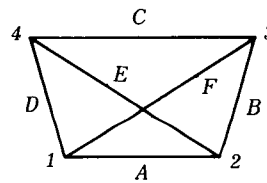


Table 2 Members and Angles for Quadrilateral

members	θ	λ	μ	L
1 - 2	$\theta_A = 0$	$\cos \theta_A$	$\sin \theta_A$	A
1 - 3	$\theta_F = \tan^{-1}(Y_3/X_3)$	$\cos \theta_F$	$\sin \theta_F$	F
1 - 4	$\theta_D = \tan^{-1}(Y_4/X_4)$	$\cos \theta_D$	$\sin \theta_D$	D
2 - 3	$\theta_B = \tan^{-1}(Y_3 - Y_2/X_3 - X_2)$	$\cos \theta_B$	$\sin \theta_B$	B
2 - 4	$\theta_E = \tan^{-1}(Y_4 - Y_2/X_4 - X_2)$	$\cos \theta_E$	$\sin \theta_E$	E
3 - 4	$\theta_C = \tan^{-1}(Y_4 - Y_3/X_4 - X_3)$	$\cos \theta_C$	$\sin \theta_C$	C

Table 2의 λ 와 μ 값으로 부터 Stiffness Matrix를 求할 수 있다.

只令 部材 $P_1 - P_2$ 에서, $\lambda = \cos \theta_A$ 로 놓고 $1K_{1-2}$ 를 計算하면,

$$1K_{1-2} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} U_1 & V_1 & U_2 & V_2 & U_3 & V_3 & U_4 & V_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_1 \mu_1 & -\lambda_1^2 & -\lambda_1 \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 \mu_1 & \mu_1^2 & -\lambda_1 \mu_1 & -\mu_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_1^2 & -\lambda_1 \mu_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1 \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 \mu_1 & -\mu_1^2 & \lambda_1 \mu_1 & \mu_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots (15)$$

이 된다.

또한 式(15)에 의하여 $1K_{1-3}, 1K_{1-4}, 1K_{2-3}, 1K_{2-4}, 1K_{3-4}$ 도 求할 수 있다.

(2). 全体 Stiffness Matrix 計算

全体 Stiffness Matrix는

$$1K = 1K_{1-2} + 1K_{1-3} + 1K_{1-4} + 1K_{2-3} + 1K_{2-4} + 1K_{3-4} \dots\dots\dots(16)$$

과 같다.

全体 Matrix는 다음 式(17)와 같이 나타난다.

$$1K = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} U_1 & V_1 & U_2 & V_2 & U_3 & V_3 & U_4 & V_4 \\ \lambda_1^2 + \lambda_3^2 + \lambda_6^2 & \lambda_4^2 & & & & & & \\ \lambda_1\mu_1 + \lambda_4\mu_4 + \lambda_6\mu_6 & \mu_1^2 + \mu_4^2 + \mu_6^2 & & & & & & \\ -\lambda_1^2 & \lambda_1\mu_1 & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_5^2 & & & & & \\ -\lambda_1\mu_1 & -\mu_1^2 & \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_5\mu_5 & \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_5^2 & & & & \\ -\lambda_3^2 & -\lambda_6\lambda_6 & -\lambda_2 & -\lambda_2\mu_2 & \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_6^2 & \mu_6 & & \\ -\lambda_6\mu_6 & -\mu_6^2 & -\lambda_2\mu_2 & -\mu_2^2 & \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 + \lambda_6\mu_6 & \mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_6^2 & & \\ -\lambda_4^2 & -\lambda_4\mu_4 & -\lambda_5^2 & -\lambda_5\mu_5 & -\lambda_3^2 & -\lambda_3\mu_3 & \lambda_3^2 + \lambda_4^2 + \lambda_5^2 & \\ -\lambda_4\lambda_4 & -\mu_4^2 & -\lambda_5\mu_5 & -\mu_5^2 & -\lambda_3\mu_3 & -\mu_3^2 & -\lambda_3\mu_3 + \lambda_4\mu_4 + \lambda_5\mu_5 & -\mu_3^2 + \mu_4^2 + \mu_5^2 \end{bmatrix} \dots\dots(17)$$

式(17)를 式(4)에 代入하고 이들 Compact Matrix Form으로 表示하면

$$\{ X^e \} = [JK] \{ U \} \dots\dots\dots(18)$$

이 된다.

2. 條件方程式에 依한 3 邊測量解析

1) 條件式의 數

只令 任意의 3 角網에 對하여 條件式의 數 G 는 前述한 Redundant Number와 같이^{5), 6), 7)}

$$G = S - 2P + 3 \dots\dots\dots(19)$$

으로 表示하고 여기서 S는 測定邊數, P는 測點數이다.

따라서 4 邊網에 對하여 考慮하면

$$G = 6 - 2 \times 4 + 3 = 1 \text{ 이 되어 條件式의 數는 1 個가 된다.}$$

2) 角條件方程式에 依한 方法 (偶角部 P₁ 點에서)

Fig. 5에서 P₁點의 角觀測量을 各各 a₁ = ma₁, a₂ = ma₂ 그리고 a₃ = ma₃이라 하면 P₁點의 條件方程式은 a₁ + a₂ = a₃(20) 이 된다.

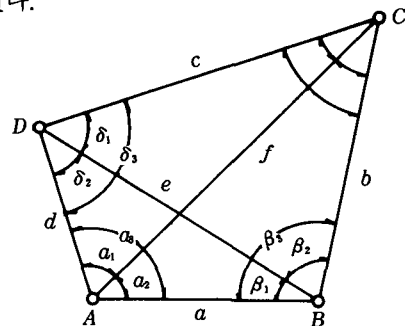


Fig. 5. Quadrilateral Adjustment by Trilateration

또한 cosine 第2法則에 의하여 $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2$ 그리고 $\cos \alpha_3$ 는 다음 式과 같이 表示된다.^{5), 6), 7)}

$$\left. \begin{aligned} \cos m\alpha, 1 &= \frac{md^2 + mf^e - mc^2}{2 \cdot md \cdot mf} \\ \cos m\alpha, 2 &= \frac{ma^2 + mf^e - mb^2}{2 \cdot ma \cdot mf} \\ \cos m\alpha, 3 &= \frac{ma^2 + md^2 - me^2}{2 \cdot ma \cdot md} \end{aligned} \right\} \dots\dots (21)$$

위의 式(21)의 左, 右邊을 全微分을 取하여 整理하면

$$\begin{aligned} -\sin m\alpha, 1 \cdot \Delta\alpha_1 &= \frac{mc^2 + md^2 - mf^e}{2 \cdot md \cdot mf} \Delta d \\ &+ \frac{mc^2 - md^2 + mf^e}{2 \cdot md \cdot mf^e} \Delta f + \frac{2 \cdot mc}{2 \cdot md \cdot mf} \Delta c \\ -\sin m\alpha, 1 \cdot \Delta\alpha_1 &= \frac{mc}{md \cdot mf} \left(\frac{mc^2 + md^2 - mf^e}{2 \cdot mc \cdot md} \right) \\ &+ \frac{mc}{mf \cdot md} \left(\frac{-md^2 + mf^e + mc^2}{2 \cdot mc \cdot mf} \right) \\ &\Delta f + \frac{2 \cdot mc}{2 \cdot md \cdot mf} \Delta c \\ -\sin m\alpha, 1 \cdot \Delta\alpha_1 &= \frac{mc}{md \cdot mf} \left\{ \cos m\delta, 3 \cdot \right. \\ &\left. \Delta d + \cos m\alpha, 2 \cdot \Delta f + \Delta c \right\} \dots\dots (22) \end{aligned}$$

이 되고 또한 $\Delta P_1 P_3 P_4$ 는 正弦의 法測에 依하여 다음 式(23)이 誘導된다.

$$\left. \begin{aligned} \sin m\alpha, 1 &= \frac{mc}{mf} \sin m\delta, 3 \\ \sin m\alpha, 1 &= \frac{mc}{md} \sin m\gamma, 2 \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

따라서 式(23)을 式(22)에 代入하여 $\Delta\alpha_1$ 을 求하면

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_1 &= \frac{-1}{md} (\cot m\delta, 3) \Delta d + \frac{-1}{mf} \\ &(\cot m\gamma, 2) \Delta f + \frac{1}{md} (\text{cosec} \end{aligned}$$

$$m\delta, 3) \Delta c \dots\dots\dots (24)$$

이 된다.

따라서 $\Delta\alpha_2$ 와 $\Delta\alpha_3$ 도 式(24)와 같은 方法으로 求할 수 있다.

$$\begin{aligned} \therefore \Delta\alpha_2 &= -\frac{1}{mf} (\cot m\gamma, 1) \Delta f - \frac{1}{ma} \\ &(\cot m\beta, 3) \Delta a \\ &+ \frac{1}{mf} (\text{cosec} m\gamma, 1) \Delta b \dots (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta\alpha_3 &= -\frac{1}{ma} (\cot m\beta, 1) \Delta a \\ &- \frac{1}{md} (\cot m\delta, 2) \Delta d \\ &+ \frac{1}{ma} (\text{cosec} m\beta, 1) \Delta e \dots\dots (26) \end{aligned}$$

또한 條件方程式은

$$\varphi \equiv \Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 - \Delta\alpha_3 + W = 0 \dots\dots\dots (27)$$

이 된다.

따라서 式(27)에 式(24), (25), (26)을 代入하여 整理하면 다음 式(28)이 된다.

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv \frac{1}{ma} (\cot m\beta, 1 - \cot m\beta, 3) \Delta a + \frac{1}{mf} \\ &(\text{cosec} m\gamma, 1) \Delta b \\ &+ \frac{1}{md} (\text{cosec} m\delta, 3) \Delta c + \frac{1}{md} (\cot m \\ &(\cot m\delta, 2 - \cot m\delta, 3) \Delta d \\ &- \frac{1}{ma} (\text{cosec} m\beta, 1) \Delta e - \frac{1}{mf} \\ &(\cot m\gamma, 1 + \cot m\gamma, 2) \Delta f + W = 0 \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

윗式을 未定係數法에 依한 最小제곱의法의 原理를 利用하여 調整量 $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \dots, \Delta f$ 를 計算한다.^{5), 6), 7)}

3) 面積條件方程式에 依한 方法

只今 Fig. 6의 4邊形에서 各各의 面積을 다음 S_1, S_2, \dots, S_5 로 表示한다.

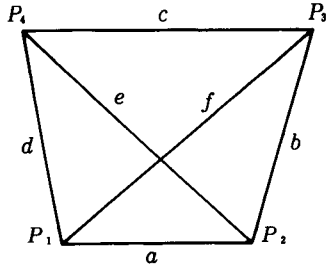


Fig. 6 . Quadrangle

$S_1 = \Delta P_1, P_2, P_3$ 의面積

$S_2 = \Delta P_1, P_3, P_4$ 의面積

$S_3 = \Delta P_1, P_2, P_4$ 의面積

$S_4 = \Delta P_2, P_3, P_4$ 의面積

$S_5 = \square P_1, P_2, P_3, P_4$ 의面積

따라서 $S_5 = S_1 + S_2$, $S_5 = S_3 + S_4$ 가 되며條件方程式은

$$W = S_5 - \frac{1}{2} (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) = 0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

이 되어야 한다.

또한 式 (29)의 微分方程式은

$$\varphi = \Delta S_5 - \frac{1}{2} (\Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4) + W = 0 \quad \dots\dots\dots (30)$$

이 된다.

Fig. 6에서 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 의面積을求하면

$$S_1 = \sqrt{K_1(K_1 - a)(K_1 - b)(K_1 - f)} \dots\dots (31-1)$$

$$\text{단, } K_1 = \frac{a+b+f}{2}$$

$$S_2 = \sqrt{K_2(K_2 - c)(K_2 - d)(K_2 - f)} \dots\dots (31-2)$$

$$\text{단, } K_2 = \frac{c+d+f}{2}$$

$$S_3 = \sqrt{K_3(K_3 - a)(K_3 - d)(K_3 - e)} \dots\dots (31-3)$$

$$\text{단, } K_3 = \frac{a+d+e}{2}$$

$$S_4 = \sqrt{K_4(K_4 - b)(K_4 - c)(K_4 - e)} \dots\dots (31-4)$$

$$\text{단, } K_4 = \frac{b+c+e}{2}$$

$$S_5 = \frac{1}{2} \sqrt{e^2 \times f^2 - \gamma^2} \quad \dots\dots\dots (31-5)$$

$$\text{단, } \gamma = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2}$$

이 된다.

式 (31-1), (31-5)를全微分을取하여整理하면 다음 式 (32), (33)과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta S_1 = & \frac{-a^3 + ab^2 + af^2}{8 \cdot S_1} \Delta a + \\ & \frac{-b^2 + a^2b + bf^2}{8 \cdot S_1} \Delta b + \\ & \frac{-f^3 + a^2f + b^2f}{8 \cdot S_1} \Delta f \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta S_5 = & \frac{e \cdot f^2}{4 \cdot S_5} \Delta e + \frac{e^2 f}{4 \cdot S_5} \Delta f - \frac{a}{8 \cdot S_5} \\ & \Delta a + \frac{b}{8 \cdot S_5} \Delta b - \frac{c}{8 \cdot S_5} \Delta c \\ & + \frac{d}{8 \cdot S_5} \Delta d \quad \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

따라서 $\Delta S_2, \Delta S_3, \Delta S_4$ 도 式 (32)과 같은 式法으로求할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{即, } \therefore \Delta S_2 = & \frac{-c^3 + cd^2 + cf^2}{8 \cdot S_2} \Delta c \\ & \frac{-d^3 + c^2d + df^2}{8 \cdot S_2} \Delta d + \\ & \frac{-f^3 + c^2f + d^2f}{8 \cdot S_2} \Delta f \quad \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta S_3 = & \frac{-c^3 + cb^2 + ce^2}{8 \cdot S_3} \Delta c + \\ & \frac{-b^3 + c^2b + bc^2}{8 \cdot S_3} \Delta b + \\ & \frac{-e^3 + c^2e + b^2e}{8 \cdot S_3} \Delta e \quad \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta S_4 = & \frac{-a^3 + ad^2 + ae^2}{8 \cdot S_4} \Delta a + \\ & \frac{-d^3 + c^2b + bc^2}{8 \cdot S_4} \Delta d + \\ & \frac{-e^3 + a^2e + d^2e}{8 \cdot S_4} \Delta e \quad \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

이들의 式 (32) ~ (36) 를 式 (30) 에 代入하여 整理하면

$$\begin{aligned}
 \varphi \equiv & \left(\frac{a^3 - ab^2 - af^2}{16 \cdot S_1} + \frac{a^3 - ad^2 - ae^2}{16 \cdot S_1} \right. \\
 & \left. \frac{a}{8 \cdot S_5} \right) \Delta a \\
 & + \left(\frac{b^3 - a^2b - bf^2}{16 \cdot S_1} + \frac{b^3 - c^2b - bc^2}{16 \cdot S_3} \right. \\
 & \left. + \frac{b}{8 \cdot S_5} \right) \Delta b \\
 & + \left(\frac{c^3 - cd^2 - cf^2}{16 \cdot S_2} + \frac{c^3 - cb^2 - ce^2}{16 \cdot S_3} \right. \\
 & \left. \frac{c}{8 \cdot S_5} \right) \Delta c \\
 & + \left(\frac{d^3 - c^2d - df^2}{16 \cdot S_1} + \frac{d^3 - a^2d - de^2}{8 \cdot S_5} \right. \\
 & \left. + \frac{d}{8 \cdot S_5} \right) \Delta d \\
 & + \left(\frac{e^3 - c^2e - b^2e}{16 \cdot S^3} + \frac{e^3 - a^2e - d^2e}{16 \cdot S_4} \right. \\
 & \left. - \frac{ef^2}{4S_5} \right) \Delta e \\
 & + \left(\frac{f^3 - a^2f - b^2f}{16 \cdot S_1} + \frac{f^3 - c^2f - d^2f}{16 \cdot S_2} \right. \\
 & \left. + \frac{e^2f}{4 \cdot S_5} \right) \Delta f + W = 0
 \end{aligned}$$

..... (37)

된 된다.^{5), 6), 7)}

윗 式을 未定係數法에 의한 最小제곱법의 原理를 利用하여 調整量 $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \dots, \Delta f$ 를 計算한다.

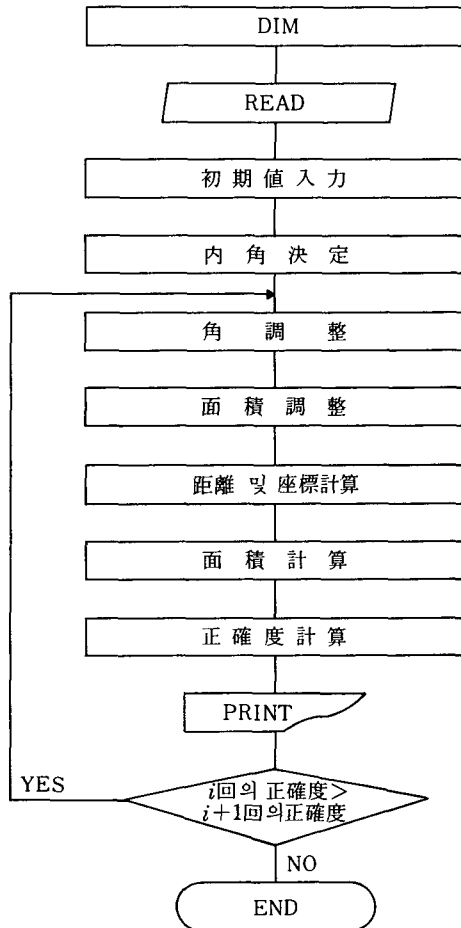
3. 数值計算

只今까지 FEM 및 Condition Equation에 依하여 4 邊網에 關한 數值解析을 記述하였으며 이제 實際 4 邊網調整의 數值計算에 있어서 Computer program의 flow-chart를 圖示하면 다음 Fig. 7 (a), (b)와 같다.⁸⁾

Fig. 7 (a) FEM flow-Chart



Fig. 7 (b). Condition Equation flow-chart



Ⅲ. 觀測 및 考案

本 研究에서 觀測model은 全南大學校 綜合運動場의 平坦地를 挾하였으며 ①觀測은 1985年 9月24日에 EDM(RED-2)을 가지고 測定하였으며 ②氣壓은 光州氣象台에서 過去 氣壓觀測에 使用했던 Sato aneroid barometer를 使用하였고(759mm Hg)③溫度는 精密棒溫度計로 測定하였다. (20.7°C)

1. 觀測結果 및 調整

1). 邊長測定 및 調整量

Fig. 8의 觀測model에서 EDM에 依한 測定結果는 다음 Table 3과 같다.

本 研究에서 開發된 Computer Program에 依하여 이들의 測定값에 對한 ①FEM ②Angle Condition Equation ③Area Condition Equation 方法등에 依하여 計算된 調整量은 다음 Table 4, 5, 6, 과 같다.

2). Misclosure (FEM)

Redundant $P_3 - P_4$ 에 對한 測定값과 計算값과의 差로 나타난 Misclosure는 다음 Table 7과 같고 그 結果는 9mm로 算定되었다.

3). 調整座標 (Adjusted Coordinate)

여기서 ①FEM ②Angle Condition Equation 그리고 ③Area Condition Equation 方法등으로 調整된 各測點의 調整量 및 座標값은 Table 8, 9, 10과 같다.

TABLE 3. MEASUREMENT RESULTS

SIDE LENGTH	OBLIQUE DISTANCE (M)	ZENITH DISTANCE (' ' ')	HORIZONTAL DISTANCE (M)	REMARKS
P1-P2	109.419	89-54-24	109.419	T. ; 20.7°C
P1-P3	173.874	90-03-48	173.874	A.P. ; 759 MM HG
P1-P4	153.519	90-00-00	153.519	
P2-P3	105.116	89-47-20	105.115	
P2-P4	163.869	89-55-46	163.869	
P3-P4	113.497	89-53-57	113.497	

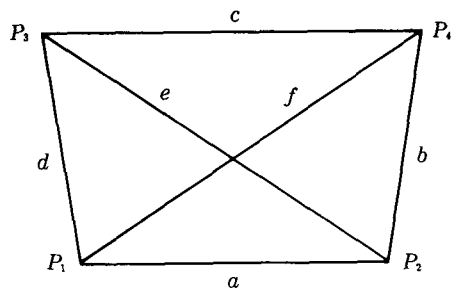


Fig. 8. Experimental model

4). 各調整法の比較

只今까지 各種方法에 依하여 調整된 辺長에 對한 補正量의 比較曲線은 다음 Fig. 9와 같고 特히 FEM의 各辺長에 關한 收斂現象을 圖示하면 Fig. 10과 같이 나타났으며, 또한 各調整法에 對한 精密度의 比較는 Fig. 11과 같이 大概 精密度는 1/20萬로 좋은 結果를 보였다.

TABLE 4. MEASURES AND ADJUSTED DISTANCES (FEM)

COURSE NUMBER (1)	INPUT	FURTHER COMPUTATIONS			
	MEASURED DISTANCE E=L (2)	WEIGHT A=P (3)	OUTPUT FORCE F (4)	CORRECTION V=F/P (5)	CORRECTED LENGTH L+V (6)
A	109.419	1	0.00708	0.007	109.426
B	105.115	1	0.00405	0.004	105.119
C	113.497	1	-0.00365	-0.004	113.493
D	153.519	1	0.00323	0.003	153.522
E	163.869	1	-0.00062	-0.001	163.868
F	173.874	1	-0.00356	-0.004	173.870

TABLE 5. MEASURED AND ADJUSTED DISTANCES (ANGLE CONDITION EQUATION)

COURSE NUMBER (1)	INPUT	FURTHER COMPUTATIONS	
	MEASURED DISTANCE E=L (2)	CORRECTION (3)	CORRECTED LENGTH L+V (4)
A	109.419	0.005	109.424
B	105.115	0.006	105.121
C	113.497	0.004	113.501
D	153.519	0.004	153.523
E	163.869	-0.006	163.863
F	173.874	-0.007	173.867

TABLE 6. MEASURED AND ADJUSTED DISTANCES
(AREA CONDITION EQUATION)

INPUT		FURTHER COMPUTATIONS	
COURSE NUMBER (1)	MEASURED DISTANCE E=L (2)	CORRECTION (3)	CORRECTED LENGTH L+V (4)
A	109.419	-0.006	109.413
B	105.115	-0.003	105.112
C	113.497	-0.004	113.493
D	153.519	-0.004	153.515
E	163.869	-0.007	163.862
F	173.874	0.006	173.880

TABLE 7. MISCLOSURES (FEM)

REDUNDNT	P3-P4	REMARK
MEASURED	113.497	
CALCULATED	113.506	
MISCLOSURE	-0.009	

TABLE 8. INITIAL OR GIVEN COORDINATES, NODAL DISPLACEMENT
AND ADJUSTED COORDINATES (FEM)

POINT (1)	INPUT		OUTPUT		COMPUTATION	
	GIVEN AND INITIAL COORDINATE		NODAL DISPLACEMENT		ADJUSTED COORDINATE	
	X(E) (2)	Y(N) (3)	U(4E) (4)	V(4N) (5)	X (6)	N (7)
P1	1000.000	1000.000	0	0	1000.000	1000.000
P2	1109.419	1000.000	0.007	0	1109.426	1000.000
P3	1142.368	1099.817	-0.012	0.011	1142.356	1099.828
P4	1039.741	1148.286	-0.010	0.006	1039.731	1148.292

TABLE 9. INITIAL OR GIVEN COORDINATES, NODAL DISPLACEMENT AND ADJUSTED COORDINATES (ANGLE CONDITION EQUATION)

POINT (1)	INPUT		OUTPUT		COMPUTATION	
	GIVEN AND INITIAL COORDINATE		NODAL DISPLACEMENT		ADJUSTED COORDINATE	
	X (E) (2)	Y (N) (3)	U (ΔE) (4)	V (ΔN) (5)	X (6)	N (7)
P1	1000.000	1000.000	0	0	1000.000	1000.000
P2	1109.419	1000.000	-0.006	0	1109.413	1000.000
P3	1142.368	1099.817	0.014	-0.009	1142.382	1099.808
P4	1039.741	1148.286	-0.025	0.011	1039.716	1148.297

TABLE 10. INITIAL OR GIVEN COORDINATES, NODAL DISPLACEMENT AND ADJUSTED COORDINATES (AREA CONDITION EQUATION)

POINT (1)	INPUT		OUTPUT		COMPUTATION	
	GIVEN AND INITIAL COORDINATE		NODAL DISPLACEMENT		ADJUSTED COORDINATE	
	X (E) (2)	Y (N) (3)	U (ΔE) (4)	V (ΔN) (5)	X (6)	N (7)
P1	1000.000	1000.000	0	0	1000.000	1000.000
P2	1109.419	1000.000	-0.006	0	1109.413	1000.000
P3	1142.368	1099.817	0.014	-0.009	1142.382	1099.808
P4	1039.741	1148.286	0.019	-0.009	1039.760	1148.277

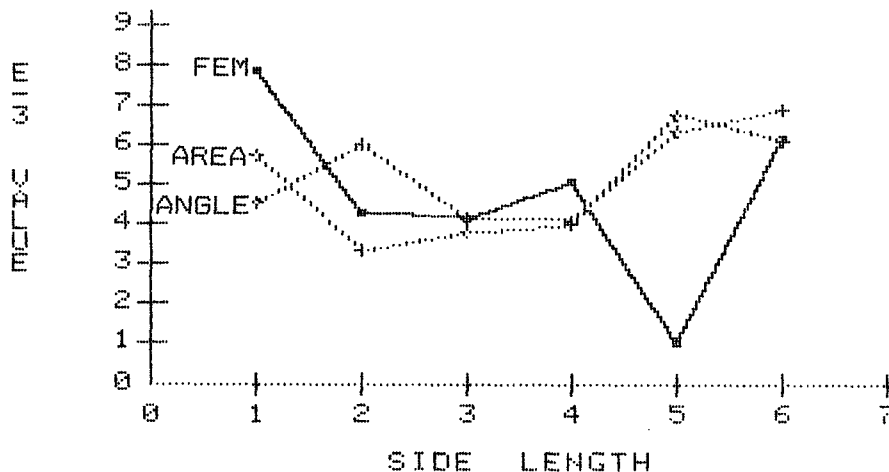


FIG. 9. COMPARISON OF CORRECTION OF LENGTHS

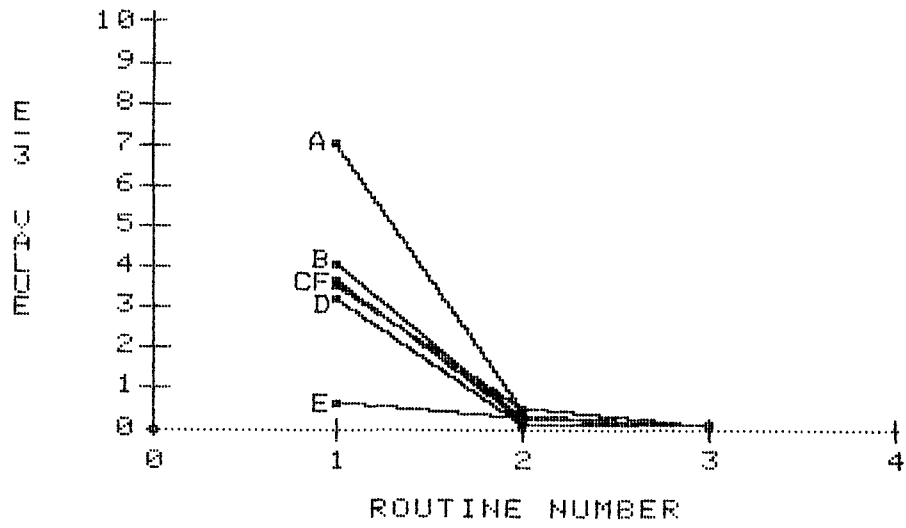


FIG. 10. CONVERGENCE OF A. B. C. D. E .F SIDE LINE (FEM)

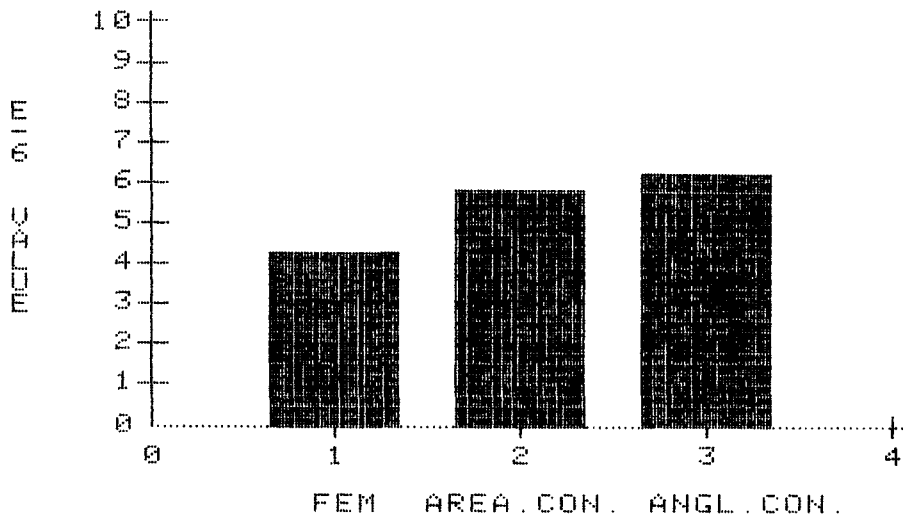


FIG. 11. PRECISION OF EACH METHOD

2. 考察

本 研究에서 各種方法으로 解析하여 計算된 調整量, 收斂, 精度 등에 關하여 相互比較分析한 結果를 간추려 보면 다음 몇가지 事項으로 말할 수 있다.

1). Table 4, 5, 6, 및 Fig. 9에서 各邊長의 調整量을 보면 角條件 및 面積條件方程式의 調整은 거의 비슷하고 두方法은 다같이 約 5 mm 크기로 平行線을 維持하고 있는 反面 FEM에 依한 調整量은 約 3.5mm, 크기로 平行線을 維持하다가 邊長 E (No. 5)에서 基한 下位(凹) 屈曲을 이루고 있다.

특히 迅長 E (No. 5)에서 角 및 面積條件 方程式의 調整은 約 7mm로 크게 나타난 反面 FEM에 依한 調整量은 約 1mm로 最小로 나타났고 그 屈曲差는 約 6mm 程度의 差異를 보이고 있다.

2). Fig. 10에서 FEM의 收斂度를 보면 誤差의 크기가 A, B, C, F, D, E 線의 順으로 나타나서 大概 3회에서 收斂이 終結되고 특히 2회에서는 1회 誤差의 1/10以内 크기로 收斂되어 收斂速度가 比較的 빠르게 나타났다.

3). Table 7에서 假定된 Redundant에서 misclosure量이 9mm로 나타났는데 이는 FEM의 觀測時 Setting誤差 또는 其他 여러 條件에 따른 誤差로 생각된다.

4). Fig. 11에서 各種方法으로 求한 精密度를 보면 모두가 1/20万 程度로서 좋은 結果를 보였는데 그 中에서 FEM이 正確度가 가장 좋았고, 그리고 面積條件 및 角條件方程式은 거의 비슷하였다.

IV. 結 論

本 研究의 實驗結果를 比較分析한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

1. FEM에 依한 3邊測量調整은 그 精密度가 매우 좋고 收斂이 빠르며, 入力 Data가 簡單하므로 實際 活用하는데 大瑞히 便利하다.

2. 各種調整方法으로 求한 精密度는 모두가 約 1/20만程度로 優秀하였으며, 그 正確度는 大概 비슷하나 그 優位는 FEM, 面積條件, 角條件 順으로 나타났다.

參考文獻

1. 柳福模, 測量學原論(I), 1984, pp. 98~101, pp. 323~331.
2. Martin H. C, Introduction to Matrix Method of Structural Analysis. 1966, pp. 14~57.
3. Naguid F. Danial, M. ASCE and Theodor Krauthammer, Trilateration Adjustment by Finite Elements. ASCE November, 1980, pp. 73~93.
4. Francis L. Ingram, The Ingram Method of Angular Value weighting in Trilateration. ASCE December, 1972, pp. 509~515.
5. 李啓鶴, 張智元, Geodimeter에 依한 3邊測量結果에 對한 考察, 全南大大學院 碩士論文, 1981, pp. 2~29.
6. 春日屋昌, 測量學(I), 1984, pp. 264~266.
7. 朴雲龍, 李龍熙, 3邊測量에 依한 4邊綱의 調整에 關한 研究, 東亞學大院 碩士論文, 1983, pp. 2~33.
- 8). 石川甲子男, 測量技術者のためのパソコン教室, 1984 pp. 144~187.
9. WILD DISTOMAT DI 20, Instruction for use, pp. 10~44.