

우리나라 天文지오이드에 관한 研究

A Study on Astro-Geodetic Geoid in Korea

白 殷 基* 陸 璫 相**
Baick Eun-Kee Mock Chan-Sang
李 鍾 焱***
Lee Chong-Hyuck

要 旨

지오이드와 基準橢圓體사이의 距離, 即, 지오이드高의 決定은 測地學에서 매우 중요한 問題로 취급되어왔다. 本 論文에서는 曲面多項式(Spherical Surface - Polynomial)에 의한 補間으로 우리나라의 天文지오이드高(Astro - Geodetic Geoid)를 決定하고자 하였으며, 그 結果로부터 우리나라의 測地網이 東京原點(Tokyo Datum)의 影響을 받고 있음이 확인되었다.

ABSTRACT

In the three dimensional Cartesian Coordinate System such as the satellite geodesy the relationship of the geoid and the reference ellipsoid must be known. Therefore, the determination of geoidal heights is regarded as one of the most important problem in geodesy.

This paper deals with determination of astro-geodetic geoid by the spherical surface polynomials interpolation method. The data that astronomical deflection of the vertical was published by National Geography Institute is applied.

The map of geoidal heights is drawn out. This shows that Tokyo Datum have influenced on Korea.

1. 序 論

地球表面上 諸點 사이의 相互位置關係를 결정하기 위하여 지구타원체를 기준으로 하는 水平位置와 지오이드面을 基準으로 하는 높이가 필

요하다. 즉 높이의 基準으로 지오이드를 利用하고, 水平位置의 基準으로 地球橢圓體를 使用하므로, 理論적으로 統一되지 않으나, 慣用的인 測地座標系(ϕ, λ, h)로 오늘날까지 널리 利用되어 왔다.^{1),2),3),4)}

그러나 衛星測地에서와 같이 地表面上의 位置

* 서울市立大學 教授
** 서울市立大學 大學院 博士課程
*** 서울市立大學 都市行政大學院

를 3次元直交座標系(X, Y, Z)로 나타내는 경우 지오이드와 地球橢圓體와의 差인 지오이드高(geoidal heights)가 必要하다.^{3), 4), 5)} 그러므로 지오이드高의 決定은 測地學의 重要한 問題로 取扱되고 있다.

지오이드高를 決定하는 方法은 크게 다음 세 方法으로 구분될 수 있다.^{3), 4), 5)}

(1) 天文測量에 의하여 얻어진 鉛直線偏差를 利用하여 決定하는 方法

(2) 重力測定에 의하여 얻어진 重力異常을 利用하여 橢圓體로 부터 지오이드의 幾何學的 偏倚를 計算하는 方法

(3) (1) 과 (2)를 結合하여 決定하는 方法

本 研究에서는 天文測量方法을 使用하였으며, 國立地理院에서 1973~1980年까지 實施한 天文測量成果를 利用하여 曲面多項式(surface polynomial)에 의한 補間法^{5), 6)}으로 우리나라의 지오이드圖를 作成하였다. 計算에 使用된 地球橢圓體의 要素는 벡셀橢圓體의 값을 使用하였으며, 地球의 形狀을 球面으로 假定하였다.

2. 鉛直線偏差의 方程式

獨立觀測에 의하여 決定된 天文經緯度 및 方位角은 測地經緯度 및 方位角과 서로 다르다. 이는 地域原點에서 三角測量으로 擴張된 三角點의 測地값은 地域原子로 決定된 橢圓體面의 값으로

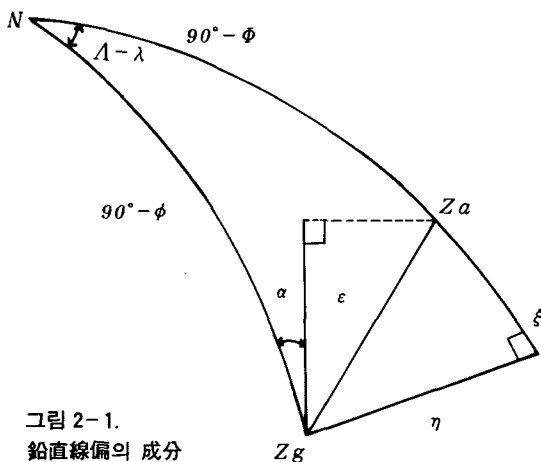


그림 2-1.
鉛直線偏의 成分

變換된 것이고 天文값은 지오이드와 關聯하여 決定된 것이기 때문이다.^{1), 7), 8)}

鉛直線偏差는 지오이드에 대한 鉛直線과 橢圓體面의 法線사이의 角으로, 南北 方向의 成分과 東西方向의 成分으로 나누어진다.

그림2-1에서 지오이드의 鉛直線과 橢圓體의 法線이 天球와 만나는 點을 各各 Za, Zg라 하고 N을 天의 極이라 하면 球面三角形의 正弦定理에서,

$$\frac{\sin(90^\circ - \phi)}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin \eta}{\sin(\Lambda - \lambda)}$$

여기서, $\Lambda - \lambda$ 와 η 는 微小量으로,

$$\sin \eta \approx \eta, \sin(\Lambda - \lambda) \approx \Lambda - \lambda$$

$$\therefore \eta = (\Lambda - \lambda) \cos \phi \quad (1-a)$$

$$\xi = \phi - \phi \quad (1-b)$$

여기서, Λ, ϕ : 天文經度 및 緯度

λ, ϕ : 測地經度 및 緯度

η : 東西方向의 鉛直線偏差

ξ : 南北方向의 鉛直線偏差

이다. 方位角(α) 方向의 鉛直線偏差(E)는

$$E = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha \quad (2)$$

이다. 또한 原點에서 測地方位角과 天文方位角은 一致하나, 原點에서 멀어지면 두 값은 一致하지 않으며, 다음과 같은 關係가 성립한다.

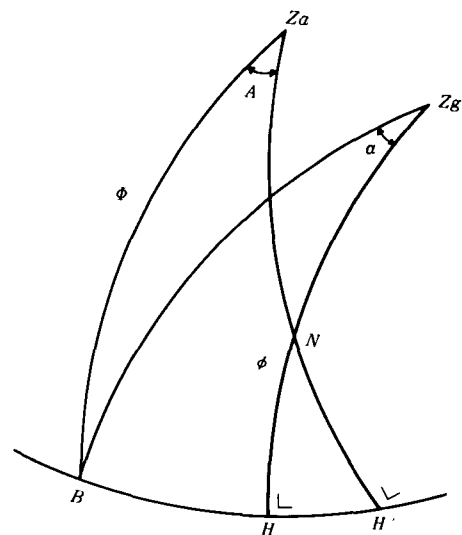


그림 2-2. 라프라스 條件式

그림 2-2에서 $ZaNH'$ 는 天文子午線, $ZgNH$ 는 測地子午線, BH' 는 天文方位角 (A), BH 는 測地方位角 (α)이다. 따라서 HH' 는 $A-\alpha$ 이다. 球面三角形의 正弦定理를 使用하면

$$\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin(\Lambda-\lambda)} = \frac{\sin\phi}{\sin 90}$$

여기서, $A-\alpha, \Lambda-\lambda$ 는 微小角이므로

$$\begin{aligned}\sin(A-\alpha) &\approx A-\alpha \\ \sin(\Lambda-\lambda) &\approx \Lambda-\lambda\end{aligned}$$

의 近似式을 쓰면

$$A-\alpha = (\Lambda-\lambda) \sin\phi \quad (3)$$

이 된다. 여기에 (2-1) 式을 代入하면

$$A-\alpha = \eta \tan\alpha \quad (4)$$

가 된다. 式 (1-a) (1-b) 및 (4)가 라플라스 方程式이며 이 條件式을 만족시킬수 있도록 天文觀測이 이루어진 點이 라플라스 點이다.

3. 觀測方程式

補間法에는 산술 보간법, 曲面多項式에 의한 補間法, 重力補間法이 있으나^{3,4,5} 曲面多項式에 의한 補間法은 曲面最適化(surface fitting) 方法으로 부터 지오이드를 決定^{5,6} 하는 것으로 지오이드高로 鉛直線偏差를 表現하면 다음과 같다.

$$\xi = \frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \phi}, \quad \eta = \frac{1}{R \cos\phi} \frac{\partial N}{\partial \lambda} \quad (5)$$

經度 (λ), 緯度 (ϕ)인 點에서 지오이드高 $N(\lambda, \phi)$ 多項式으로 나타내면,

$$N(\lambda, \phi) = \sum_{j=1}^{i+1} \sum_{i=1}^n C_{ij} x^{i-j+1} y^{j-1} \quad (6)$$

과 같이 되고 Taylor級數로 展開하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}N(\lambda, \phi) &= C_{11}x + C_{12}y + C_{21}x^2 + \\ &C_{22}xy + C_{23}y^2 + \dots \\ &+ C_{n1}x^n + C_{n2}x^{n-1}y + C_{n3}x^{n-2}y^2 \\ &+ \dots + C_{n\ n+1}y^n\end{aligned} \quad (7)$$

여기서, $x = R(\phi - \phi_0)$

$$y = R(\lambda - \lambda_0) \cos\phi$$

ϕ_0, λ_0 : 中心部近의 假定原點

R : 地球半徑

鉛直線偏差와 지오이드高의 關係는 (5) 式과 같으므로, (6) 式과 같이 表現하면

$$\left. \begin{aligned}\xi &= -1/R \sum_{j=1}^{i+1} \sum_{i=1}^n (i-j+1) \cdot \\ &C_{ij} x^{i-j} y^{j-1} \\ \eta &= -1/R \sum_{j=1}^{i+1} \sum_{i=1}^n (j-1) \cdot \\ &C_{ij} x^{i-j+1} y^{j-2}\end{aligned} \right\} \quad (8)$$

이 된다.

여기서, 多項式의 係數 C_{ij} 를 計算하려면 (1) 式에서 求한 鉛直線偏差 (ξ^{ob}, η^{ob})를 (7) 式에서 求한 鉛直線偏差 (ξ, η)에 最小二乘調整법으로 더한다.

天文測量을 實施한 P 점의 鉛直線偏差 (ξ^{ob}, η^{ob})의 殘差 (V_ξ, V_η)라 하고 이를 行列式으로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} V_\xi \\ V_\eta \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \xi^{ob} \\ \eta^{ob} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \xi^{ob} \\ \eta^{ob} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{21} & \dots & \beta_{n1} & \beta_{n2} \\ \dots & \alpha_n & \alpha_{n+1} \\ \dots & \beta_n & \beta_{n+1} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{21} & \dots & C_{n1} & C_{n2} \\ \dots & C_n & C_{n+1} \end{vmatrix}^T \quad (9)$$

여기서,

$$\left. \begin{aligned}\alpha_{ij} &= 1/R(i-j+1) x^{i-1} y^{j-1} \\ \beta_{ij} &= 1/R(j-1) x^{i-j+1} y^{j-2}\end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(9) 式을 간단히 表現하면

$$V_p = L_p + A_p \cdot C \quad (11)$$

모든 天文測量이 實施된 點에 對하여

$$\begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ V_{m-1} \\ V_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ L_{m-1} \\ L_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ A_{m-1} \\ A_m \end{vmatrix} \cdot C \quad (12)$$

여기서, m 은 모든 天文觀測點의 數이다.

(12) 式을 (13) 式과 같이 간단하게 쓰면

$${}_m V_1 = {}_m L_1 + {}_m A_m \cdot {}_m C_1 \quad (13)$$

이 되는데 이 式이 觀測方程式이다.

4. 最小제곱법에 의한 調整

最小제곱법에 의한 調整法은 많은 數의 觀測 데이터를 가지고, 觀測值와 最確值의 差인 殘差 제곱의 和이 最小가 되도록 하여 未知數의 最確值을 求하는 것으로서 이를 式으로 表現하면 다음과 같다.

$$\sum_m \{ P_\xi (\xi^{ob} - \xi)^2 + P_\eta (\eta^{ob} - \eta)^2 \} \Rightarrow \text{最小} \quad (14)$$

여기서, P_ξ, P_η ; 鉛直線偏差의 무게 (13) 式에 (14) 式의 觀測무게 P 를 考慮하면

$$VP = LP + ACP \quad (15)$$

$$\therefore PAC = P(L + V)$$

이 되어 (15) 式을 正規方程式으로 고쳐쓰면

$$A^T PAC = A^T PL \quad (16)$$

이 된다. 여기서 양변에 $(A^T PA)^{-1}$ 을 곱하여 C 를 계산하면

$$(A^T PA)^{-1} A^T PAC = (A^T PL)^{-1} A^T PL$$

$$I C = (A^T PA)^{-1} A^T PL$$

$$\therefore C = (A^T PA)^{-1} A^T PL \quad (17)$$

이 되며 (17) 式에서 觀測무게를 $P=1$ 로 하면

$$C = (A^T A)^{-1} A^T L \quad (18)$$

과 같이 된다. 이 觀測方程式의 最小 제곱解는

$$\hat{C} = -(A^T \Sigma_L^{-1} A)^{-1} A^T \Sigma_L^{-1} L \quad (19)$$

$$\Sigma \hat{C} = \sigma_0^2 (A^T \Sigma_L^{-1} A)^{-1}$$

$$\therefore \sigma_0^2 = V^t \Sigma_L^{-1} V / DF$$

여기서, Σ_L : 鉛直線偏差 觀測의 分散一共分散行列

$\Sigma \hat{C}$: C 의 分散一共分散行列

σ_0^2 : 單位重量의 標準誤差

DF : 自由度

구해진 多項式의 係數를 (6) 式에 代入하여 지오이드高가 計算되며, 計算된 지오이드高의 正確度는 다음 行列式으로 쓸 수 있다.

$$N(\phi, \lambda) = \sum_{i=1}^{i+1} \sum_{j=1}^n C_{ij} x^{i-j+1} y^{j-1}$$

$$= [x, y, x^2, xy, y^2, \dots, xy^{n-1}, y^n] \cdot [C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, C_{23}, \dots, C_n, C_{n+1}]^T$$

$$= W \hat{C} \quad (20)$$

지오이드高의 分散一共分散行列 Σ_N 는 (20) 式에 誤差傳播의 式을 적용하면

$$\Sigma_N = W \Sigma \hat{C} W^T \quad (21)$$

이 된다. 여기에 (19) 式의 ΣC 를 代入하면

$$\Sigma_N = \sigma_0^2 W (A^T \Sigma_L^{-1} A)^{-1} W^T \quad (22)$$

가 된다.

5. 適 用

5.1 데이터 처리

관측데이터는 1971년부터 建設部 國立地理院에서 WILD T-4를 使用하여 每年 3點씩 實施한 天文測量의 成果를 使用하였는데, 이 관측데이터는 精密天文測量技術教材³⁾의 作業規定에 의거 測量을 實施한 것으로, 天文經緯度 決定時 屈折, 觀測點의 標高, 極變化 (polar motion), 日周光行差 (diurnal aberration), 章動 (nutations), 時報, 傳播도달시간에 대한 補正 등이 이루어진 成果이다.^{9), 10), 11), 12)}

本 研究에서는 假定原點을 中心으로한 球面式을 使用하고, 子午線과 卯酉線의 鉛直線偏差는 서로 獨立되어 있다고 가정 하였으며,

(1) 모든 天文測量 데이터를 使用하고, 曲面多項式의 次數를 變化시켜 式(4-6)으로 計算된 鉛直線偏差의 標準誤差는 表5-1과 같으며 本 研究에서는 2次式을 선택하였다.

表5-1 次數에 따른 鉛直線偏差의 標準誤差

曲面多項式의 次數	7 次	5 次	3 次	2 次	1 次
標準誤差 (라디안)	0.0538607	0.0005415	0.0001042	0.0000286	0.0005100

(2) 2次式을 使用하여 72년도 以前의 관측데이터를 除外시키고 求한 標準誤差는 0.0000158로, 포함시킨 경우는 表5-1과 같이 0.0000286

으로 나타나 큰 差異가 있었다. 따라서 72年度 以前의 데이터를 本 研究에서는 除外시켰다.

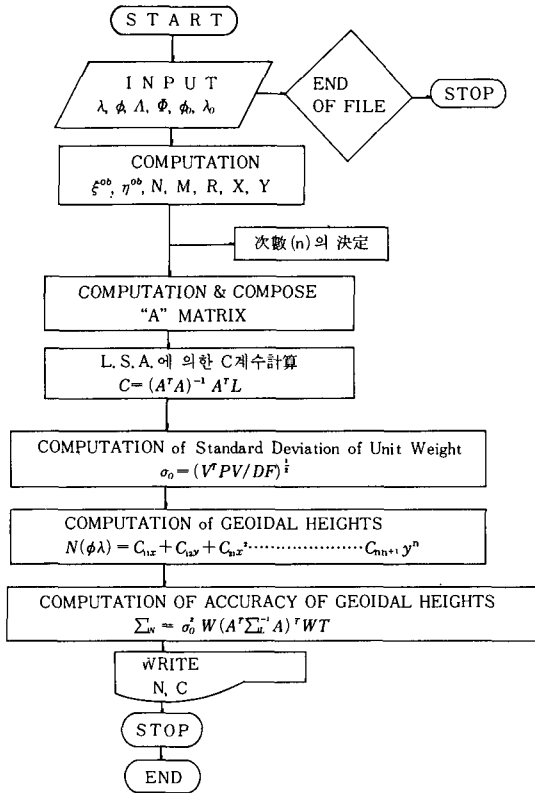


그림 5-1 데이터 처리의 흐름도

5.2 結果 및 分析

國立地理院에서 1973~80년까지 觀測한 天文 測量의 데이터를 이용하여 Surface fitting技法으로 우리나라의 經緯度 10' 마다의 格子點에서 求한 지오이드高와 正確度는 다음 그림5-2, 5-3과 같다.

그림 5-2(a)는 任意假定原點을 우리나라의 中心부근인 緯度 36°-00'-00" 經度 128°-00'-00"로 定하여 求한 지오이드高로 假定原點을 지오이드高 0m로 하였을때 釜山地域을 통과하는 지오이드 等高線의 높이가 +8m, 서울地域을 통

과하는 지오이드 等高線의 높이가 -15m로 우리나라 全體 지오이드高의 差異는 23m이며, 同一緯度上에서도, 西海岸이 東海岸보다 約 13m 낮은, 北西方向의 等高線圖를 나타낸다.

그림 5-2(b)는 지오이드高의 正確度를 나타낸 것이며, 이 지오이드高의 誤差는 假定原點을 中心으로 한 同心圓을 나타내며 0.7m의 等高線內에서, 全地域이 거의 포함된 것을 알 수 있다.

그림 5-3은 任意假定原點을 京畿道 華城郡 東學山 (緯度 37°-12'-47"458, 經度 127°-04'-05"311)의 天文觀測點으로 定한 지오이드高인데 그림5-2와 거의 同一한 等高線을 나타내고 있다. 假定原點을 0m로 하였을 때 서울地域이 -2m이며 釜山地域이 +22m로 全體 지오이드高 差異는 거의 같으나, 正確度面에서 볼 때, 남쪽지역으로 갈수록 誤差가 큰 同心圓을 나타내며 1.5m誤差內에 거의 우리나라 全地域이 포함되고 있다.

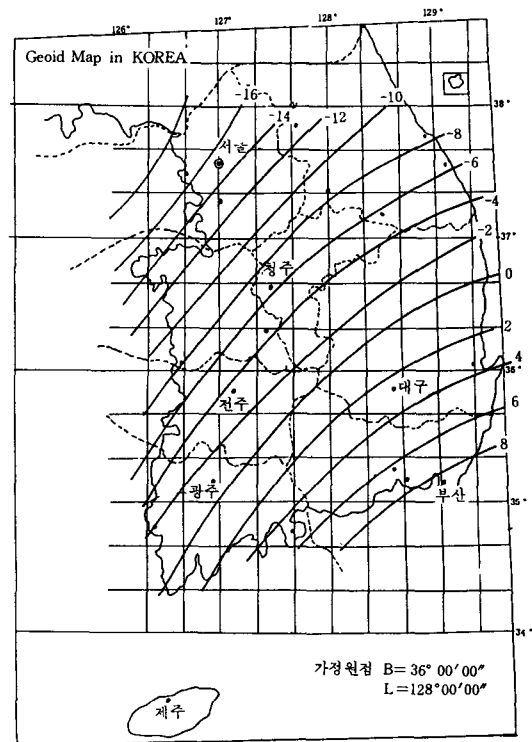


그림 5-2(a). 우리나라의 天文 Geoid 高

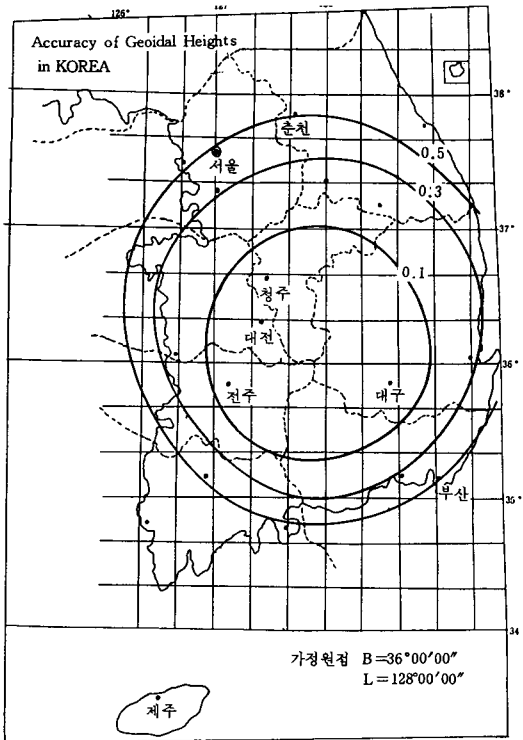


그림 5-2(b). 天文 Geoid高의 正確度

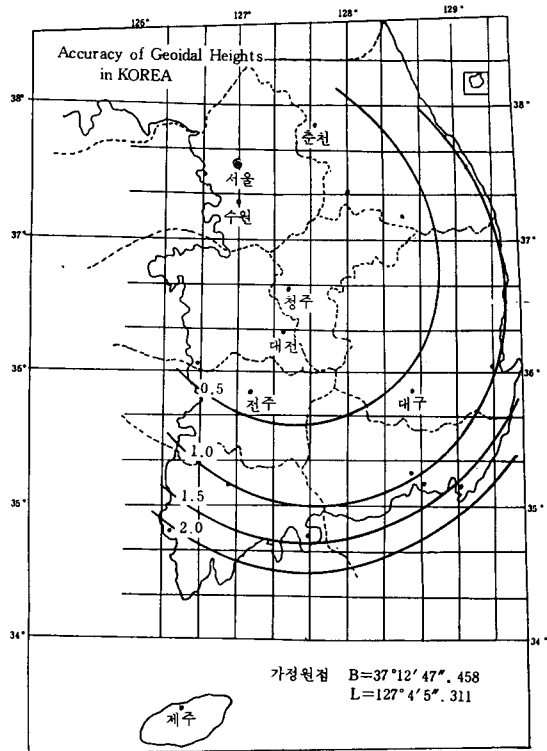


그림 5-3(b). 天文 Geoid高의 正確度

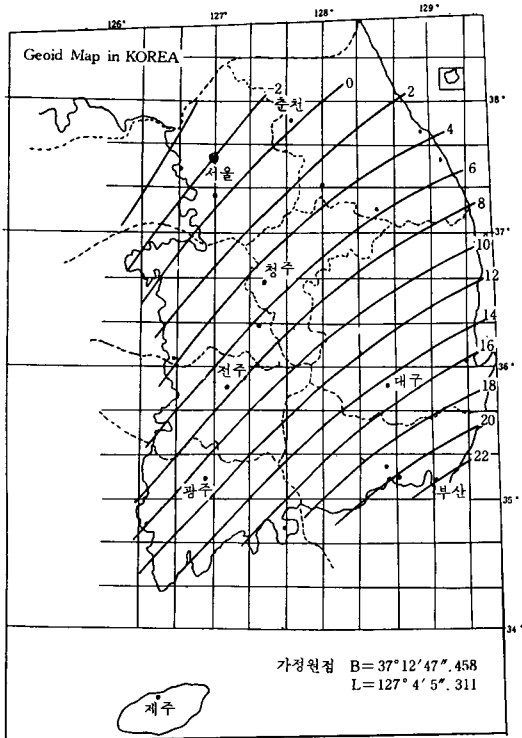


그림 5-3(a). 우리나라의 天文 Geoid高

6. 結論 및 考察

本 研究에서는 우리나라의 天文지오이드高를 Vaniček & Merry (1973)의 曲面多項式에 의해 決定하였으며 鉛直線偏差의 子午線方向과 卯酉線方向의 값은 서로 獨立된 것으로 假定하였다.

研究結果를 要約하면 다음과 같다.

- (1) 우리나라의 天文지오이드圖가 作成되었다. (그림 5-2, 그림 5-3 참조)
- (2) 本 研究 結果, 日本의 天文지오이드와 비교하여 불때 東京原點의 영향을 받고 있음을 알 수 있다. (그림 5-2, 문헌 6. 참조)
- (3) 보다 實用的인 天文지오이드圖를 얻기 위해서는 보다 많은 天文測量데이터가 必要하며 天文지오이드는 相對的인 값이므로 重力에 의한 絶對지오이드에 대한 研究가 더욱 要望된다.

謝 辭

本 研究가 可能하도록 文獻과 데이터를 提供
해 주신 國立地理院 關係者 여러분에게 謝意를
표하는 바입니다.

參考文獻

1. 坪川家恒·大森又吉, 測地學序設, 山海堂, 1968 pp. 3~9 pp. 12~21 pp. 387~393
2. 土橋忠測, 基準點測量, 山海堂, 1981, pp. 13~21.
3. Torge, W. Geodesy; an introduction, Walter De Gruyter, 1980.
4. Bomford, G. Geodesy, Clarandon Press Oxford, 1980, pp. 254~285, pp. 342~346.
5. Vaniček, P., Geodesy : the concepts, N. H. Publs. Company, 1982.
6. 西修二郎, 日本の天文ジオイドにうして, 國土地理院時報, No. 55, 1981, pp. 29~33.
7. 李喜寶, 譯, 測地學概論, 大學教材出版社, 1979, pp. 93~109, pp. 106~200.
(Ewing. C. E. & M. M. Mitchell "Introduction to Geodesy" 1975.)
8. 萩原幸男, 測地學 入門, 東京大學出版會, 1982, pp. 17~18, pp. 60~110.
9. 建設部 國立地理院, 測地天文測量.
10. 建設部 國立地理院 譯, 精密天文測量.
11. 建設部 國立地理院, "測地技術發展究報告書," pp. 271~304.
12. 金基成, 測地地球物理學總論, 技工社, 1980, pp. 11~14, pp. 80~86.