工業經營論叢 第8卷 第12輯 1985年 12月

Minimax에 의한 設備立地의 意思決定에 관한 研究

A Study on the Decision-making of Minimax Facility Location

田 萬 述*
李 成 圭**

Abstract

The purpose of this study is to consider the criteria for decision-making of facility location in view of Minimax.

As an illustration of the location of storerooms in a manufacturing plant that minimizes the maximun distance workers must travel to reach a storeroom, the number and variety of location problems that can be formulated appropriately as minimax problems are sizable.

A minimax solution can be interpreted as a grease the squeaky wheel solution.

In solving a minimax location problem, costs other than the maximum cost are not considered.

1. 序 論

立地意思決定은 企業이 生産시스템과 마아케팅 시스템을 空間的으로 最適化하여 費用의 最少化 또는 利潤의 最大化를 가져올 수 있도록 設備를 立地시키는 데 있다.

이러한 立地意思決定은 A. Weber의 古典的인 立地論으로부터 시작하여 오늘날의 電算化 指向的 立地技法에 이르기까지 매우 다양한 側面을 보여주고 있다.

그러나 여러가지 類型의 立地意思決定의 基準을 보면 다음과 같이 몇 가지로 압축할 수 있다. 즉, (1) 利動距離를 最少化시키는 立地, (2) 總輸送費를 最少化시키는 立地, (3) 總立地費用을 最少化시키는 立地, (4) 最大移動距離를 最少化시키는 立地, (5) 最少費用으로 포괄할 수 있는 市場의 범위를 最大化시키는 立地 등을 들 수 있다.

本 研究에서는 最大移動距離(maximum traveling distance)를 最少化시키는 Minimax 立地에 대하여 移動距離뿐만 아니라 이와 관련된 移動時間과 移動費用面에 관하여서도 고찰하여 본다.[1)]

2. 單一設備의 最適立地

2.1 移動距離의 最少化

既存設備가 $(a_1, b_1)\cdots\cdots(a_m, b_m)$ 地點에 그리고 新設備가 (x, y) 地點에 각각 立地한다고 하면 新設備와 既存設備間의 最大距離는 $f(x, y)$와 같다.

$$f(x, y)=\underset{1\le i\le m}{\mathrm{Max}}\,(|x-a_i|+|y-b_i|) \quad \cdots (1)$$

여기서 Minimax 立地問題는 $f(x, y)$를 가능한 한 最少化할 수 있도록 新設備의 立地點 (x^*, y^*)를 구하는 것이다. 즉, 새로운 設備와 어떠한 既存設備간에 最大距離를 最少化하는 것이다.

$f(x, y)$를 最少化하기 위하여 (1)式에 g_i 項을 도입하여 (2)式과 같이 확장한다.

$$f(x, y)=\underset{1\le i\le m}{\mathrm{Max}}\,(|x-a_i|+|y-b_i|+g_i) \quad \cdots\cdots (2)$$

여기서 모든 g_i는 零이되는 가상값으로 하여 (a_i, b_i)와의 관계를 c_i 값으로 설정한다.

$$C_1=\underset{1\le i\le m}{\mathrm{Min}}\,(a_i+b_i-g_i)$$
$$C_2=\underset{1\le i\le m}{\mathrm{Max}}\,(a_i+b_i+g_i)$$
$$C_3=\underset{1\le i\le m}{\mathrm{Min}}\,(-a_i+b_i-g_i)$$
$$C_4=\underset{1\le i\le m}{\mathrm{Max}}\,(-a_i+b_i+g_i)$$
$$C_5=\mathrm{Max}\,(C_2-C_1,\ C_4-C_3)$$

(3)式과 (4)式의 2 地點

$$\frac{1}{2}(C_1-C_3,\ C_1+C_3+C_5) \quad \cdots\cdots (3)$$

* 漢陽大學校 大學院 産業工學科
** 漢陽大學校 工科大學 都市工學科 教授

$$\frac{1}{2}(C_2 - C_4,\ C_2 + C_4 - C_5) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

을 연결하는 線分上의 어떤 地點 (x^*, y^*)이 Minimax 地點으로 결국 (1)式을 최소화하는 地點이며 이때 最少化값은 $\frac{C_5}{2}$가 된다.

$\frac{C_5}{2}$는 (2)式을 最少化하면 얻을 수 있다.

Minimize z
Subject to
$|x - a_i| + |y - b_i| + g_i \leqq z$
$i = 1 \cdots\cdots m$

이 2개문제가 동시에 해결되기 위해서는 다음과 같은 사항이 만족되어야 한다.

즉, Z는 적어도 $|x - a_i| + |y - b_i| + g_i$의 各項값만큼 커야 하기 때문에 결국 이들項의 最大값보다 커야 할 것이다. 또한 Z는 적어질 수 있으나 $|x - a_i| + |y - b_i| + g_i$의 最大값보다는 적어질 수 없으며 적어도 이와 동등해야 할 것이다. 따라서 Z가 最少化되면 $|x - a_i| + |y - b_i| + g_i$의 最大값은 가능한 한 적어지게 될 것이다.

이 問題를 LP問題로 바꾸어보면 각 制約條件은 다음과 같이 변형될 수 있다.

$$|x - a_i| \leqq z - g_i - |y - b_i|$$

또는

$$-z + g_i + |y - b_i| \leqq x - a_i \leqq z - g_i - |y - b_i|$$

이들 2개 不等式은 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$|y - b_i| \leqq x - a_i + z - g_i$$
$$|y - b_i| \leqq -x + a_i + z - g_i$$

또는

$$-x + a_i - z + g_i \leqq y - b_i \leqq x - a_i + z - g_i$$
$$+x - a_i - z + g_i \leqq y - b_i \leqq -x + a_i + z - g_i$$

상기 4개 不等式을 정리하면 다음과 같은 LP問題를 얻을 수 있다.

Minimize Z
Subject to
$x + y - z \leqq a_i + b_i - g_i$
$i = 1 \cdots\cdots m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$
$x + y + z \geqq a_i + b_i + g_i$
$i = 1 \cdots\cdots m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$
$-x + y - z \leqq -a_i + b_i - g_i$
$i = 1 \cdots\cdots m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7)$
$-x + y + z \geqq -a_i + b_i + g_i$
$i = 1 \cdots\cdots m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8)$

우선 (5)式의 不等式에서 $x + y - z$는 $a_i + b_i - g_i$의 最少값보다 커서도 안되며 이는 상술한 C_1의 경우가 된다.

또한 마찬가지 방법으로 (6), (7), (8)式의 不等式에 대하여서도 성립되며 이들은 각각 C_2, C_3, C_4의 경우가 된다.

Minimize z
Subject to

$$\left.\begin{array}{l} x + y - z \leqq C_1 \\ x + y + z \geqq C_2 \\ -x + y - z \leqq C_3 \\ -x + y + z \geqq C_4 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9)$$

(9)式의 最適解를 얻기 위하여 Z의 값을 구하면

$$Z \geqq \mathrm{Max}\left[\frac{1}{2}(C_2 - C_1),\ \frac{1}{2}(C_4 - C_3)\right] = \frac{1}{2}C_5$$

가 된다. 이 $\frac{1}{2}C_5$ 값은 目的函數의 最少값에 대한 下限値로서 (3)式과 (4)式의 Minimax 地點인 (x^*, y^*) 값과 동일하게 된다.[2)]

2.2 移動時間의 最少化

新設備와 旣存設備간의 이동시간을 最少化함으로써 最適立地點을 결정하는 것이다.[3)] 旣存設備 $(a_i, b_i) \cdots\cdots (a_m, b_m)$ 地點으로부터 新設備 (x, y) 地點까지 도착하는데 소요되는 單位距離當時間을 W_i, 필요한 準備時時間을 g_i 라고 한다면 總移動時間은 $W_i(|x - a_i| + |y - b_i|) + g_i$가 된다.

따라서 새로운 設備의 (x^*, y^*)는 (a_i, b_i)로부터 最大移動時間이 最少化되는 地點에 立地하게 된다.

$$f(x, y) = \underset{1 \leq i \leq m}{\mathrm{Max}}\left[W_i(|x - a_i| + |y - b_i|) + g_i\right] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (10)$$

(10)式을 最少化하기 위해서는 等費用線 (Iso-cost line)을 도입하여 $f(x, y) = K$(一定값)에 대한 모든 地點을 구하여야 한다.

즉, $f(x, y) \leqq K$에 대한 모든 地點 (x, y)의 集合 $\mathbf{S}(K) = \{(x, y) ; f(x, y) \leqq K\}$에서 Minimax 地點을 찾아낸다. 이를 위하여서는 (11)式과 (12)式에 의하여 각 地點들의 線型變換(linear transformations) T 및 T^{-1}을 이용한다.

$$T(x, y) = (x + y,\ -x + y) \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (11)$$

$$T^{-1}(r, s) = \frac{1}{2}(r-s, r+s) \cdots\cdots\cdots (12)$$

$T(a_i, b_i)$를 $(a_i, b_i) = (a_i + b_i, -a_i + b_i)$로 표시할 수 있으며 또한 모든 $1 \leqq i < j \leqq m$ 에 대하여서도 α_{ij} 및 β_{ij} 값을 다음과 같이 설정한다.

$$\alpha_{ij} = \mathrm{Max}\left(\frac{W_i W_j |a'_i - a'_j| + W_i g_j + W_j g_j}{(W_i + W_j)}, g_i, g_j\right)$$

$$\beta_{ij} = \mathrm{Max}\left(\frac{W_i W_j |b'_i - b'_j| + W_i g_j + W_j g_i}{W_i + W_j}, g_i, g_j\right)$$

P_1, P_2를 Z_1과 같이 α의 ij 와 바꾸어 놓는다.

$$Z_1 = \underset{1 \leq i \leq j \leq m}{\mathrm{Max}} (\alpha_{ij}) = \alpha_{p1\,p2}$$

$a'p_1 \leqq a'p_2$ 일 때

$$r^* = \frac{Wp_1 a'p_2 + Wp_2 a'p_2 + gp_1 - gp_2}{Wp_1 + Wp_2}$$

$a'p_1 > a'p_2$ 일 때

$$r^* = \frac{Wp_1 \alpha p_1 + Wp_2 a'p_2 + gp_1 - gp_2}{Wp_1 + Wp_2}$$

와 같이 각각 된다.

또한 q_1, q_2를 Z_2式과 같이 β의 i, j와 바꾸어 놓는다.

$$Z_2 = \mathrm{Max}(\beta_{ij}) = \beta q_1 q_2$$

$b'q_1 \leqq b'q_2$ 일 때

$$S^* = \frac{Wq_1 b'q_1 + Wq_2 b'q_2 - gq_1 + gq_2}{Wq_1 + Wq_2}$$

$b'q_1 > b'q_2$ 일 때

$$S^* = \frac{Wq_1 b'q_1 + Wq\, b'q_2 + gq_1 - gq_2}{Wq_1 + Wq_2}$$

와 같이 각각 된다.

따라서 $Z_0 = \mathrm{Max}(Z_1, Z_2)$는 (10)式의 最少값이 되며 또한 $T^{-1}(r^*, s^*)$는 Minimax 立地點을 찾기 위하여 3가지 Case를 고려할 수 있다.

Case 1 ; $Z_0 = Z_1 = Z_2$ 일 경우

$T^{-1}(r^*, s^*)$는 유일한 Minimax 立地點이 된다.

Case 2 ; $Z_0 = Z_1 > Z_2$ 일 경우

$$S_1 = \underset{1 \leq i \leq m}{\mathrm{Max}} \frac{b_i' - (z_0 - g_i)}{W_i}$$

$$S_2 = \underset{1 \leq i \leq m}{\mathrm{Max}} \frac{b_i' + (z_0 - g_i)}{W_i}$$

S_1과 S_2를 계산하여 $T^{-1}(r^*, s_1)$과 $T^{-1}(r^*, s_2)$를 연결하는 等費用線上의 모든 地點들은 Max 立地點이 된다.

Case 3 ; $Z_0 = Z_2 > Z_1$ 인 경우

$$r_1 = \underset{1 \leq i \leq m}{\mathrm{Max}} \frac{a_i' - (z_0 - g_i)}{W_i}$$

$$r_2 = \underset{1 \leq i \leq m}{\mathrm{Min}} \frac{a_i' + (z_0 - g_i)}{W_i}$$

r_1과 r_2를 계산하여 $T^{-1}(r, s^*)$ 및 $T^{-1}(r_2, s^*)$를 연결하는 等費用線上의 모든 地點들이 Minimax 立地點이 된다.

2.3 計算例示

4개의 既存設備가 地點$(a_i\ b_i)$에 각각 (3, 3), (3, 6), (8, 3) 및 (7, 8)과 같이 立地해 있을 때 $W_1 = 2$, $W_2 = 3$, $W_3 = 4$, $W_5 = 2$, $g_1 = 1$, $g_2 = g_3 = g_4 = 0$ 이라면 $\alpha_{12} = \frac{21}{5}$, $\alpha_{13} = \frac{28}{6}$, $\alpha_{14} = \frac{38}{4}$, $\alpha_{23} = 0$, $\alpha_{24} = \frac{36}{5}$, $\alpha_{34} = \frac{48}{6}$, $\beta_{12} = \frac{21}{5}$, $\beta_{13} = \frac{28}{6}$, $\beta_{14} = \frac{6}{4}$, $\beta_{23} = \frac{72}{7}$, $\beta_{24} = \frac{12}{5}$, $\beta_{34} = \frac{32}{6}$가 된다.

따라서

$$Z_1 = \underset{1 \leq i < j \leq 4}{\mathrm{Max}} (\alpha_{ij}) = \alpha_{14} = \frac{38}{4}$$

$$Z_2 = \underset{1 \leq i < j \leq 4}{\mathrm{Max}} (\beta_{ij}) = \beta_{23} = \frac{72}{7}$$

$(p_1\ p_2) = (1, 4)$, $(q_1\ q_2) = (2, 3)$ 및 $Z_0 = Z_2 > Z_1$가 되어 $r^* = \frac{41}{4}$, $s^* = -\frac{3}{7}$이 된다.

따라서 Case 3의 경우가 되기 때문에 $r_1 = \frac{58}{7}$, $r_2 = \frac{149}{14}$가 되어 $T^{-1}(r, s^*) = (\frac{36}{7}, \frac{33}{7})$, $T^{-1}(r_2, s^*) = (\frac{155}{28}, \frac{143}{28})$를 구한다.

결과적으로 新設備의 Minimax 立地點은 $T^{-1}(r_1, s^*)$와 $T^{-1}(r_2, s^*)$를 연결하는 線分上의 모든 點

이 된다.

3. 多数設備의 最適立地

3.1 移動費用의 最少化

m개의 既存設備가 $(a_1, b_1)\cdots\cdots(a_m, b_m)$ 地點에 또한 n개의 新設備가 $(x_1, y_1)\cdots\cdots(x_n, y_n)$ 地點에 각각 立地할 때 既存設備 i와 新設備 j간 距離單位當 移動費用과 準備費用을 각각 W_{ij} 및 g_{ij}라 하면 i와 j간에 移動費用은

$$W_{ij}(|x_j-a_i|+(y_j-b_i|)+g_{ij}$$

가 된다.[4]

또한 新設備 j와 k간에 距離單位當 移動費用과 準備費用을 각각 V_{jk} 및 h_{jk}라 하면 j와 k간에 移動費用은

$$V_{jk}(|x_j-x_k|+|y_j-y_k|)+h_{jk}$$

가 된다.

따라서 새로운 設備 상호간의 移動에 따른 最大費用은

$$\begin{aligned} &f^*[(x_1, y_1)\cdots\cdots(x_n, y_n)] \\ &\quad=\max_{1\le j<k\le n}[V_{jk}(|x_j-x_k|+|y_j-y_k|)+h_{jk} \end{aligned}$$

가 되며 既存設備와 새로운 設備사이의 移動에 따른에 最大費用은

$$\begin{aligned} &f^{**}[(x_1, y_1)\cdots\cdots(x_n, y_n)] \\ &\quad=\max_{1\le j<n}[W_{ij}(|x_j-a_i|+|y_j-b_i|)+g_{ij}] \end{aligned}$$

가 된다.

결국 設備 상호간의 移動에 따른 最大費用은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &f[(x_1\ y_1)\cdots\cdots((x_n, y_n)] \\ &\quad=\text{Max}\ [f^*(x_1,y_1)\cdots\cdots(x_n, y_n)], \\ &\qquad\qquad f^{**}[(x_1,y_1)\cdots\cdots(x_n, y_n)] \cdots (13) \end{aligned}$$

既存設備 i와 新設備 j간의 距離 上限値를 C_{ij}, 新設備 j와 k간의 距離 上限値를 d_{jk}라고 할 때 (14)式과 (15)式의 制約條件하에서 $f[(x_1,y_1)\cdots\cdots(x_n, y_n)]$를 最少化하는 것이 바람직하다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize}\quad f[(x_1,y_1)\cdots\cdots(x_n,y_n)] \\ &\text{Subject to} \\ &|x_j-a_i|+|y_j-b_i|\leqq C_{ij} \\ &1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq j\leqq n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14) \\ &|x_j-x_k|+|y_j-y_k)\leqq d_{jk} \\ &1\leqq j\leqq k\leqq n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (15) \end{aligned}$$

즉, 새로운 設備는 設備상호간 距離의 上限値 制約條件下에서 最大移動費用을 最少化할 수 있는 地點에 입지되어야 한다.

다시 말하면, (13)式을 最少化하기 위하여 다음과 같은 制約條件下에서 Z 값을 最少化시킨다.[5]

$$\begin{aligned} &\text{Minimize}\quad Z \\ &\text{Subject to} \\ &W_{ij}(|x_j-a_i|+|y_j-b_i|)+g_{ij}\leqq Z \\ &1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq j\leqq n \\ &V_{jk}(|x_j-x_k|+|y_j-y_k|)+h_{jk}\leqq Z \\ &1\leqq j<k\leqq n \\ &|x_j-a_i|+|y_j-b_i|\leqq C_{ij}, \\ &1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq j\leqq n \\ &|x_j-x_k|+|y_j-y_k|\leqq d_{jk}, \\ &1\leqq j<k\leqq n \end{aligned}$$

이 문제는 (11)式의 變換 T와 같이 $(a'_i\ b'_i)=T(a_i, b_i)$ 및 $(r_j, s_j)=T(x_j, y_j)$ 같이 놓고 다음과 같이 變換시킨다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize}\quad Z \\ &\text{Subject to} \\ &\text{Max}\,(W_{ij}|r_j-a'_i|+g_{ij},\ W_{ij}|s_j-b'_i|+g_{ij})\leqq Z \\ &1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq j\leqq n \\ &\text{Max}\,(V_{jk}|r_j-r_k|+b_{jk},\ V_{jk}|s_j-s_k)+b_{jk}\leqq Z \\ &1\leqq j<k\leqq n \\ &\text{Max}\,(|r_j-a'_i|,\ |s_j-b'_i|)\leqq C_{ij}, \\ &1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq j\leqq n \\ &\text{Max}\,(|r_j-r_k|,\ |s_j-s_k|)\leqq d_{jk}, \\ &1\leqq j<k\leqq n \end{aligned}$$

3.2 PO形式 問題의 展開

상기 문제를 PO形式問題로 전개할 수 있으며 이는 다시 P1 및 P2形式의 2개 문제로 확창할 수 있다.

P1題題는 (16)式, (17)式, (18)式 및 (19)式과 같은 制約條件下에서 Z_1을 최소화하는 것이다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize}\quad Z_1 \\ &\text{Subject to} \\ &W_{ij}|r_j-a'_i|+g_{ij}\leqq Z_1 \\ &1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq j\leqq n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16) \\ &V_{jk}|r_j-r_k|+h_{jk}\leqq Z_1 \\ &1\leqq j<k\leqq n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (17) \end{aligned}$$

$|r_j - a'_i| \leq C_{ij}$,

$1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n$ ························ (18)

$|r_j - r_k| \leq d_{jk}$,

$1 \leq j < k \leq n$ ···································· (19)

또한 P2문제는 P1의 z_1, a'_i, r_j 및 r_k 를 Z_2, b'_i, s_j 및 s_k 로 置換함으로써 얻을 수 있다. 不等式 $Max(|r_j - a'_i|, |s_j - b'_i|) \leq C_{ij}$ 는 2개 不等式 $|r_j - a'_i| \leq C_{ij}$ 및 $|s_j - b'_i| \leq C_{ij}$ 와 같다는 것을 고려하여 한개 문제를 2개 문제로 확창시킨다.[6]

즉, Z는 2개 문제의 目的函數사이에 구분이 되도록 하기 위해 P1과 P2문제에서 Z_1과 Z_2로 구분하여 놓는다.

P0, P1과 P2는 다음과 같은 면에서 相互關係가 있다.

〈Remark 1〉

만일 $(r_1^* \cdots\cdots r_n^*, z_1^*)$ 및 $(s_1^* \cdots\cdots s_n^*, z_2^*)$ 가 P1과 P2에 대해 最適解가 되며 또한 $Z_0^* = Max(z_1^*, z_2^*)$ 라면 이때 $(r_1^* \cdots\cdots r_n^*, s_1^* \cdots\cdots s_n^*, z_0^*)$ 는 P0에 대한 最適解가 된다.

P0는 多數立地問題와 같기 때문에 Minimax 立地問題에 대한 最適解는 다음과 같이 얻을 수 있다.

〈Remark 2〉

만일 $1 \leq j \leq n$ 에 대해 $(x_j^*, y_j^*) = T^{-1}(r_j^*, s_j^*)$ 이면 x_j^*, y_j^* 는 新設備에 대해 Minimax 立地가 되며 $Z_0^* = f[(x_1^*, y_1^*) \cdots\cdots (x_n^*, y_n^*)]$ 가 된다.

P1으로부터 不等式의 절대치를 변형함으로써 LP 問題인 P1′를 얻을 수 있다.

Minimize Z

Subject to

$$-r_j + \frac{Z_1}{W_{ij}} \geq -a_i + \frac{g_{ij}}{W_{ij}}$$

$1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n$ ························ (20)

$$r_j + \frac{Z_1}{W_{ij}} \geq a'_i + \frac{g_{ij}}{W_{ij}}$$

$1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n$ ························ (21)

$$r_j - r_k + \frac{Z_1}{V_{jk}} \geq \frac{h_{jk}}{V_{jk}}$$

$1 \leq j < k \leq n$ ···································· (22)

$$-r_j + r_n + \frac{Z_1}{V_{jk}} \geq \frac{h_{jk}}{V_{jk}}$$

$1 \leq j < k \leq n$ ···································· (23)

$r_j \geq d_j$

$1 \leq j \leq n$ ·· (24)

$-r_j \geq -d_j$

$1 \leq j \leq n$ ·· (25)

$r_j - r_k \geq -d_{jk}$

$1 \leq j < k \leq n$ ···································· (26)

$-r_j + r_k \geq -d_{jk}$

$1 \leq j < k \leq n$ ···································· (27)

여기서 $1 \leq j \leq n$ 에 대해 d_j 및 D_j 값은

$$d_j = \underset{1 \leq i \leq m}{Max}(a'_i - C_{ij})$$

$$D_j = \underset{1 \leq i \leq m}{Min}(a'_i + C_{ij})$$

와 같다.

P1′ 問題는 LP技法 또는 雙對技法으로 직접 풀 수 있다. P1′는 위의 경우와 같이 非陰制約條件이 포함하지 않고 있으나 非陰制約條件이 P1′ 및 P2′ 문제에 포함될 수도 있다.

모든 既存設備는 b_s가 b_i 의 最少値인 경우와 a_L 가 a_i 의 最大値인 경우에 $b_s \geq a_L$ 과 같이 第1象限에 입지하게 된다. $b_s \geq a_L$ 條件은 $b_i \geq a_i$ 를 나타내어 모든 既存設備는 $y = x$ 線上 또는 그 위에 입지하게 된다.

만약 a_s 가 a_i 의 最少値이고, b_L 가 b_i 의 最大値라면 $\mathbf{R} = \{(x, y) = a_s \leq x \leq a_L, \ b_s \leq y \leq b_L\}$와 같이된다. P0에 대한 最適解는 $0 \leq a_s \leq x_j \leq a_L$ 및 $0 \leq b_s \leq y_j \leq b_L$ 이 되며 직사각형의 혹은 內部에 있는 모든 새로운 設備의 立地點(x_i, y_j)을 갖게 될 것이다.

變換 T를 이용하면 $b_s \geq a_L$ 이기 때문에 $s_j = -x_j + y_j \geq -a_L + b_s \geq 0$ 의 경우 $(r_j, s_j) = (x_j + y_j, -x_j + y_j)$와 $r_j = x_j + y_j \geq a_s + b_s \geq 0$ 가 된다.

P0問題를 해결하기 위하여 P2問題가 역시 해결되어야 한다. P2問題는 P′에서 r_j 를 s_j 로 置換, Z_1 를 Z_2 로 置換, a'_i 를 b'_i 로 置換 그리고 d_j 와 D_j 에서 정의된 a'_i 를 b'_i 로 置換하여 얻어진 P2′를 풀므로서 해결될 수 있다. P1′ 및 P2′ 兩問題가 해결되면 〈Remark 2〉는 초기 Minimax 立地問題를 해결하는데 이용된다.

Minimax 問題를 해결하는데 P1′ 및 P2′에 대한 解의 이용에 2개의 規則이 있다.

첫번째 規則은 〈Remark 2〉를 이용하여 얻어진 解이외에 代案的인 Minimax 立地點이 存在한다. 즉 (10)式을 最少할 때와 마찬가지로 여러가지 Case 를 고려해야 한다.

두번째 規則은 Minimax問題의 制約條件이 (14) 및 (15)式에 일치하지 않을 경우 P1′ 또는 P2′ 制約條件은 이 問題들의 解를 산출할시 일치되지 않으며 Minimax 立地點은 存在하지 않는다.

반대로 만약 P1′의 制約條件이 일치되지 않을 경우 制約條件 (14) 또는 (15)式 혹은 兩式은 일치하지 않으며 Minimax立地點은 存在하지 않는다.[7)]

3.3 計算例示

3개의 旣存設備가 地點$(a_1, b_1) = (0, 9)$, $(a_2, b_2) = (4, 8)$ 및 $(a_3, b_3) = (7, 7)$에 그리고 2개의 새로운 設備가 地點(x, y)에 立地하고 있다. 모든 旣存設備는 1象限인 $a_L = 7$과 $b_s = 7$에 立地하며 非陰制約條件이 P1′ 및 P2′에 포함되어 있으며 加重値는 $V_{12} = 3$이고 W_{ij}는 다음과 같다.

$$\mathbf{W} = (W_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

모든 g_{ij} 및 h_{ij}는 零이다. 새로운 設備 1과 2간의 距離上限値는 $d_{12} = 3$이며 旣存設備와 新設備간의 距離上限値는

$$\mathbf{C} = C_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

와 같다.

P1′을 위하여 $a'_1 = 9$, $a'_2 = 12$, $a'_3 = 14$를 계산한다. 또한 $d_1 = \text{Max}(9-4,\ 12-2,\ 14-8) = 10$ $d_2 = \text{Max}(9-6,\ 12-2,\ 14-4)$를 계산하기 위하여, 그리고 $D_1 = \text{Min}(9+4,\ 12+2,\ 14+8) = 13$, $D_2 = \text{Min}(9+6,\ 12+2,\ 14+4) = 14$를 계산하기 위하여 각각 D_i에 대한 방정식을 이용한다.

이로써 P1′이 해결되며 여기서 구하여진 最適解는 $(r_1^*, r_2^*, z_1^*) = (\frac{32}{3}, \frac{37}{3}, 5)$가 된다. P2′를 위하여 $b'_1 = 9$, $b'_2 = 4$ 및 $b'_3 = 0$를 계산하며 또한 $d_j = \underset{1 \le i \le m}{\text{Max}} (b'_i - C_{ij})$ 및 $D_j = \underset{1 \le i \le m}{\text{Min}} (b'_i + c_{ij})$를 산정한다.

결과적으로 $d_1 = \text{Max}(9-4,\ 4-2,\ 0-8) = 5$, $d_2 = \text{Max}(9-6,\ 4-2,\ 0-4) = 3$, $D_1 = \text{Min}(9+4,\ 4+2,\ 0+8) = 6$ 및 $D_2 = \text{Min}(9+6,\ 4+2,\ 0+4) = 4$가 된다.

P2′는 r_j, r_k, a'_i 및 z_1을 s_j, s_k, b'_i 및 Z_2로 각각 置換하고 d_j 및 D_j의 값으로서 해결될 수 있으며, 最適解는 $(s_1^*, s_2^*, z_2^*) = (6, 3, 9)$ 가 된다.

P1′ 및 P2′에 대한 最適解가 되기 때문에 P0에 대한 最適解를 구하기 위하여 <Remark 1> 및 <2>를 이용한다. 旣存設備에 대한 새로운 設備의 最適立地點은 $Z_0^* = \text{Max}(z_1^*, z_2^*) = 9$ $(x_1^*, y_1^*) = T^{-1}(r_1^*, s_1^*) = (\frac{7}{3}, \frac{25}{3})$ 및 $(x_2^*, y_2^*) = T^{-1}(r_2^*, s_2^*) = (\frac{14}{3}, \frac{23}{3})$가 된다.

4. 結 論

이상에서 다룬 Minimax立地問題는 單一設備 및 多數設備에 대한 直角距離(rectlinear distance)를 중심으로 하여 검토되었지만 이외에도 直線距離(Euclidean distance) 또는 設備單位規模(facility configuration)에 대하여서도 Minimax立地意思決定을 導入할 수 있다.[8)]

Minimax立地決定은 주로 最終的인 立地解보다는 補助解로서의 성격을 가지고 있다고 보아야 할 것이다.

최종적인 設備立地決定은 移動距離 · 移動時間 및 移動費用외에도 生産시스템과 마아케팅시스템을 空間的으로 적정화하기 위하여 여러가지 要素들이 더 검토되어 종합적인 측면에서 이루어져야 한다.

그러나 Minimax立地解는 最適立地에 遂行하는 最大値중에서 最少値를 찾는 것이므로 많은 立地要因에 의한 解를 구하는데 先行的인 解의 역할을 할 수 있어 결국 設備의 最適立地選定을 위한 意思決定에서 주요한 역할을 담당할 수 있다고 본다.

參 考 文 獻

1) R. L. Francis, & J. A. White, *Facility Layout & Location*, Prentice-Hall, 1974, pp. 380-395.
2) W. Isard, *Location & Space-Economy*, The MIT Press, 1956, pp. 223-230.
3) P. Haggett, *Locational Analysis*, Edward Arnold 1977, pp. 406-413.
4) David M. Smith, *Industrial Location*, John Wiley & Sons, 1981, pp. 167-178.
5) Laurence A. Wolsey, Maximising Real-Valued Submodulor Functions, *Mathematics of Operations Research*, Vol 7, No. 3, 1972, pp. 410-415.
6) B. Dasarathy & Lee, J. White, A Maxmin Location Problem, *Operations Research*, Vol 28, 1980, pp. 1387-1390.
7) R. S. Garfinkel, The m-Center Problem ; Minimax Facility Location, *Management Science*, Vol 23, No. 10, 1977, pp. 1133-1136.
8) Handler & Mirchandani, *Location on Networks*, The MIT Press, 1979, pp. 80-92.