工業經營論叢 第8巻 第11輯 1985年 7月 27

分布時差模型의 Bayesian 意思決定法에 關한 研究

A Study on the Distributed Lag Model by Bayesian Decision Making Method

李 弼 領*

Abstract

Recently the distributed lag models for time series data have been used in several quantitative analyses.

But the analyses of time series which have the serial correlations in error terms and the lagged values of dependent variables violate the hypothesis of OLS method.

This paper suggests that the approach technique of distributed lay model with serial correlation should be applied by the Bayesian inference to estimate the parameters.

For the application of distributed lag model by Bayesian analysis, the data for monthly consumption expenditure per household by items of commodities from 1972 to 1981 are used in order to estimate the lagged coefficient of processed food and the regression coefficient of the food and beverage.

1. 序 論

企業에 있어서 通常的인 豫測方法 및 分析基準은 여러 기간 동안 얻어진 時系列 資料이다. 모든 豫測方法은 過去의 資料에서 나타난 基本的 重要한 性向(pattern)과 어느 정도의 偶然性(randomness)이 附加的으로 나타나 있다는 假定下에서 設計된 것이다.[1)]

그러나 資料 自體의 不確實性과 過去의 潛在的인 영향 및 經營者 自身의 主觀性에 대한 科學的 解決方法으로써 主觀的 判斷을 事前確率로 看做하고 資料에 의한 修正으로 事後確率을 計算함으로써 主觀的 事前情報와 客觀的인 資料를 結合하여 事後確率로써 考察하는 것이 Bayesian 決定理論이다.

時系別 資料에 의한 計量的 分析을 위하여 分布時差模型(distributed lag model) 중 獨立變數 x_t와 從屬變數의 時差값(lagged value) y_{t-1}로써 從屬變數 y_t의 分布時差模型 $y_t=\lambda y_{t-1}+\alpha x_t+u_t$, $u_t \sim NID(0, \sigma^2)$에서 y_{t-1}, x_t 및 u_t가 最小自乘法(least square method)의 假定을 滿足한다면, u_t가 系列的으로 獨立일 때 λ와 α에 대한 最小自乘推定値는 一致推定値(consistent estimator)이다. 그러나 u_t가 系列相關(serially correlation)이 存在한다면 λ에 대한 OLS는 偏倚推定値(biased estimator)일 것이다.[2)]

本 論文에서는 時系列 資料에 의한 分布時差模型 $y_t=\lambda y_{t-1}+\beta_0 x_t+v_t$, $v_t=u_t-\lambda u_{t-1}$에서 誤差項 $v_t=\rho v_{t-1}+\epsilon_t$의 關係가 있을 때 OLS의 假定에 違反되므로 Bayesian 分布方法에 의해서 母數 λ와 β_0를 推定하고자 한다.

本 論文의 構成은 2章에서는 系列相關 誤差와 從

---

* 公州師範大學 商業教育科 專任講師

1) S.C. Wheelwright & S. Makridakis, *Forecasting Methods for Management*, 3rd Ed., John Wiley & Sons, 1980. p.171.

2) Z. Griliches, A Note on Serial Correlation Bias in Estimates of Distributed Lags, *Econometrica*, Vol.29. 1., 1961, p.65.

屬變數의 時差값을 包含한 分布時差模型에서 傳統的인 OLS 方法의 問題點을 提示하였고, 3章에서는 分布時差模型의 母數 λ와 β_0에 대한 結合事後密度函數를 誘導하여 λ와 β_0에 대한 Bayesian 分析方法을 考察하였고, 4章에서는 1972年부터 1981年까지의 우리나라 全都市 家口當 品目別 月平均 加工食品에 대한 消費支出資料로써 時差係數인 λ와 食料品費에 대한 加工食品의 回歸係數 β_0를 Bayesian 分析法에 의하여 推定하였다. 5章에서는 硏究結果 및 分析上의 問題點을 綜合的으로 整理하였고, 특히 Bayesian 分析을 위한 Computer program list를 附錄에 收錄하였다.

2. 系列相關誤差와 時差変數의 分布時差模型

時系列 資料가 갖는 特性은 時間의 經過에 따라 趨勢性(trend), 季節性(seasonal), 循環性(cyclical) 및 不規則性(irregular)의 여러 pattern으로 나타난다. 특히 分布時差模型에서 誤差項의 系列相關이 存在한다면 殘差(residual)에 대한 檢討가 要求된다. 이번 章에서는 分布時差模型 중에서 誤差項과 從屬變數의 系列相關이 存在할 때 여러 假定에 따른 分析方法을 다루고자 한다.

2・1 誤差項의 系列相関

2・1・1 誤差項의 自己回歸

時系列 資料에 內在된 正의 自己相關殘差(positively autocorrelated residual)는 趨勢性과 季節性에 대한 推定値의 信賴性을 상쇄시킨다. t 時點에서 從屬變數 y_t에 實際的인 영향을 주는 時系列의 說明變數를 x_t라 하고 誤差項 e_t는 自己相關이 있다는 假定下에 回歸模型은 다음과 같다.

$$y_t = \alpha + \beta x_t + e_t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.1)$$

誤差項 e_t의 自己相關에 대한 一般的 模型은 다음과 같다.

$$e_t = \rho e_{t-1} + v_t,\ v_t \sim \mathrm{NID}(0, \sigma_v^2) \quad (2.2)$$

이러한 誤差項의 自己相關 存在는 (2.1)式의 β를 推定하기 위한 OLS 方法의 假定에 違反되는 것이다. (2.1)式에서 β를 推定하기 위하여 다음과 같이 變形하여 推定할 수 있다.

$(t-1)$ 時點에서의 回歸模型을 兩邊에 自己回歸係數(autoregression coefficient)인 ρ를 곱하면 다음과 같다.

$$\rho y_{t-1} = \rho\cdot\alpha + \rho\cdot\beta x_{t-1} + \rho\cdot e_{t-1} \cdots\cdots (2.3)$$

(2.1)式에서 (2.3)式을 빼면 다음과 같은 回歸模型을 求할 수 있다.

$$\begin{aligned} & y_t - \rho y_{t-1} \\ & = \alpha(1-\rho) + \beta(x_t - \rho x_{t-1}) + (e_t - \rho\cdot e_{t-1}) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots (2.4) \end{aligned}$$

變形된 값 $y_t - \rho y_{t-1} = dy_t$, $x_t - \rho x_{t-1} = dx_t$라 하면 (2.4)式은 다음과 같이 表現된다.

$$dy_t = \alpha(1-\rho) + \beta\, dx_t + v_t \cdots\cdots\cdots (2.5)$$

變形된 값 dy_t와 dx_t를 一般化된 差(generalized difference)라 하고 假定에 의하여 v_t는 平均이 zero이고 分散이 一定한 獨立的인 正規分布를 한다. 따라서 誤差項의 系列相關이 存在하는 경우 變形된 (2.5)式에 의하여 β를 推定한다. 그러나 (2.5)式의 回歸模型을 分析하기 전에 dy_t와 dx_t는 前時點의 觀察値를 利用할 수 없기 때문에 資料로부터 追加的인 調整値를 取한다.[3]

$$\left.\begin{aligned} dy_t &= \sqrt{1-\rho^2}\ y_1 \\ dx_t &= \sqrt{1-\rho^2}\ x_1 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (2.6)$$

만약 誤差項의 自己回歸 ρ가 알려져 있다면 變形된 (2.5)式으로부터 OLS 方法으로 β를 推定할 수 있다. 그러나 一般的으로 ρ를 모르고 있기 때문에 우선적으로 ρ를 推定해야 한다.

2・1・2 ρ의 統計的 推定

(2.2)式에서 誤差項 e_t가 觀察될 수 있다면 自己回歸係數인 ρ를 推定하기 위해서 殘差 $v_t \sim \mathrm{NID}(0, \sigma_v^2)$이므로 OLS 方法으로 推定할 수 있으나 系列相關인 誤差 e_t를 實際的으로 使用하기는 困難하여 OLS 方法으로 推定된 殘差 $\hat{e}_t$를 使用한다.

$\rho > 0$인 對立假說(alternative hypothesis)에 대하여 $\rho = 0$인 歸無假說(null hypothesis)을 檢定하기 위한 方法으로는 Durbin-Watson Test가 있다.

$$D/W = \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{e}_t\, \hat{e}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{e}_t^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (2.7)$$

(2.7)式의 Durbin-Watson Test는 어느 정도 大標本에서의 test이고 小標本에서는 有意치 않다.[4] 만약 $\rho = 0$이고 系列相關이 없다면 D/W값은 2에 近似的으로 接近한다. 따라서 正의 系列相關(posi-

3) R. J. Wonnacott & T. H. Wonnacott, *Econometrics*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1979, p. 217.

4) J. Johnston, *Econometric Methods*, 3rd., ed., McGraw-Hill, 1979, p. 313.

tive serial correlated)이 存在할 때 D/W 값은 적어지며 系列相關이 成立한다면 (2.7)式에 의하여 ρ를 推定한다. (2.4)式의 回歸模型으로부터 $v_t = e_t - \rho e_{t-1}$, $v_t \sim NID(0, \sigma_v^2)$임으로 OLS 方法에 의하여 ρ를 推定하여 (2.6)式에 나타난 初期時點에서 變形된 값 dy_1과 dx_1을 計算한다. 이러한 ρ의 推定過程은 唯一한 方法은 아니며 ρ를 推定하는 대신 自己相關係數 r을 使用하기도 한다. 小標本의 경우 이러한 推定値는 問題點을 內包하여 標本實驗을 여러번 simulation하여 매번 推定値를 計算하여 推定値의 分布로써 ρ를 推定할 수 있다.[5]

2・2 分布時差模型

2・2・1 Koyck의 分布時差模型

1954年 Koyck은 時差係數 β_j는 時點의 差에 따라 指數的으로 減少하여 β_j를 다음과 같이 假定한다.

$$\beta_j = \beta_0 \lambda^j, \text{ 단 } 0 < \lambda < 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.8)$$

이제 從屬變數 y_t가 說明變數 x_t에는 물론 前期時點의 x의 값에 대해서도 從屬的이라면 다음과 같은 回歸模型을 定義하고 時差係數 β_j를 推定할 수 있다.[6]

$$y_t = \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \cdots + u_t \quad (2.9)$$

단, $u_t \sim NID(0, \sigma_u^2)$이고 靜態的(stationary)이며 β_j는 모두 同一한 符號를 갖고 $\Sigma\beta_j < \infty$이다. 이제 λ와 β_0를 推定하는 過程을 考慮하자. (2.7)式과 (2.8)式으로부터 t時點에서 y_t와 x와의 關係를 模型化할 수 있다.

$$y_t = \beta_0 x_t + \beta_0 \lambda x_{t-1} + \beta_0 \lambda^2 x_{t-2} + \cdots + u_t \quad (2.10)$$

(t −1)時點에서의 關係式은 다음과 같다.

$$y_{t-1} = \beta_0 x_{t-1} + \beta_0 \lambda x_{t-2} + \beta_0 \lambda^2 x_{t-3} + \cdots + u_{t-1} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2.11)$$

(2.11)式의 兩邊에 λ를 곱하여 (2.10)式으로부터 빼면 본래의 (2.8)式은 다음과 같은 分布時差模型으로 나타낼 수 있다.

$$y_t = \lambda y_{t-1} + \beta_0 x_t + v_t, \quad v_t = u_t - \lambda u_{t-1} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2.12)$$

(2.12)式에서 誤差項 $v_t \sim NID(0, \sigma_v^2)$이면 OLS 方法으로 λ와 β_0를 推定하고 λ와 β_0의 推定値를 (2.7)式에 代入하여 β_j를 推定할 수 있다. 그러나 (2.12)式에서 誤差項 v_t는 平均이 zero이고 分散이 一定한 獨立的 分布가 아니라 系列相關을 나타내는 경우에 OLS 方法의 推定値는 效率的(efficient)이 아니다. 또한 誤差項 v_t가 y_{t-1}과 相關關係를 나타내어 OLS 方法의 推定値는 偏倚推定値이다. 따라서 (2.12)式의 分布時差模型에서 λ와 β_0를 推定하는 過程은 誤差項 v_t의 假定에 따라 다르게 處理되어야 한다.

2・2・2 假定에 따른 分布時差模型

(2.12)式의 分布時差模型에서 誤差項 v_t에 따른 여러 假定은 다음과 같이 區分한다.[7]

假定 I : $v_t = u_t - \lambda u_{t-1}$,
$v_t \sim NID(0, \sigma_v^2)$

假定 II : (a) $v_t = u_t - \lambda u_{t-1}$,
$u's \sim NID(0, \sigma_u^2)$
(b) $u_t = \rho u_{t-1} + e_t$,
$|\rho| < 1$,
$e's \sim NID(0, \sigma_e^2)$

假定 III : $v_t = \rho v_{t-1} + \epsilon_t$,
$|\rho| < 1$,
$\epsilon's \sim NID(0, \sigma_\epsilon^2)$

이제 誤差項과 從屬變數에서 系列相關의 有無에 따른 回歸模型과 OLS方法의 推定値는 어떠한 特性이 있는가는 表2・1과 같다.[8]

表 2・1 系列相關과 回歸模型

自己 相關	回 歸 模 型	OLS 推定値
(1)誤差項에만 存在	$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + u_t$, $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$, $\epsilon_t \sim NID(0, \sigma_\epsilon^2)$	不偏, 一致推定値
(2)從屬變數에 存在	$y_t = \alpha + \lambda y_{t-1} + \beta_0 x_t + u_t$, $u_t \sim NID(0, \sigma_u^2)$	偏倚, 一致推定値
(3)誤差項, 從屬變數 모두에 存在	$y_t = \alpha + \lambda y_{t-1} + \beta_0 x_t + u_t$, $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$, $\epsilon_t \sim NID(0, \sigma_\epsilon^2)$	偏倚, 不一致推定値

5) R. J. Wonnacott & T. H. Wonnacott, *op. cit.*, p. 221.
6) Z. Griliches, "Distributed Lage : A Survey," *Econometric* Vol. 35, 1967. p. 18.
7) J. Johnston, *op. cit.*, p.304.
8) R. J. Wonnacott & T. H. Wonnacott, *op. cit.*, p. 233.

3. 分布時差模型의 Bayesian 分析

前章에서 時系列 資料의 分布時差模型중 誤差項과 從屬變數에 系列相關이 存在하는 경우 OLS方法의 問題點을 提示하였다. 分布時差模型 $y_t = \lambda y_{t-1} + \beta_0 x_t + v_t$, $v_t = u_t - \lambda u_{t-1}$ 에서 $v_t = \rho v_{t-1} + \varepsilon_t$ 의 假定下에서 Bayesian 分析方法에 의하여 λ와 β_0를 推定하기 위해서 事後確率密度函數를 導入하여 λ와 β_0에 대한 推定方法을 다루고자 한다.

3·1 Bayseian分析의 基本原理

Bayesian 分析은 다음과 같은 假定으로부터 展開된다. 첫째, 分析者는 母數에 관해서 어떤事前的 情報를 가지고 있으며, 둘째, 事前的 情報는 確率的 形式으로 表現될 수 있다. 특히 母數는 確率變數로 看做되고 分析者는 事前情報에 의해서 母數에 대한 事前確率分布를 부과할 수 있다는 假定이다.[9]

特殊한 狀況에 關聯된 事前確率 $P(\theta \mid I_0)$은 初期情報 I_0에 基本을 두고 있다. Bayes' Theorem에 의하여 事後確率은 事前確率과 尤度函數(likelihood function) $P(y \mid \theta)$의 結合으로 나타난다. 事前確率은 初期情報 I_0에 基本을 둔 母數 θ에 대한 初期信賴를 나타낸다고 할 수 있고 尤度函數 $P(y \mid \theta)$는 標本情報를 反映한 것이다.[10]

이제 $X = (x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$은 未知母數 vector θ에 의해서 決定되는 連續分布의 母集團으로부터 任意로 抽出된 標本이라 하자. 未知母數 vector θ 에 관한 事前確率密度函數를 $P(\theta)$로 表記하고 標本과 母數 vector의 結合密度函數를 $P(X, \theta)$로 表記하자.

$$P(X,\theta) = P(\theta)\cdot P(X\mid\theta) = P(X)\cdot P(\theta\mid X) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3.1)$$

(3.1)式으로부터 다음의 關係가 成立한다.

$$P(\theta\mid X) = \frac{P(X,\theta)}{P(X)} = \frac{P(X)\cdot P(X\mid\theta)}{P(X)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.2)$$

단, $P(X) > 0$이다.

(3.2)式이 連續確率變數에 대한 Bayes' Theorem 이다. (3.2)式의 左邊에 있는 $P(\theta\mid X)$는 標本이 주어졌을 때 母數 vector θ에 대한 條件附密度函數이다. $P(X) > 0$임으로 다음과 같은 關係式으로 나타낼 수 있다.

$$P(\theta\mid X) \propto P(\theta)\cdot P(X\mid\theta) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.3)$$

(3.3)式의 $\propto$는 比例的(proportional) 關係를 나타내는 符號이다. 즉, $P(\theta\mid X)$는 事前情報와 標本情報의 結合으로 나타나는 母數 vector의 事後密度函數이다. (3.3)式의 右邊에 $P(X\mid\theta)$는 주어진 X에 대하여 θ의 函數로 해석될 때 尤度函數 $L(X;\theta)$에 지나지 않는다. 따라서 事後密度函數는 事前密度函數와 尤度函數의 곱(product)에 比例的 關係로 나타난다. 比例的 常數는 (3.3)式의 總積分이 1이 되도록 하는 方法으로 標準化常數(normalizing constant)를 求하여 事後密度函數를 求할 수 있다.

이제 X를 未知의 平均 μ와 旣知의 分散 σ^2인 正規分布로부터 任意의 標本이라 하자. 未知의 平均 μ는 事前平均이 μ_0이고, 事前分散이 σ_0^2인 正規分布라고 假定하면 μ에 대한 事前密度函數는

$$P(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(\mu-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}\right\} \quad (3.4)$$

이고, 標本의 尤度函數는

$$L(X;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right\} \quad (3.5)$$

이다. 標本平均과 標本分散을 各各 $\bar{x} = \frac{1}{n}\Sigma x_i$, $s^2 = [1/(n-1)]\sum^{n}(x_i-\bar{x})^2$로 表記하고 (3.5)式에서 $\sum^{n}(x_i-\mu)$에 대해서 考察하자.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}[(x_i-\bar{x})+(\bar{x}-\mu)]^2 = (n-1)s^2 + n(\bar{x}-\mu)$$

이므로 (3.5)式에 代入하면 尤度函數

$$L(X;\mu,\sigma^2) = \frac{\exp\{-\frac{1}{2}(n-1)s^2/\sigma^2\}}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{\sigma^2/n}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.6)$$

이다.

(3.6)式의 右邊에서 σ^2은 旣知이므로 尤度函數는 다음과 같은 關係式으로 나타낼 수 있다.

9) H. Theil, *Principles of Econometrics*, John Wiley & Sons, 1971, p.604.

10) G. E. P. Box & G. C. Tiao, Bayesian Inference in *Statistical Analysis*, Addison-Wesley, 1973, p.10.

$$L(X;\mu,\sigma^2)\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{\sigma^2/n}\right\}\cdots\cdots(3.7)$$

이제 (3.4)式의 事前密度函數와 (3.7)式의 尤度函數를 結合하여 μ에 대한 事後密度函數를 求하면 다음과 같다.

$$P(\mu|X,\sigma^2)\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\mu-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}+\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{\sigma^2/n}\right]\right\}$$

$$\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{1}{\sigma^2/n}\right)\cdot\left(\mu-\frac{(\sigma^2/n)\mu_0+\sigma_0^2\bar{x}}{\sigma_0^2+\sigma^2/n}\right)\right\}^{11)}\quad(3.8)$$

(3.8)式에서 μ의 事後分布는 다음과 같은 平均과 分散을 갖는 正規分布임을 나타낸다.

$$\text{平均}:\frac{(\sigma^2/n)\mu_0+\sigma_0^2\cdot\bar{x}}{\sigma_0^2+\sigma^2/n}=\frac{(\sigma_0^2)^{-1}\mu_0+(\sigma^2/n)^{-1}\cdot\bar{x}}{(\sigma_0^2)^{-1}+(\sigma^2/n)^{-1}}\cdots(3.9)$$

$$\text{分散}:\frac{1}{(\sigma_0^2)^{-1}+(\sigma^2/n)^{-1}}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.10)$$

3・2 非情報的 事前分布

前節에서는 未知의 平均 μ와 旣知의 分散 σ^2을 갖는 正規分布를 假定하였으나 分散 σ^2을 모르는 경우 分析者는 2個의 母數 μ와 σ^2을 結合한 事前密度函數 $P(\mu,\sigma^2)$을 設定해야 한다. 現實的으로 μ와 σ^2을 모르는 경우가 大部分이다.

Bayesian 分析에 있어서 分析者는 母數에 관해서 알지 못한다는 것이 論爭되고 있다. 그러므로 分析者는 母數의 事前情報에 대한 막연함(vague)을 적당하게 表現하는 事前分布를 擇해야 한다. 적절한 事前分布를 擇하는 것이 非情報的 事前分布(noninformative or diffuse)의 主題이다.[12]

Uniform分布는 廣範圍하게 使用되기 때문에 正規分布의 平均 μ는 A가 대단히 큰 값의 경우, 區間 $(-A, A)$를 均一的으로 分布하는 事前的인 것으로 看做한다.

어떤 模型의 母數에 대한 事前情報가 모호한(diffuse) 경우 資料分析에 있어서 不充分한 事前情報를 利用한다. 母數의 참값을 모르는 경우나 不充分한 事前情報인 경우 Jeffreys法則에 의한 事前分布를 擇하는 2種類의 方法은 다음과 같다.

母數가 $-\infty$에서 $+\infty$ 사이의 어떠한 값을 갖는 경우에 그 母數의 事前確率分布는 一樣分布(uniform distribution)하게 되며, 그 母數가 zero에서 $+\infty$ 사이의 값인 경우에 그 母數에 對數(logarithm)를 취한 것의 事前分布는 一樣分布로 看做한다. 따라서 다음과 같은 結合事前分布를 취할 수 있다.[13]

$$P(\mu,\sigma)\,d\mu\cdot d\sigma\propto\frac{d\mu\cdot d\sigma}{\sigma}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.11)$$

단, $-\infty<\mu<\infty$, $0<\sigma<\infty$이다.

(3.6)式과 (3.11)式으로부터 μ와 σ의 結合事後分布를 求할 수 있다.

$$P(\mu,\sigma|X)\propto\frac{1}{\sigma^{n+1}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(n-1)s^2+n(\bar{x}-\mu)^2}{\sigma^2}\right\}\cdots(3.12)$$

分析者가 σ가 아닌 μ에 關心이 있다면 (3.12)式을 σ에 관해서 積分함으로써 μ의 周邊事後密度函數를 求할 수 있다.

$$P(\mu|X)=\int_0^\infty p(\mu,\sigma|X)\cdot d\sigma^{14)}$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{\sigma^{n+1}}exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(n-1)s^2+n(\bar{x}-\mu)^2}{\sigma^2}\right\}\cdot d\sigma$$

$$\propto\left(1+\frac{[(\bar{x}-\mu)/(s/\sqrt{n})]^2}{(n-1)}\right)^{-n/2}\cdots(3.13)$$

(3.13)式에서 μ는 確率變數로 看做되고 $\bar{x}$와 s는 標本에서 求해진 固定된 값이다.

3・3 分布時差模型의 Bayseian 分析

前章 (2.12)式 $y_t=\lambda y_{t-1}+\beta_0 x_t+v_t$, $v_t=u_t-\lambda u_{t-1}$의 分布時差模型은 誤差項 v_t의 여러 假定에 따라 分析方法이 다르다. 假定 II(a)에서 $u_t\sim NID(0,\sigma_u^2)$일 때 誤差項 $v_t=u_t-\lambda u_{t-1}$의 分散은 $\sigma_u^2(1+\lambda^2)$이고 1次自己共分散(first order

---

11) $\frac{(\mu-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}+\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{\sigma^2/n}$을 μ에 관해서 完全제곱형으로 變形하여 展開한 것임.

12) H. Theil, *op. cit.*, p. 669.

13) A. Zellner, An Introduction to Bayesian Inference in *Econometrics*, John Wiley & Sons, 1971, p. 41.

14) H. Theil, *op. cit.*, p. 670.

autocovariance)은 $E(u_t-\lambda u_{t-1})(u_{t-1}-\lambda u_{t-2})=-\sigma^2\lambda$ 이다. 假定 Ⅱ(a)에 의하여 u_t가 獨立的으로 分布함으로 二次 以上의 自己共分散(higher order autocovariance)은 Zero이다.

이번 節에서 다루고자 하는 分布時差模型 $y_t=\lambda y_{t-1}+\beta_0 x_t+v_t$, $v_t=u_t-\lambda u_{t-1}$ 에서 誤差項 v_t가 自己相關이 存在할 경우를 分析對象으로 한다. 즉,

$$v_t=\rho v_{t-1}+\varepsilon_t,\ \varepsilon_t\sim \mathrm{NID}(0,\ \sigma_\varepsilon^2) \cdots (3.14)$$

우선 母數 λ와 β_0의 結合事後密度函數를 求하기 전에 誤差項 v_t에 대한 t 時點과 $t-1$ 時點에서의 自己相關係數의 推定値 ρ는 다음과 같다.

$$\hat{\rho}=\frac{\sum_{t=2}^{n}(v_t\cdot v_{t-1})}{\sum_{t=2}^{n}v_{t-1}^2} \cdots\cdots (3.15)$$

實際 $\hat{\rho}$를 計算하기 위하여 $v_t=y_t-\lambda y_{t-1}-\beta_0 x_t$ 이고, $v_{t-1}=y_{t-1}-\lambda y_{t-2}-\beta_0 x_{t-1}$임으로 (3.15)式을 다음과 같이 變形하여 使用한다.

$$\hat{\rho}=\frac{\sum_{t=3}^{n}(y_t-\lambda y_{t-1}-\beta_0 x_t)(y_{t-1}-\lambda y_{t-2}-\beta_0 x_{t-1})}{\sum_{t=3}^{n}(y_{t-1}-\lambda y_{t-2}-\beta_0 x_{t-1})^2} \cdots\cdots (3.16)$$

이제 (3.14)式에서 殘差 ε_t를 vector의 槪念으로 殘差 vector를 ε 라 하면 $\varepsilon_t=v_t-\rho v_{t-1}$이므로 ε_t를 다음과 같이 表現할 수 있다.

$$\varepsilon_t=(y_t-\lambda y_{t-1}-\beta_0 x_t)-\hat{\beta}(y_{t-1}-\lambda y_{t-2}-\beta_0 x_{t-1}) \cdots\cdots (3.17)$$

從屬變數 vector를 $\mathbf{y}$라 하면 標本의 觀察値에 대한 尤變函數는 다음과 같다.[15]

$$p(\mathbf{y}\mid\lambda,\beta_0,\rho,\sigma_\varepsilon)\propto\frac{1}{\sigma_\varepsilon{}^n}exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon{}^2}\varepsilon'\varepsilon\right\} \cdots\cdots (3.18)$$

母數에 對한 範圍는 $0<\lambda<1$, $\beta_0>0$, $-\infty<\rho<\infty$, $0<\sigma_\varepsilon<\infty$ 임으로 Jeffreys法則을 適用하면 母數에 對한 事前確率密度函數는 다음과 같다.

$$p(\lambda,\ \beta_0,\ \rho,\ \sigma_\varepsilon)\propto\frac{1}{\sigma_\varepsilon} \cdots\cdots (3.19)$$

(3.18)式과 (3.19)式을 結合하여 母數에 대한 結合事後密度函數를 求할 수 있다.

$$p(\lambda,\ \beta_0,\ \rho,\ \sigma_\varepsilon\mid\mathbf{y})\propto\frac{1}{\sigma^{n+1}}exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon{}^2}\varepsilon'\varepsilon\right\} \cdots\cdots (3.20)$$

이제 λ와 β_0에 대한 2變數 事後確率密度函數(bivariate posterior pdf)를 求하기 위하여 (3.20)式을 σ_ε와 $\hat{\rho}$에 관하여 積分하여 λ와 β_0의 結合事後密度函數는 다음과 같다.

$$p(\lambda,\ \beta_0\mid\mathbf{y})\propto\frac{\{\sum_{t=1}^{n}[y_{t-1}-\lambda y_{t-2}-\beta_0 x_{t-1}]^2\}^{-1/2}}{\{\sum_{t=1}^{n}[(y_t-\lambda y_{t-1}-\beta_0 x_t)-\hat{\rho}(y_{t-1}-\lambda y_{t-2}-\beta_0 x_{t-1})]^2\}^{(n-1)/2}} \cdots\cdots (3.21)$$

λ와 β_0를 推定하기 위하여 (3.21)式으로부터 母數 λ와 β_0 各各의 周邊事後密度函數를 誘導하여 λ와 β_0를 推定한다. 그러나 (3.21) 式으로부터 λ와 β_0 各各의 周邊事後密度函數를 求하는 것은 數學的으로는 매우 困難하여 2變數數値積分技法(bivariate numerical integration technique)을 適用하여 컴퓨터를 活用함으로써 λ와 β_0의 周邊事後密度函數(marginal nosterior pdf)를 求할 수 있다.[16]

4. 加工食品에 對한 適用 및 結果

4·1 統計資料

本 硏究에서 實際 適用된 資料는 經濟企劃院 調査統計局에서 發刊하는 韓國統計年鑑에서 抜萃한 우리나라 全都市 家口當 品目別 月平均 消費支出(Monthly Consumption Expenditure per Household by Items of Commodities)의 1972年부터 1981年까지의 食料品費와 加工食品費에 관한 時系列資料이다(表4.1參照).

4·2 適用方法

3章에서 誘導된 分布時差模型의 結合事後密度函數인 (3·21)式으로부터 λ와 β_0 各各의 周邊事後確率分布를 求하는 것은 數學的으로 매우 困難하여 컴퓨터를 利用한 2變數數値積分技法을 適用하여 λ

15) A. Zellner, *op. cit.*, p. 211.

16) *Ibid.*, p. 208.

表 4・1 全都市 家口數 品目別 月平均 消費支出

年度	食料品費(X)	加工食品(Y)	物價指數 *
1972	15,722	569	62.2
1973	17,148	674	64.2
1974	21,637	795	79.8
1975	28,478	979	100.0
1976	34,983	1,267	115.3
1977	40,138	1,383	127.0
1978	51,318	1,686	145.3
1979	63,416	1,964	171.9
1980	77,527	2,585	220.9
1981	92,970	3,170	268.0

* 物價指數는 1975年을 基準으로 換算한 數値임.

資料：經濟企劃院, 韓國統計年鑑, (서울：經濟企劃院 調査統計局, 1973-1982).

와 β_0 각각의 周邊事後確率分布로서 λ와 β_0의 平均과 分散을 求하였다. 이러한 Bayesian 分析 過程을 要約하면 다음과 같다.

① (3・21)式을 λ와 β_0에 대하여 積分함으로써 標準化 常數를 求한다.

② (3.21)式을 ①에서 求한 標準化 常數로 나누어 適合한 密度函數(proper density function)를 求한다.

③ β_0를 固定시켜 λ에 대한 周邊事後確率分布로서 λ의 事後平均과 事後分散을 求한다.

④ λ를 固定시켜 β_0에 대한 周邊事後確率分布로써 β_0의 事後平均과 事後分散을 求한다.

4・3 結 果

(3.21)式을 資料로써 2變數數値積分技法에 의한 適用結果는 表4・2와 같다.

表4・2 適用結果

POSTERIOR MEASURES ASSOCIATED WITH THE MARGINAL POSTERIOR PDF

POSTERIOR MEASURE	MARGINAL POSTERIOR PDF FOR LAMBDA	MARGINAL POSTERIOR PDF FOR BETA
MEAN	0.23222625	0.02760969
VARIANCE	0.02078216	0.00076229

*** AUTOREGRESSIVE RHO :1.02702904 ***
*** NORMALIZING CONSTANT:.15786E-20 ***

1972年부터 1981年까지의 10年間의 資料에 의한 加工食品에 대한 時差係數 λ의 推定値는 0.232226이고 同一時點의 食品費에 대한 回歸係數 β_0는 0.0276097이다. 따라서 誤差項의 系列相關이 存在하는 分布時差回歸模型은 다음과 같은 形式으로 나타난다고 할 수 있다.

$$y_t = 0.232226\ y_{t-1} + 0.0276097\ x_t + v_t$$

5. 結 論

時系列 資料로써 分布時差模型에 의한 計量分析에 있어서 誤差項과 從屬變數의 系列相關은 OLS 方法의 假說에 違反된다.

本 論文에서는 系列相關이 存在하는 分布時差模型 $y_t = \lambda y_{t-1} + \beta_0 x_t + v_t$, $v_t = \rho v_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma_\varepsilon^2)$의 分析에 있어서 이러한 問題點을 補完하기 위하여 母數를 一種의 確率變數로 看做하여 標本情報로부터 尤度函數를 求하고 母數에 대한 事前情報를 모르는 경우로 看做한 事前確率과 尤度函數를 結合하여 母數 λ와 β_0의 結合事後密度函數를 誘導하여 2變數數値積分技法을 利用한 λ와 β_0를 推定하는 Bayesian 分析方法을 考察하였다. 그러나 母數에 대한 事前情報를 알고 있는 경우 그 母數의 값을 使用하여 分析할 수도 있으며 그럴 경우 λ와 β_0의 推定値는 다르게 나타난다.

〈附 錄〉 Computer Program List

```
      DIMENSION H(100),PL(100),PB(100),A(100),
     1B(100),P(100,100),RHO(40,40),TRO(40)
      DIMENSION IY(10),X(10),Y(10),DX(10)
      COMMON H
      TC=0.975
      DO 22 I=1,10
   22 READ(5,33) IY(I),X(I),Y(I),DX(I)
   33 FORMAT(I2,F5.0,F4.0,F4.3)
      DO 19 I=1,10
      X(I)=X(I)/DX(I)
   19 Y(I)=Y(I)/DX(I)
      HL=0.025
      HB=0.025
      ST=0.025
C TO ESTIMATE THE AUTOCORRELATION RHO
      DO 3 I=1,39
      AL=0.025+FLOAT(I-1)*HL
      DO 4 J=1,39
      AB=0.025+FLOAT(J-1)*HB
      BJA=0.
      BMO=0.
      DO 5 K=3,10
      BJA=BJA + (Y(K)-AL*Y(K-1)-AB*X(K))
     2*(Y(K-1)-AL*Y(K-2)-AB*X(K-1))
    5 BMO=BMO + (Y(K-1)-AL*Y(K-2)-AB*X(K-1))**2
      VV=BJA/BMO
    4 RHO(I,J)=VV
    3 CONTINUE
      TOT=0.0

      DO 7 J=1,39
      TRO(J)=0.0
      DO 9 I=1,39
    9 TRO(J)=TRO(J)+RHO(I,J)
    7 TOT=TOT+TRO(J)
      ETR=TOT/1521.

C TO INTEGRATE THE PDF FOR BETA WITH
C THE FIXED LAMBDA
      DO 20 I=1,39
      AL=0.025+FLOAT(I-1)*HB
      DO 10 J=1,39

      AB=0.025+FLOAT(J-1)*HB
      BJA=0.0
      BMO=0.0
      DO 15 K=3,10
      BJA=BJA+(Y(K-1)-AL*Y(K-2)-AB*X(K-1))**2
```

```
   15 BMO=BMO+((Y(K)-AL*Y(K-1)-AB*X(K))
     2-ETR*(Y(K-1)-AL*Y(K-2)-AB*X(K-1)))**2
      BJA=1./SQRT(BJA)
      BMO=BMO**3 * SQRT(BMO)
      W(J)=BJA/BMO
   10 P(I,J)=W(J)
      PL(I)=FUNC1(TE,ST,38)
   20 CONTINUE

C TO EVALUATE THE NORMALIZING CONSTANT
C BY INTEGRAND FOR LAMBDA
      DO 30 M=1,39
   30 W(M)=PL(M)
      VOL=FUNC1(TE,ST,38)

C TO CCMPUTE THE PROPER DENSITY FUNCTION
C AND THE MEAN OF LAMBDA
      DO 40 J=1,39
      PL(J)=PL(J)/VOL
      A(J)=0.025+FLOAT(J-1)*WL
   40 W(J)=PL(J)*A(J)

      AML=FUNC1(TE,ST,38)
C TO EVALUATE THE VARIANCE OF LAMBDA
      DO 50 I=1,39
   50 W(I)=PL(I)*(A(I)-AML)**2
      VAL=FUNC1(TE,ST,38)
C TO INTEGRATE THE PDF FOR LAMBDA WITH
C THE FIXED BETA

      DO 200 L=1,39
      DO 100 K=1,39
  100 W(K)=P(K,L)
  200 PB(L)=FUNC1(TE,ST,38)

C TO COMPUTE THE MEAN OF BETA
      DO 400 J=1,39
      PB(J)=PB(J)/VOL
      B(J)=0.025+FLOAT(J-1)*HB
  400 W(J)=PB(J)*B(J)
      AMB=FUNC1(TE,ST,38)

C TO COMPUTE THE VARIANCE OF BETA
      DO 500 I=1,39
  500 W(I)=PB(I)*(B(J)-AMB)**2
      VAB=FUNC1(TE,ST,38)

      WRITE(6,44)
   44 FORMAT(1H1,////,11X,'POSTERIOR MEASURES ',
     2'ASSOCIATED WITH',/,15X,'THE MARGINAL ',
     3'POSTERIOR PDF',/,11X,34(1H-),/,4X,49(1H-))

      WRITE(6,55)
   55 FORMAT(4X,'POSTERIOR  MARGINAL POSTERIOR  ',
     2'MARGINAL POSTERIOR',/,5X,'MEASURE      ',
     3'PDF FOR LAMBDA        PDF FOR BETA',/,4X,49(1H-))
      WRITE(6,66) AML,AMB
   66 FORMAT(/,7X,'MEAN',7X,F10.8,11X,F10.8)
      WRITE(6,77) VAL,VAB
   77 FORMAT(/,5X,'VARIANCE',5X,F10.8,11X,F10.8,/,
     24X,49(1H-))

      WRITE(6,88) ETR,VOL
   88 FORMAT(8X,'*** AUTOREGRESSIVE  RHO :',F10.8,
     2' ***',/,8X,'*** NORMALIZING CONSTANT:',E10.5,
     3' ***')
      STOP
      END
      FUNCTION FUNC1(UP,SL,MM)
      DIMENSION W(100)
      COMMON W

      G=FLOAT(MM)
      H=(UP-SL)/G
      N1=MM/2
      N2=N1-1
      Q1=0.0
      Q2=0.0
      MP=MM+1
      DO 50 I=1,N1
   50 Q1=Q1+W(2*I)
      DO 60 I=1,N2
   60 Q2=Q2+W(2*I+1)

      ORQ=(H/3.0)*(W(1)+W(MP)+Q1*4.0+Q2*2.0)
      FUNC1=ORQ
      RETURN
      END
```

參考文獻

1) 經濟企劃院 調査統計局, 韓國統計年鑑, 1973-1982.

2) 尹錫喆, 計量經營學, 서울 : 經文社, 1982.

3) 李載昌, 最新統計學, 서울 : 法經出版社, 1985.

4) Box, G. E. P., Hunter, W. G. and J. S. Hunter, *Statistics for Experimenters*, John Wiley & Sons, 1978.

5) Box, G. E. P. & G. C. Tiao, Bayesian Inference in *Statistical Analysis*, Addison-Wesley, 1973.

6) Chambers, J. C., Mullick, S. K. and D. D. Smith, "How to Choose the Right Forecasting Technique," *Harvard Business Review on Management*, Harper & Row, 1975.

7) Griliches, Z., "A Note on Serial Correlation Bias in Estimates of Distributed Lags," *Econometrica*, Vol. 29, 1961.

8) ______, "Distributed Lags : A Survey," *Econometrica*, Vol. 35, 1967.

9) Hogg, R. V. and A. T. Craig, *Introduction to Mathematical Statistics*, 4th ed., Macmillan Publishing Co., 1978.

10) Johnson, R. D. and B. R. Siskin, *Quantitative Techniques for Business Decision*, Englewood Cliffs, 1976.

11) Johnston, J., *Econometric Methods*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1972.

12) Raiffa, R. and R. Schlaifer, *Applied Statistical Decision Theory*, The M. I. T. Press, 1960.

13) Shan, S. K., *Computer Application of Numerical Methods*, Addison-Wesley, 1972.

14) Theil, H., *Principles of Econometrics*, John Wiley & Sons, 1971.

15) Wheelwright, S. C. and S. Makridakis, *Forecating Methods for Management*, 3rd ed., John Wiley & Sons, 1980.

16) White, J. S., "Asymptotic expansion for the mean and variance of serial correlation coefficient," *Biometrika*, Vol. 48, 1961.

17) Wonnacott, R. J. and T. H., Wonnacott, *Econometrics*, 2nd ed. John Wiley & Sons, 1979.

18) Zellner, A., An Introduction to Bayesian Inference in *Econometrics*, John Wiley & Sons, 1971.